



0 242772 290009

24-27-72-29

(160.6)



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Анатолевский Марии Маратовной
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«13» апреля 2025 года

Подпись участника

Handwritten marks and signatures

24-27-72-29
(160.6)

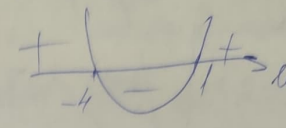
$$\sqrt{\log_2^2 x + 3 \log_2 x - 4} - \sqrt{\log_2^2 x + 3 \log_2 x - 4} \geq \log_2 x + 1$$

60 (используем)

по методу интервалов

$$\log_2^2 x + 3 \log_2 x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow (\log_2 x - 1)(\log_2 x + 4) \geq 0$$

по методу Виета

$$\Leftrightarrow \log_2 x \in (-\infty; -4] \cup [1; +\infty)$$


Рассмотрим два случая:

1) $\log_2 x > 0 \Leftrightarrow \log_2 x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 2$ (т.к. $\log_2 x \uparrow$ при $x > 0$)

$\log_2 x + 1 > 0$

$$\sqrt{\log_2^2 x + 3 \log_2 x - 4} - \sqrt{\log_2^2 x + 3 \log_2 x - 4} \geq \log_2 x + 1$$

Возведем в квадрат

$$\begin{cases} \log_2^2 x + 3 \log_2 x - \sqrt{\log_2^2 x + 3 \log_2 x - 4} \geq \log_2^2 x + 2 \log_2 x + 1 \\ \log_2^2 x + 3 \log_2 x \geq \sqrt{\log_2^2 x + 3 \log_2 x - 4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_2 x - 1 \geq \sqrt{\log_2^2 x + 3 \log_2 x - 4} \\ \log_2^2 x + 3 \log_2 x \geq \sqrt{\log_2^2 x + 3 \log_2 x - 4} \end{cases}$$

т.к. $\log_2 x \geq 1$

$$\begin{cases} \log_2^2 x - 2 \log_2 x + 1 \geq \log_2^2 x + 3 \log_2 x - 4 \\ \log_2^2 x + 3 \log_2 x \geq \sqrt{\log_2^2 x + 3 \log_2 x - 4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5 \geq 5 \log_2 x \\ \log_2^2 x + 3 \log_2 x \geq \sqrt{\log_2^2 x + 3 \log_2 x - 4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \geq \log_2 x, \text{ а } \log_2 x \geq 1 \\ \log_2^2 x + 3 \log_2 x \geq \sqrt{\log_2^2 x + 3 \log_2 x - 4} \end{cases}$$

$$\log_2 x = 1$$

$$x = 2$$

Проверка $1^2 + 3 \cdot 1 \geq \sqrt{1^2 + 3 \cdot 1 - 4}$
верно, т.е. $x = 2$ подходит

2) $\log_2 x < 0 \Leftrightarrow \log_2 x \leq -4$, тогда $\log_2 x + 1 < 0$ и
наде, что $\log_2^2 x + 3 \log_2 x - \sqrt{\log_2^2 x + 3 \log_2 x - 4} \geq 0$

$$\log_2^2 x + 3 \log_2 x \geq \sqrt{\log_2^2 x + 3 \log_2 x - 4} \quad (1)$$

$$\log_2 x (\log_2 x + 3) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$\log_2 x$ уже ≤ -4 , т.е.

обе части нр-ва (1) больше 0.

Возведем в квадрат.

$$\log_2^4 x + 6 \log_2^3 x + 9 \log_2^2 x - \log_2^2 x - 3 \log_2 x + 4 \geq 0$$

$$\log_2^4 x + 6 \log_2^3 x + 8 \log_2^2 x - 3 \log_2 x + 4 \geq 0$$

$\text{Nyctm } t = \log_2 x, \text{ maka}$
 $t^2 + 3t \geq \sqrt{t^2 + 3t - 4}$

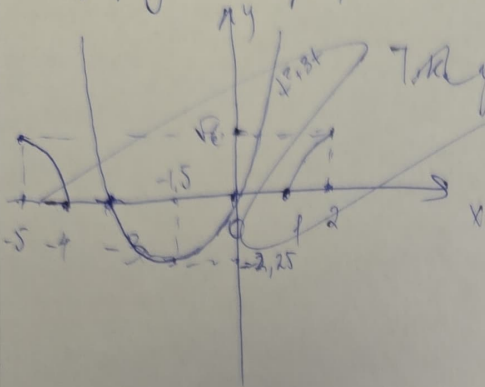
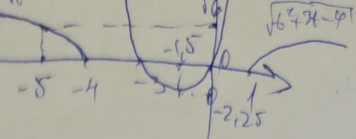
Цифри на графика

Построение график

$$\begin{array}{r} 2.25 \times 3.14 = \\ - 2.25 - 4.5 = \\ \hline - 2.25 \end{array}$$

$$12.3t \geq \sqrt{t^2 + 3t - 4}$$

$\frac{t^2 + 3t - 6}{t^2 + 3t - 6}$



7. На графике функции $y = \sqrt{x}$, где $\deg f = 2$, отмечены

Когда рисунок график вид а

~~$y = \sqrt{ax^2 + bx + c}, a \neq 0$~~

то системно перевіряючи
плоскість на 90° і сторони
в карданоу.

Пусть $a = \sqrt{t^2 + 3t - 4}$ тогда

пер-во арифмет. прогр. $(a + 1)^2 - a^2 = 2a + 1$

$$\underbrace{t^2 + 3t - 4}_{a^2} \geq \underbrace{\sqrt{t^2 + 3t - 4}}_a - 4$$

~~$a^2 + 4 \geq 0$ $a < 0$, значит~~

$$t^2 + 8t + 50 \Rightarrow t^2 + 3t \geq t^2 + 3t + 4 \Rightarrow$$

$$d^2 + 3d + 2 = \sqrt{1 + 3d + 3d^2 - 4} \text{ mika } d = \sqrt{10} \text{ mola}$$

T.e. $t \leq -4$ negocogum, marga $x \in (0, \frac{1}{10}]$ m.e.

доинструментальные $\frac{1}{2}$ цене $\frac{1}{2}$ цене $f'(x) = 16x -$

— Әмірлерің $x = \frac{1}{16}$ және $x = 2$, м.б. $1 + 2 \cdot 16 = 33$

Omsem: 33

۱۹۲

Same:

 $\triangle ABC$

Ф-индекс

$$W_1 - \text{one exp. } \Delta ABC$$

W₂ - onuc. exp ΔOBC

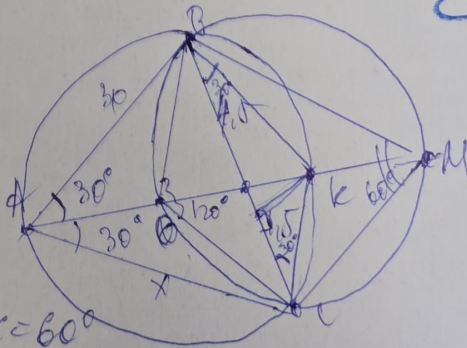
$$AO \cap W_2 = \{O, M\}$$

$BC = 6$, $AB:AC = 3:1$, $\angle BAC = 60^\circ$

Hawmū;

Om

Решение:



пусть $AO \cap \omega_1 = \{A\} \cap \omega_2$

Тогда $BK = KC$, т.к. $\triangle ABC$ - бис. ($\angle KBC = \angle BAK = \angle CAK =$
 $\angle BOC = 90^\circ + \frac{\angle BAC}{2} = 120^\circ \Rightarrow \angle BMC = 60^\circ$ (т.к. $\angle BMC = \angle BOC$)

Заметим, что дуга BC ω_1 - это ГМТ точек, $\angle BOC = 120^\circ$ (следует из бис. $\triangle ABC$).

это угол, опирающийся на BC равен 120° . $60^\circ \cdot 2 = 120^\circ$,
 значит, на BC (где нет т. A) лежит и центр ω_2 ,
 т.к. $\angle BIC = 120^\circ$, (I - центр ω_2)

т.к. $\angle BMC = 60^\circ$. Также I лежит
 на сеп. пер. к BC , значит, I - это т. K (поскольку
 $BK = KC$). OM - диаметр ω_2 .

По т. синусов для $\triangle BMC$:

$$\frac{BC}{2 \sin \angle BMC} = R = \frac{OM}{2} \quad \frac{BC}{\sin \angle BMC} = \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$$

Ответ $4\sqrt{3}$

н.з.

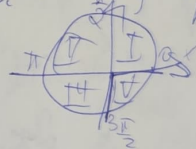
$$\sqrt{\cos x} + 2\sqrt{-3 \sin x} > 2\sqrt{\cos x} - \sqrt{-3 \sin x} \quad \sin x \leq 0, \text{ а } \cos x \geq 0,$$

↓

Вставляем, что x лежит в II четверти

$$\sqrt{\cos x} + 2\sqrt{-3 \sin x} > 4\sqrt{\cos x} - 4\sqrt{-3 \sin x}$$

$$\sqrt{\cos x} \geq \sqrt{-3 \sin x}$$

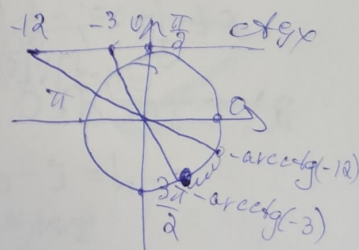


$$\begin{cases} 3\sqrt{\cos x} < 6\sqrt{-3 \sin x} \\ \sqrt{\cos x} \geq \sqrt{-3 \sin x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{\cos x} < 2\sqrt{-3 \sin x} \\ \sqrt{\cos x} \geq \sqrt{-3 \sin x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x < 12 \sin x \\ \cos x \geq -3 \sin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x < -12 \sin x \\ \cos x \geq 0 \\ \sin x \leq 0 \end{cases}$$

или $\sin x = 0$ $\cos x = 1$, тогда $1 < 0$ по (1), что неверно, т.е. $\sin x < 0$



Ответ: ~~$\arcsin(-1/2)$~~ ~~$\arcsin(-3)$~~

объединении $(-\arcsin(-1/2) + 2\pi k; -\arcsin(-3) + 2\pi k)$ при $k \in \mathbb{Z}$

$$|x+1-a| + |4^x-a| = 4^x-x-1$$

Заметим, что $4^x-a - (x+1-a) = 4^x-x-1$

Пусть $c = 4^x-a$, $d = x+1-a$

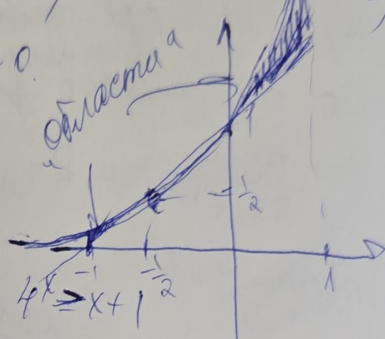
$$|c| + |d| = c-d \quad c-d \geq 0, \text{ т.к. слева модуль,}$$

т.е. либо $c, d \geq 0$ и $c \geq d$, либо $c \geq 0, d < 0$,
либо $c < 0, d < 0$ и $c-d \geq 0$.

$$1) \quad c, d \geq 0 \quad c \geq d$$

$$c+d = c-d$$

$$d=0 \Rightarrow a=x+1, \text{ а } 4^x \geq x+1$$



$f(x) = 4^x$ выпукла вниз на всей обл. опр., т.к.
вторая производная больше 0 на всей обл.
опр. ($f'(x) = \ln 4 \cdot 4^x$, $f''(x) = \ln 4 \cdot \ln 4 \cdot 4^x$)

Т.е. 4^x и $x+1$ (график) пересекаются не более
чем в 2х точках, это точки $x=0$ ($4^0=1, x+1=1$)
и $x=-1/2$ ($4^{-1/2} = 1/2, x+1=1/2$). Т.е. $4^x \geq x+1 \Leftrightarrow$

$$x \in (-\infty; -1/2] \cup [0; +\infty) \quad \text{Тогда } a \in (-\infty; 3/2] \cup [1; +\infty)$$

$$2) \quad c \geq 0, d < 0 \quad (c-d > 0)$$

$$c-d = c-d$$

$$x+1 < a, \quad 4^x \geq a$$

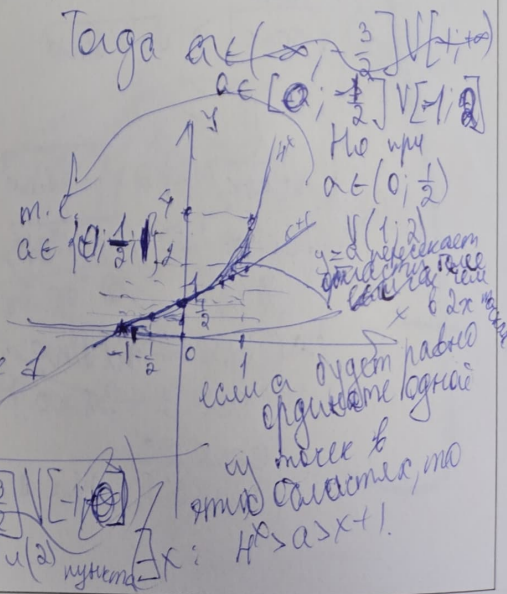
Если $y=a$ пересекает обл.

более чем в 2х точках, то решений нет

$$\text{Это } a \in (0; 1/2) \cup (1; 4)$$

$$\text{Для } a \in ((0; 1/2) \cup (1; 4)) \cap [2; 3/2] \cup [-1; 0]$$

есть два решения x_1 и x_2 такие что $4^{x_1} > a > x_1+1$

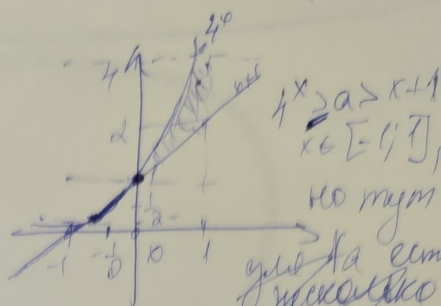


~~$a \in [-2; -\frac{3}{2}] \cup [-1; 0] \cup [1; 4]$ одно решение в (1)~~

~~$a \in [-2; -\frac{3}{2}] \cup [-1; 0] \cup [1; 4]$~~

Таким а нет.

З



$4^x \geq a \geq x+1$
 $x \in [-1; 1]$

но тут

где-то есть

несколько

х, подводящих

где $4^x \geq a \geq x+1$

где $4^x \geq a \geq x+1$

пересекает эту область

Здесь только

$y = 4$ пересекает

область в одной точке, т.е. поскольку

имеет единственное

решение.

$a = 4$ подходит

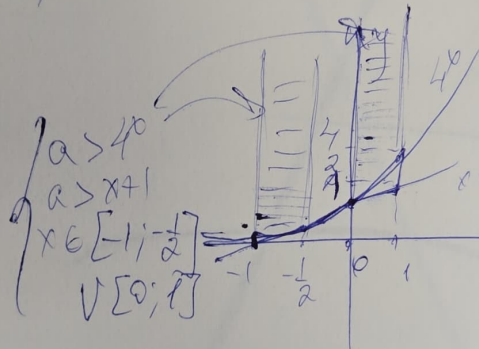
3) $c < 0, d < 0, c - d \geq 0$

$4^x < a, x+1 < a$

$4^x - (x+1) \geq 0$

$x \in [-1; -\frac{1}{2}] \cup [0; 1]$

З



Тогда ответ

$y = a$ пересекает

область

более, чем

в одной

точке,

т.е. решений

будет больше одного.

$a \notin$ в таком случае

Итого: $a \in [-2; -\frac{3}{2}] \cup [-1; 0] \cup [1; 4]$

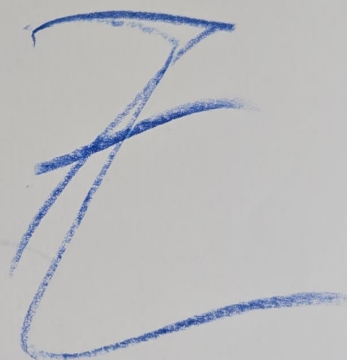
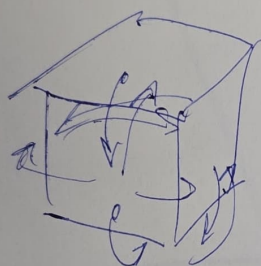
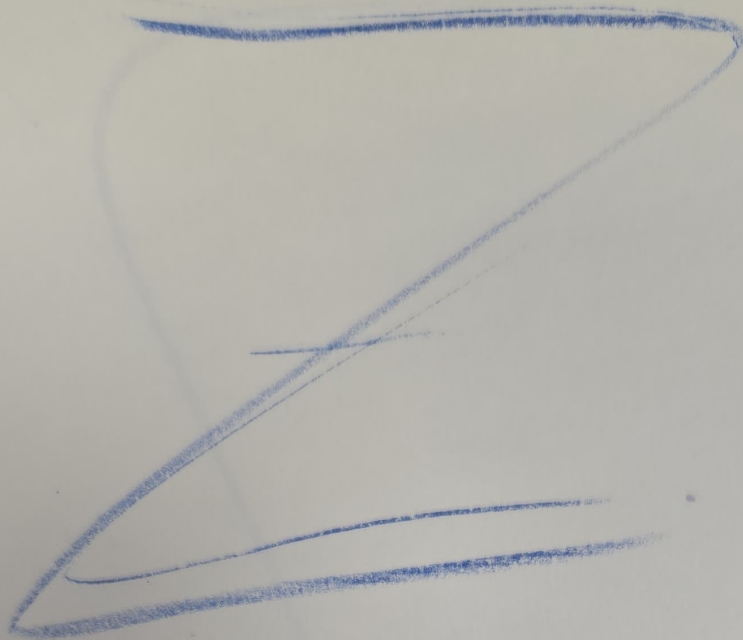
$a \in [0; \frac{1}{2}; 1; 4]$

З

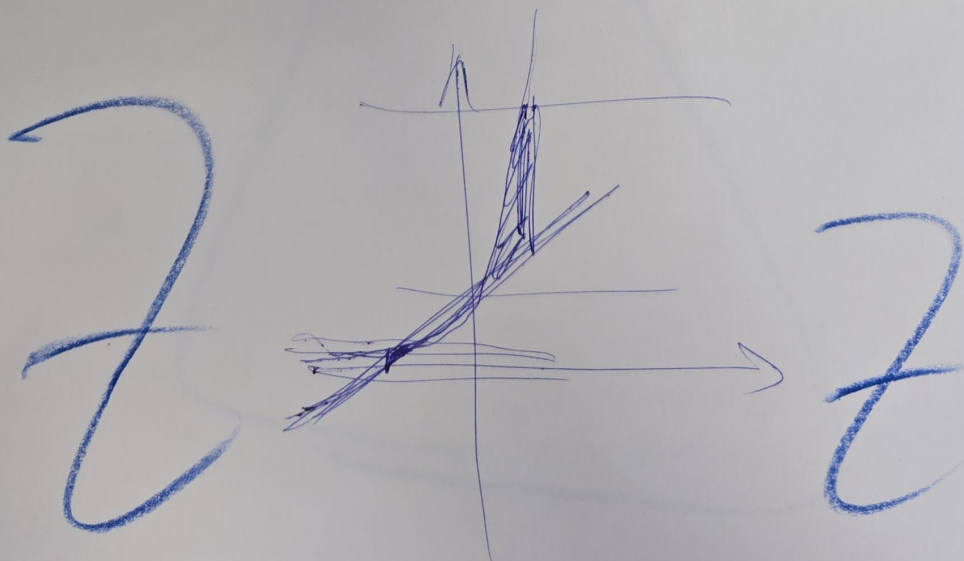
при $a \geq 0, x = -1$, при $a = \frac{1}{2}, x = -\frac{1}{2}$, при $a = 1, x = 0$,
при $a = 4, x = 1$

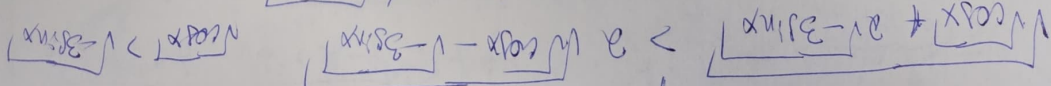
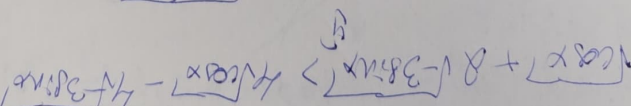
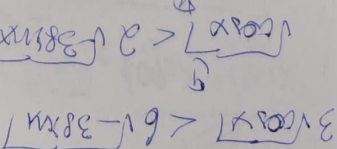
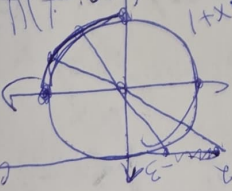
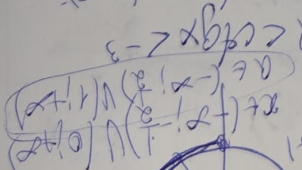
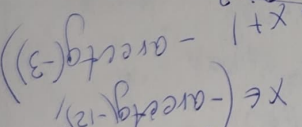
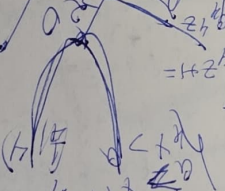
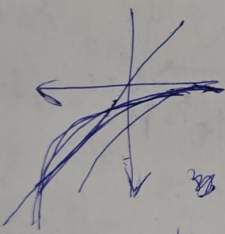
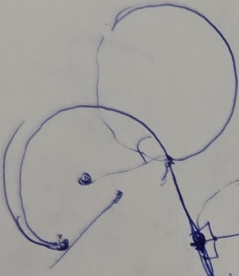
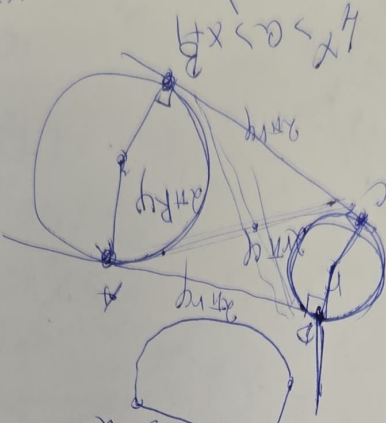
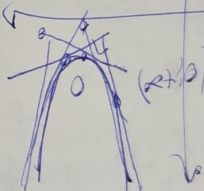
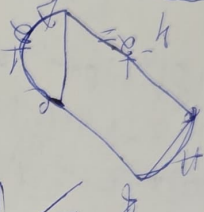
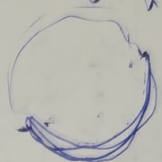
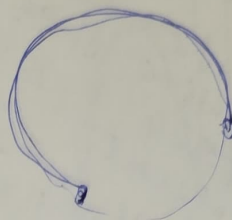
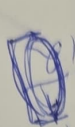
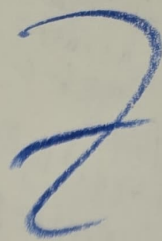
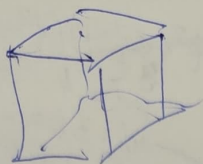
Ответ: $[0; \frac{1}{2}; 1; 4]$

З



$$4t + 6t^3 + 8t^2 - 3t + 4 = 0$$





$$\begin{aligned} b+d &= 4 \\ a+d &= -3 \\ a+c+d+b &= 8 \\ a &= b-c \end{aligned}$$

$$17 + 6t^3 + 8t^2 - 3t + 9$$

$$\begin{aligned} (t^2 + a + b)(t^2 + c + d) \\ \text{b.d} = 4 \quad \begin{matrix} 4a + c = -3 \\ a + c = 6 \end{matrix} \\ \text{ad} + cb = -3 \quad \begin{matrix} 3a = -9 \\ a = -3 \end{matrix} \\ ac + d + b = 8 \quad \begin{matrix} a = -3 \\ c = 9 \end{matrix} \\ a + c = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} bd &= 4 \\ 6d - cd + c &= -3 \\ 6c - c^2 + d + b &= 8 \\ a &= 6 - c \end{aligned}$$

$$a = 6 - c$$

$$b = \frac{4}{d} \quad \frac{4c}{d} = -3$$

$$bd - cd + \frac{4c}{d} = 8 \quad \frac{12}{17}$$

$$bc - c^2 + \frac{4c}{d} = 8 \quad \frac{12}{17}$$

$$4t^3 + 12t^2 + 16t - 3 \leq 0$$

$$f_2(z) = (z+1)$$

$$-t^2 - 3t + 4 = -(t+4)(t-1)$$

$$f^7 + 6f^3 + 8f^2 - 3f + 4 \geq 0$$

$$(t^2 + t + 1)(t^2 + t - 4)$$

$$16 \leq 6 \cdot 8 + 8 \cdot 4 + 6 + 4 \geq 0 \quad \frac{5}{3} \leq 2 \times 600$$

$$16 \quad 48 \quad 32 \quad -6 + 9 = 3 + 2 \log 5 -$$

$$\log^2 x - 2 \log x - 1 \geq \log^2 x + 3 \log x - 4$$

$$36 + 16 = 52$$

$$\log^2 x + 3 \log x \geq \log^2 x - 4$$

$$f_{-27}^{(2+)}(1-7 \quad 27)$$

87 + 08 + 49.2 -

$$44 - 6.4^2 + 8.16 + 12 + 4$$

$$44 - 6.4 + 8.16 + 12 + 4$$

$$4 + 8 \cdot 8 - 4 \cdot 8 + 8 \cdot 8 + 31$$

$$t^4 + 6t^3 + 8t^2 - 3t + 4 \geq 0$$

$$1 - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \leq 1$$

$$f_1 + f_2 \leq (f_0 + f_1)$$

$$a \in \left(\frac{1}{2}, 1 \right)$$

$$[f^{-1}(a)] \rightarrow a$$

$$\log x - 1 \geq \sqrt{\log^2 x + 3 \log x - 6}$$

$$x + 3 \log_2 x - \sqrt{\log_2^2 x + 3 \log_2 x - 2}$$

$0 \leq 1 + x^2 \leq 1$

$$1 + x_2 + x_2^2 \geq \sqrt{1 + 3x_2 + x_2^2}$$

$$1 + \theta \leq \sqrt{1 - \theta + \theta^2}$$

Центр

$$x = \log_2 x$$

X52

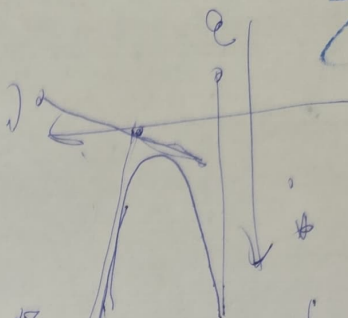
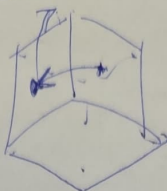
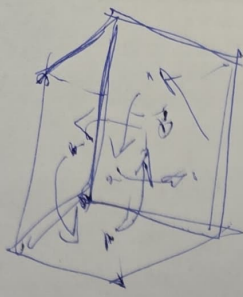
~~log x~~

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2}$$

$$-6 + 9$$

$$\sqrt{12 + 36 - 1}$$

ыша запрещает



$$|x+1| + |4x| = 4x-1$$

$$(x+1) + 4x = 4x-1$$

$$x+1 = -1 \Rightarrow x = -2$$

$$x+1 = 1-4x \Rightarrow 5x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x = -2, x = 0$$

$$x = -2, x = 0$$

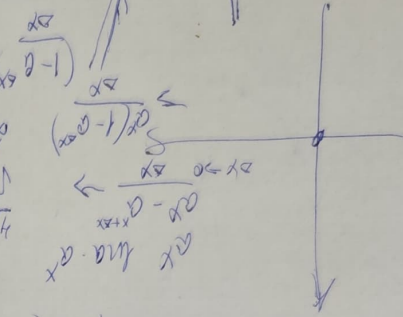
$$x = -2, x = 0$$

$$x = -2, x = 0$$

$$x = -2, x = 0$$

$$x = -2, x = 0$$

$$x = -2, x = 0$$



$$b = x+1-a$$

$$a = 4x-a$$

$$a = 0$$

$$a > 0, b > 0$$

$$a > 0, b > 0$$

$$a > 0, b > 0$$

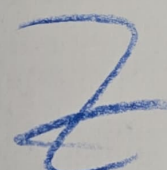
$$a > 0, b > 0$$

$$a > 0, b > 0$$

$$a > 0, b > 0$$

$$a > 0, b > 0$$

$$a > 0, b > 0$$



$$a-b = a-b$$

$$a > 0, b > 0$$

$$a > 0, b > 0$$

$$a > 0, b > 0$$

$$a > 0, b > 0$$

$$a > 0, b > 0$$

$$a > 0, b > 0$$

$$a > 0, b > 0$$

$$a > 0, b > 0$$

$$a > 0, b > 0$$

$$a > 0, b > 0$$

$$a > 0, b > 0$$

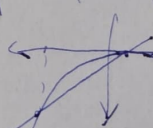
$$a > 0, b > 0$$

$$a > 0, b > 0$$

$$a > 0, b > 0$$

$$a > 0, b > 0$$

$$a > 0, b > 0$$

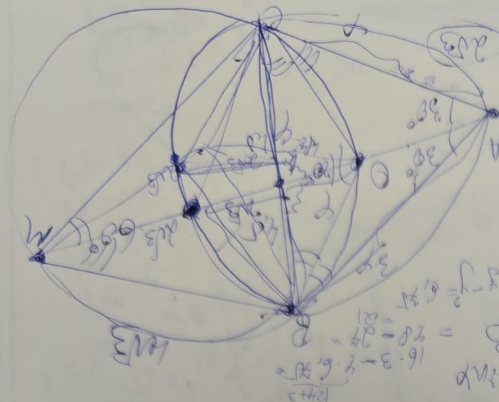


$$a > 0, b > 0$$

$$a > 0, b > 0$$

$$a > 0, b > 0$$

$$a > 0, b > 0$$

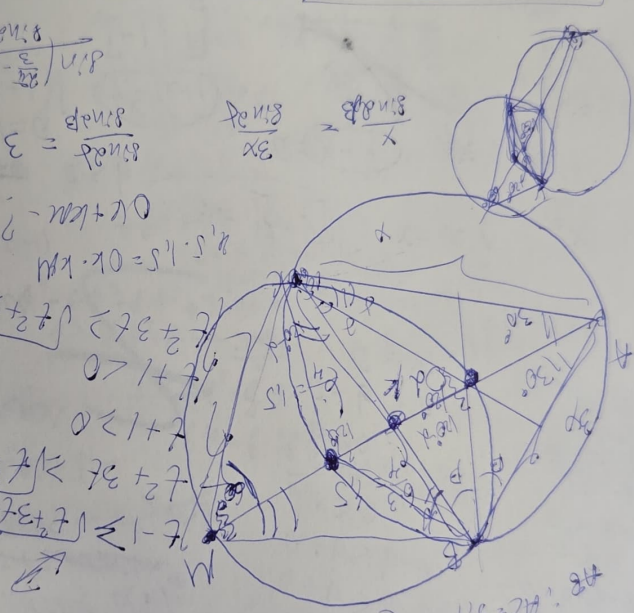
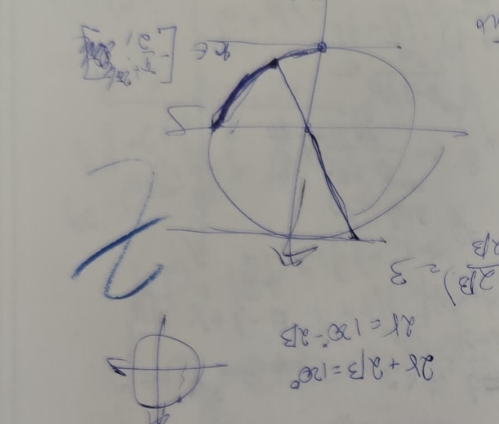


$$\frac{8 \sin 30^\circ}{3 \sin 45^\circ} = \frac{8 \sin 30^\circ}{3 \sin 45^\circ} = \frac{8 \cdot \frac{1}{2}}{3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\frac{2.8:16.6}{6} = \frac{2.8:16.6}{6} = \frac{2.8}{6} = \frac{1}{2.14} \approx 0.467$$

$$\frac{8 \sin 30^\circ}{3 \sin 45^\circ} = \frac{8 \sin 30^\circ}{3 \sin 45^\circ} = \frac{8 \cdot \frac{1}{2}}{3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\frac{8 \sin 30^\circ}{3 \sin 45^\circ} = \frac{8 \sin 30^\circ}{3 \sin 45^\circ} = \frac{8 \cdot \frac{1}{2}}{3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$



$$\frac{8 \sin 30^\circ}{3 \sin 45^\circ} = \frac{8 \sin 30^\circ}{3 \sin 45^\circ} = \frac{8 \cdot \frac{1}{2}}{3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\frac{2.8:16.6}{6} = \frac{2.8:16.6}{6} = \frac{2.8}{6} = \frac{1}{2.14} \approx 0.467$$

$$\frac{8 \sin 30^\circ}{3 \sin 45^\circ} = \frac{8 \sin 30^\circ}{3 \sin 45^\circ} = \frac{8 \cdot \frac{1}{2}}{3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\frac{8 \sin 30^\circ}{3 \sin 45^\circ} = \frac{8 \sin 30^\circ}{3 \sin 45^\circ} = \frac{8 \cdot \frac{1}{2}}{3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\frac{2.8:16.6}{6} = \frac{2.8:16.6}{6} = \frac{2.8}{6} = \frac{1}{2.14} \approx 0.467$$

$$\frac{8 \sin 30^\circ}{3 \sin 45^\circ} = \frac{8 \sin 30^\circ}{3 \sin 45^\circ} = \frac{8 \cdot \frac{1}{2}}{3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\frac{8 \sin 30^\circ}{3 \sin 45^\circ} = \frac{8 \sin 30^\circ}{3 \sin 45^\circ} = \frac{8 \cdot \frac{1}{2}}{3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\frac{2.8:16.6}{6} = \frac{2.8:16.6}{6} = \frac{2.8}{6} = \frac{1}{2.14} \approx 0.467$$

$$\frac{8 \sin 30^\circ}{3 \sin 45^\circ} = \frac{8 \sin 30^\circ}{3 \sin 45^\circ} = \frac{8 \cdot \frac{1}{2}}{3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$