



21-96-54-36  
(161.36)



# МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс

Место проведения Москва  
город

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов  
наименование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ  
профиль олимпиады

Алашеева Александра Михайловича  
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«13» АПРЕЛЯ 2025 года

Подпись участника

Алашеева

## ЧИСТОВИК 75 (семьдесят пять)

$$N1. \sqrt{4x^2 - 12x + 9} + \sqrt{x^2 - 6x + 9} + (\sqrt{-(x-2)})^2 = \\ = \sqrt{3+\sqrt{8}} - \sqrt{3-\sqrt{8}}$$

$$4x^2 - 12x + 9 = (2x-3)^2$$

$$(2x-3)^2 \geq 0 \text{ при любых } x$$

$$x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$$

$$(x-3)^2 \geq 0 \text{ при любых } x$$

$$-(x-2) = -x+2 = 2-x$$

$$2-x \geq 0 \Rightarrow 2 \geq x$$

Значит, ограничение на  $x$ :  $x \leq 2$

$$\sqrt{(2x-3)^2} + \sqrt{(x-3)^2} + (\sqrt{-(x-2)})^2 = \sqrt{3+\sqrt{8}} - \sqrt{3-\sqrt{8}}$$

~~$$3 + \sqrt{8} = (\sqrt{2} + 1)^2$$~~

$$3 + \sqrt{8} = 3 + 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} + 1)^2$$

$$3 - \sqrt{8} = 3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2$$

$$(\sqrt{-(x-2)})^2 = (\sqrt{2-x})^2 = 2-x \text{ при}$$

условии, что  $x \leq 2$

$$\sqrt{(2x-3)^2} + \sqrt{(x-3)^2} + (2-x) = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$$

$$|2x-3| + |x-3| + 2-x = |\sqrt{2}+1| - |\sqrt{2}-1|$$

$$|2x-3| + |x-3| + 2-x = \sqrt{2}+1 - (\sqrt{2}-1)$$

$$|2x-3| + |x-3| + 2-x = 2$$

$$|2x-3| + |x-3| = x$$

$$2x-3=0$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$$x-3=0$$

$$x=3$$

Итак,  $x = \frac{3}{2}$  или  $x = 3$

ИКСОВИК

1 случай:  $x \leq \frac{3}{2}$ 

$$3 - 2x + 3 - x = x$$

$$6 = 4x$$

$$x = \frac{6}{4}$$

$$x = \frac{3}{2}$$

2 случай:  $\frac{3}{2} \leq x \leq 2$ 

$$2x - 3 + 3 - x = x$$

$$x = x \quad \text{— верно}$$

Ответ:  $x \in [1,5; 2]$ 

$$N2. \quad 3^{(5-\frac{1}{x})} \geq a + \sin 4^x$$

найди наименьшее  $a > 0$ , при котором  
нет решений при  $x > 0$  ~~$3^{5-\frac{1}{x}}$~~  при  $x$ , стремящемся к  
бесконечности, стремится к  $3^5 = 243$  $\sin 4^x$  при некоторых  $x$  (даже очень  
больших) равен  $-1$ Так как  $x$  ~~стремится~~ <sup>стремится</sup> к бесконечности,  
но не достигает её, имеем неравенство:

~~$243 - a - 1$~~   $t \geq a - 1$ , где  $t < 243$

Справка

2

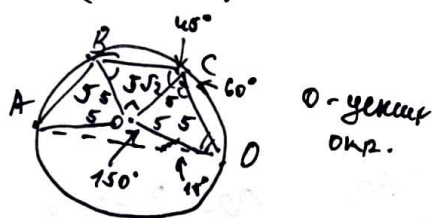
ИСТОБИК

Отсюда следует, что наименьшее  $a$ , при котором есть решение при  $\alpha > 0$ , равно 244

Ответ:  $a = 244$

№ 3. Окр. ;  $r = 5$   
вписанный 4-угольник  
стороны: 5, 5,  $5\sqrt{2}$   
 $S_{max} = ?$

1 случай:



В этом случае  
 $BC \parallel AD$ , т.е.  
 $AB = CD = 5$  и равны  
хорды стягивающие равные  
дуги

$$OB = OC = 5, BC = 5\sqrt{2}$$

$$\angle BOC = 90^\circ, \angle OBC = \angle OCB = 45^\circ$$

$$OC = OD = CD = 5 \Rightarrow \triangle COD - \text{равност.} \quad (\text{изм. } \angle BOC \pm; \triangle BOC - \text{р.с.а})$$

$$\angle OCD = 60^\circ, \angle ODC = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \angle BCD = 105^\circ$$

$$\angle ADC = 180^\circ - \angle BCD = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$$

$$\angle ADO = \angle ADC - \angle ODC = 75^\circ - 60^\circ = 15^\circ$$

$$\angle AOD = \angle ADC = 15^\circ \quad (\text{р.с. } \triangle AOD, OA = OD)$$

$$\angle AOD = 180^\circ - \angle AOB - \angle BOC = 180^\circ - 45^\circ - 90^\circ = 45^\circ$$

$$S = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{AOD} =$$

$$= \frac{5^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{5 \cdot 5}{2} + \frac{5^2 \sqrt{3}}{4} +$$

$$+ \frac{5 \cdot 5}{2} \cdot \sin 150^\circ =$$

$$= \frac{25}{2} + \frac{25\sqrt{3}}{2} + \frac{25}{2} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{25 \cdot 3}{4} + 25 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

См. рис. 3

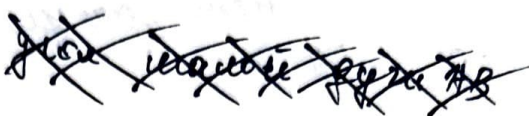
# Цистовик

2 случай:



O - центр окр.

$$AB = 5\sqrt{2}, BC = 5, CD = 5$$



$$\angle AOB = 90^\circ, \text{ и. н.}$$

$$OA = OB = r = 5, AB = 5\sqrt{2}$$

( $\triangle AOB$  - р.б. кр.угол.  $\triangle$ )

$$OB = OC = OD = r = 5$$

$$BC = CD = 5$$



$\triangle BOC$  и  $\triangle COD$  - равносир.  $\triangle$



$$\angle BOC = \angle COD = 60^\circ$$



$$\angle AOD = 360^\circ - \angle AOB - \angle BOC - \angle COD = 360^\circ - 90^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 150^\circ$$



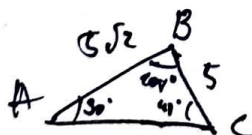
$$\angle OBA = \angle OAB = 45^\circ$$

(кр.угол.  $\triangle AOB$ )

$$\angle OBC = \angle BOC = \angle OCB = 60^\circ \text{ (равносир. } \triangle BOC)$$



$$\angle ABC = \angle OBA + \angle OBC = 45^\circ + 60^\circ = 105^\circ$$



$$\angle AOB = 90^\circ \Rightarrow \angle ACB = \frac{\angle AOB}{2} = 45^\circ$$

(вписанный угол на кр. дуге = половине центрального)

$$\angle BOC = 60^\circ \Rightarrow \angle BAC = \frac{\angle BOC}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

Справка  
4

По теореме косинусов для  $\triangle ABC$ :

ИСТЕВК

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2 \cdot BC \cdot AC \cdot \cos \angle ACB$$

$$(5\sqrt{2})^2 = 5^2 + AC^2 - 2 \cdot 5 \cdot AC \cdot \cos 45^\circ$$

$$50 = 25 + AC^2 - 10AC \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$AC^2 - 5\sqrt{2}AC - 25 = 0$$

$$AC = \frac{5\sqrt{2} \pm \sqrt{50 + 100}}{2}$$

$$AC = \frac{5\sqrt{2} \pm 5\sqrt{6}}{2}$$

$$AC = \frac{5\sqrt{2} + 5\sqrt{6}}{2} \quad (AC > 0)$$

$$\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$$

$$\angle AOD = 180^\circ$$

$$\Rightarrow AC = AD = \frac{5\sqrt{2} + 5\sqrt{6}}{2}$$

(равные хорды стягивают равные дуги)

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4 \cdot r} = \frac{5\sqrt{2} \cdot 5 \cdot (\frac{5\sqrt{2} + 5\sqrt{6}}{2})}{4 \cdot 5} = \frac{50 + 50\sqrt{3}}{8}$$

$$S_{ACD} = \frac{AC \cdot CD \cdot DA}{4 \cdot r} = \frac{(\frac{5\sqrt{2} + 5\sqrt{6}}{2}) \cdot 5 \cdot (\frac{5\sqrt{2} + 5\sqrt{6}}{2})}{4 \cdot 5} = \frac{100 + 50\sqrt{3}}{8}$$

$$S = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{50 + 50\sqrt{3}}{8} + \frac{100 + 50\sqrt{3}}{8} = \frac{75 + 50\sqrt{3}}{4}$$

Других решений нет. Площади в обоих сегментах равны.  
(ш. и. ширина  $5\sqrt{2}$  ограничивает дугу  $90^\circ$ ) Ответ:  $\frac{75}{4} + \frac{25\sqrt{3}}{2}$

Сторона 5

## ЦИКЛОВИК

$$\begin{aligned} 1/4. \quad \sin^3(\pi x) - \sin^3(2\pi x) + \sin^3(4\pi x) &= \\ &= (\sin(\pi x) - \sin(2\pi x) + \sin(4\pi x))^3 \end{aligned}$$

Пусть  $\sin(\pi x) = a$   
 $-\sin(2\pi x) = b$   
 $\sin(4\pi x) = c$

Тогда  $a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3$

$$\Rightarrow 3(a+b)(a+c)(b+c) = 0$$

$$(a+b)(a+c)(b+c) = 0$$

Вернемся к исходным обозначениям:

$$\begin{aligned} &(\sin(\pi x) - \sin(2\pi x)) \cdot (\sin(\pi x) + \sin(4\pi x)) \cdot \\ &\cdot (\sin(4\pi x) - \sin(2\pi x)) = 0 \end{aligned}$$

1 случай:  $\sin(\pi x) - \sin(2\pi x) = 0$

$$\sin(2\pi x) - \sin(\pi x) = 0$$

$$2 \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) = 0 \Rightarrow x - \text{целое число}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} \cdot x\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{n}{3}, \text{ где } n - \text{нечетное}$$

на промежутке  $[0, 3; 1, 6]$  целых

$$x = \frac{1}{3} \text{ / } x = 1 \quad \left(\frac{1}{3} > 0, 3; \frac{5}{3} > 1, 6\right)$$

2 случай:

$$\sin(\pi x) + \sin(4\pi x) = 0$$

$$2 \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{2} x\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} x\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{2} \cdot x\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{t}{5}, \text{ где } t - \text{целое}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} \cdot x\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{n}{3}, \text{ где } n - \text{нечетное}$$

Справка

# ЧИСЛОВИК

На отрезке

$[0,3; 1,6]$  искать

$$t = \frac{2}{5}, \quad x = \frac{4}{5}, \quad x = \frac{6}{5},$$

$$t = \frac{8}{5} \quad \left( \frac{2}{5} = 0,4 > 0,3; \frac{4}{5} = 0,8 > 1,6 \right)$$

$$t = \frac{1}{3}, \quad x = 1 \quad \left( \frac{1}{3} > 0,3; \frac{5}{3} > 1,6 \right)$$

3 случая:

$$\sin(4\pi x) - \sin(2\pi x) = 0$$

$$2 \cdot \sin(\pi x) \cdot \cos(3\pi x) = 0$$

$$\sin(\pi x) = 0 \Rightarrow x - \text{целое}$$

$$\cos(3\pi x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \text{ где}$$

$\pi$  - нечетное

$$t = 1$$

$$(0,3 > 0; 1,6 < 2)$$

$$t = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad t = \frac{5}{6}, \quad t = \frac{7}{6}, \quad t = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

$$\left( \frac{1}{6} < 0,3 \neq; \frac{5}{6} > 1,6 \neq; \frac{7}{6} > 0,3; \frac{3}{2} < 1,6 \right)$$

объединяем найденные  $x$

$$\text{Ответ: } t = \frac{1}{3}; \quad t = 1; \quad t = 0,4; \quad t = 0,8;$$

$$t = 1,2; \quad t = 1,6; \quad t = 0,5; \quad t = \frac{5}{6};$$

$$t = \frac{7}{6}; \quad t = 1,5$$

Справедливо  
7

## Чистовик

N 5

$$f_1(x) = (x+a_1)(x^2+b_1x+c_1)$$

$$f_2(x) = (x+a_2)(x^2+b_2x+c_2)$$

$$f_3(x) = (x+a_3)(x^2+b_3x+c_3)$$

$$a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 > 0$$

$$f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) \text{ для всех действ. } x$$

~~Если  $f_1(x) = f_2(x) = f_3(x)$  для всех действ.  $x$ ,  
то  $6a_1 = 3a_2 = 12a_3$   
 $a_2 = \frac{3}{4}a_1$ ;  $a_3 = \frac{1}{2}a_1$~~

в.к.  $f_1(x) = f_2(x) = f_3(x)$  для всех действ.  $x$ ,  
то это одна и та же функция  
 $\Rightarrow 6a_1 = 3a_2 = 12a_3$

$$a_2 = \frac{3}{4}a_1; a_3 = \frac{1}{2}a_1$$

Корни данных ф-ции:  $x = -a_1$ ;  $x = -a_2$ ;  
 $x = -a_3$

(в.к. все три разных разложения на  
линейные)

$$\Rightarrow 6 = a_2 a_3 \quad (6 \cdot a_1 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3, a_1 > 0, \text{ поэтому } 6 = a_2 \cdot a_3)$$

$$\Rightarrow 3 = a_1 a_3$$

$$\Rightarrow 12 = a_1 \cdot a_2$$

$$a_2 = \frac{3}{4}a_1 \Rightarrow 12 = a_1 \cdot a_1 \cdot \frac{3}{4}$$

$$a_1^2 = 16 \Rightarrow a_1 = 4$$

(в.к.  $a_1 > 0$ )

Итого  
3

ИИ СТО В И К

Тогда  $a_2 = \frac{3}{4} \cdot 4 = 3$

$a_3 = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$

Тогда  $-3$  и  $-2$  - корни

$x^2 + b_1x + 6 \Rightarrow b_1 = 5$   
( $10 - 2b_1 = 0$ )

$-4$  и  $-2$  - корни  $x^2 + b_2x + 8$

$\Rightarrow b_2 = 6$   
( $12 - 2b_2 = 0$ )

$-4$  и  $-3$  - корни  $x^2 + b_3x + 12$

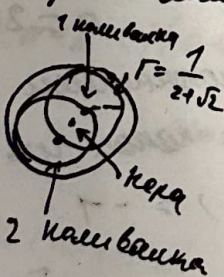
$\Rightarrow b_3 = 7$   
( $17 - 3b_3 = 0$ )

Тогда  $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 = 4 + 5 + 3 + 6 + 2 + 7 =$   
 $= 2 \cdot 3 = 27$

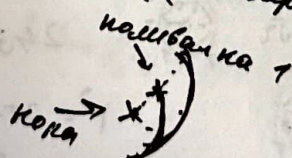
Ответ: 27

№6. как расположить камешки:

$R = \frac{3}{2}r_2 \rightarrow$   
 $= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2+2\sqrt{2}}$



в одну линию  
расположить  
камень четверть  
камень  
камень



Секрет

# ЦЕРКОВИК

$$1) \sqrt{(2-x)^2} + \sqrt{(x-3)^2} + (\sqrt{-(x-2)})^2 =$$

$$2-x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{3+\sqrt{8}} - \sqrt{3-\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}+1 - (\sqrt{2}-1)}{2}$$

$$3+\sqrt{8} = 3+2\sqrt{2} = (\sqrt{2}+1)^2 = 2+1+2\sqrt{2} = 3+2\sqrt{2}$$

$$|2-x| + |x-3| + \sqrt{2-x} = 2$$

$$|2-x| + |x-3| = x$$

$$x=3 \quad x=3$$

2)

$$3^{5-\frac{1}{x}} \geq a + \sin 4x \quad x > 0$$

$$a > 0$$

$$3^5 \cdot 3^{(-\frac{1}{x})} = 3^5 \cdot \frac{1}{3^{\frac{1}{x}}} = \frac{3^5}{3^{\frac{1}{x}}} \geq a + \sin 4x$$

$$x > 0$$

$$3^{5-\frac{1}{x}} < 3^5 = 243$$

$$243 \geq a-1$$

$$3^{5-\frac{1}{x}} \text{ при } x=1, \quad a=244 \text{ ??}$$

переходя к логарифмам

$\sin 4x$  можно при каком-то  $x$  (равно нулю, больше)  $= -1$



$$243 \geq a-1$$



$$r^2 = r_0^2 + r_0^2 - 2r_0 \cdot r_0 \cdot \cos 60^\circ$$

$$r^2 = 2r_0^2 - 2r_0^2 \cdot \frac{1}{2} = r_0^2$$

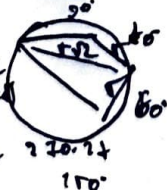
$$r = r_0 = 2\sqrt{2}$$

$$r^2 = 2r_0^2(1-\cos 60^\circ)$$

$$r^2 = r_0^2 + r_0^2 -$$

$$r^2 = r_0^2 + r_0^2 - 2r_0 \cdot r_0 \cdot \cos 120^\circ$$

$$r^2 = r_0^2 + r_0^2 - 2r_0 \cdot r_0 \cdot (-\frac{1}{2})$$



ЦЕРКОВИ

$$f_1(x) = (x+a_1)(x^2+b_1x+c_1) = x^3 + b_1x^2 + c_1x + a_1x^2 + a_1b_1x + a_1c_1$$

$$f_2(x) = (x+a_2)(x^2+b_2x+c_2)$$

$$f_3(x) = (x+a_3)(x^2+b_3x+c_3)$$

ири ирири  $-a_1, -a_2, -a_3$

$$6a_1 = 2a_2 = 12a_3$$

$$a_2 = \frac{3}{2}a_1$$

$$6 \cdot 3 \cdot 1 = 48 \cdot 11 = 12 \cdot 12 \cdot 4$$

$$a_3 = \frac{1}{2}a_1$$

$$74 \cdot 24 = 1776$$

$$-1776 = -a_1 a_2 a_3 = -a_1 \cdot \frac{3}{2}a_1 \cdot \frac{1}{2}a_1$$

$$1776 = a_1^3 \cdot \frac{3}{2}$$

$$\frac{1776 \cdot 2}{3} = \frac{74 \cdot 24 \cdot 2}{3} = 64 \cdot 24 = 64 \cdot 4 \cdot 6$$

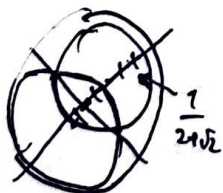
$$a_1^3 = 2^3 \cdot 3$$

$$a_1 = 2\sqrt[3]{3}$$

$$64 \cdot 24 = 2^6 \cdot 2^3 \cdot 3 = 2^9 \cdot 3$$

$$a_1 = \frac{1}{4} \cdot 2\sqrt[3]{3} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{3}$$

$$a_3 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{3}$$



$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

| Шифр        | Сумма | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|-------------|-------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 21-98-54-38 |       | + | + | + | + | + | - | 0 | 0 |
|             |       |   |   |   |   |   |   |   |   |

- 2) Определить значения процентов выетки при а) полном проеме б) 1/20)
- б) пределе ее забегнуто.