

0 310216 800005

31-02-16-80
(160.3)



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников "Ломоносов"
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Алексеева Илья Романовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«13» апреля 2025 года

Подпись участника
ИД

31-02-16-80

(160.3)

страница 1 (чистовик)

Задача №1 $\sqrt{\log_2^2 x + 3 \log_2 x - 4} \geq \log_2 x + 1$

Положим $t = \log_2 x$, пер-во пр. ввг: 60 (шестьдесят)

$$\sqrt{t^2 + 3t - 4} \geq t + 1$$

$$\begin{cases} t^2 + 3t - 4 \geq t^2 + 2t + 1 \\ t + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t + 1 \geq 0 \\ t^2 + 3t - 4 \geq 0 \end{cases} \quad (\Rightarrow)$$

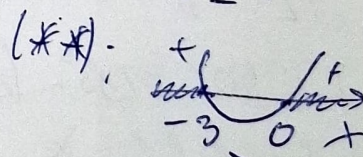
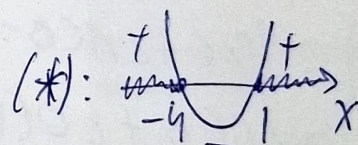
но т. Вундт

$$\Rightarrow \begin{cases} t \geq \sqrt{t^2 + 3t - 4} \\ t \geq -1 \\ t^2 + 3t \geq \sqrt{(t+1)(t+4)} \\ t \leq -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t \leq 1 \\ (t-1)(t+4) \geq 0 \quad (*) \\ t \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (t-1) \cdot (t+4) \cdot (t^2 + 3t)^2 \\ 4t^3 + 9t^2 \\ t \in (-\infty; -4] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t^2 - 2t + 1 \geq t^2 + 3t - 4 \\ t^2 + 3t - 4 \geq 0 \\ t \geq 1 \\ (t-1)(t+4) \geq 0 \quad (*) \\ (t-1)(t+4) \leq (t^2 + 3t)^2 \\ t^2 + 3t \geq 0 \quad (**) \\ t \leq -1 \end{cases}$$



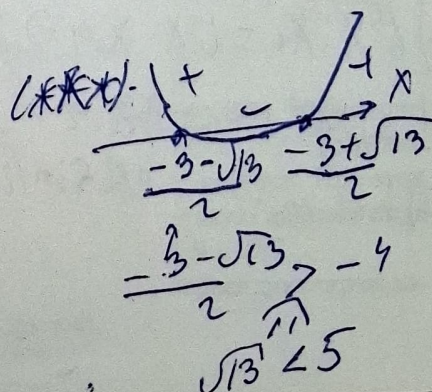
$$\Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ (t^2 + 3t)(t^2 + 3t - 1) \geq -4 \\ t \in (-\infty; -4] \end{cases}$$

(****)

$t = 1$

$t \leq -4$

$$\begin{cases} t = 1 \\ t^2 + 3t - 4 \leq (t^2 + 3t)^2 \\ t \in (-\infty; -4] \end{cases}$$



стр. 2 (чистовик)
задачи 1 (продолжить)

Вернемся к х:

$$\left[\begin{array}{l} \log_2 x = 1 \\ \log_2 x \leq -4 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x \in (0; \frac{1}{16}] \end{array} \right]$$

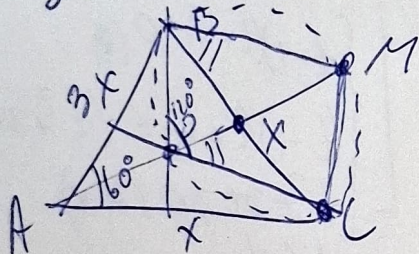
$f(x_0) = 16x_0$ - целое, где $x_0 \in \{2\} \cup (0; \frac{1}{16}]$

и.и.и.и.и.и. $x_0 \in \{2; \frac{1}{16}\}$

вк. $f(2) = 32$ $f(\frac{1}{16}) = 1$

Ответ: 33

Задача №2



Дано: $\triangle ABC$
медианы пересекаются в O .

AO продолж. до M
 $\triangle OBC$ в M и N

сег: $OM = ?$

1) $\angle ABC + \angle ACB = 180^\circ - \angle BAC = 120^\circ$ $BC = 6; AB:AC = 3:1$
 $\Rightarrow \angle COB + \angle OCB = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB) = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ \Rightarrow$
 $\angle BOC = 180^\circ - (\angle COB + \angle OCB) = 120^\circ$

2) $AM \cap BC = X$; по теор. Сим-Сон. $\frac{BX}{XC} = \frac{AB}{AC} = 3:1 \Rightarrow BX = \frac{9}{2}; XC = \frac{3}{2}$

3) $BX \cdot XC = OX \cdot XM \Rightarrow OX \cdot XM = \frac{27}{4}$

4) $\triangle OXC \sim \triangle OXM \Rightarrow \frac{OX}{XM} = \frac{OC}{OM}$

5) по т. син. $2R \sin 120^\circ = BC \Rightarrow R = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$

Пр. 3) Числовый

$$\text{Задача №3} \quad \sqrt{\cos x} + 2\sqrt{-3\sin x} \geq 2\sqrt{\cos x - \sqrt{-3\sin x}}$$

$$\text{Пусть } a = \sqrt{\cos x} \quad b = \sqrt{-3\sin x}$$

$$\text{Кр. пр. выг: } \sqrt{a+2b} \geq 2\sqrt{a-b}$$

$$\begin{cases} a+2b \geq 0 \\ a-b \geq 0 \\ a+2b \geq 4a-4b \\ a, b \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 2b \\ a \geq b \\ -3a \geq -6b \\ a, b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 2b \\ a \geq b \\ a \leq 2b \\ a, b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \in [b; 2b] \\ b \geq 0 \end{cases}$$

Вернемся к x :

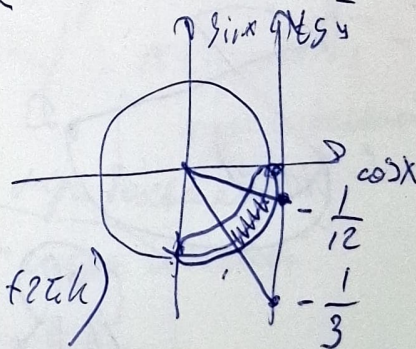
$$\begin{cases} \sqrt{\cos x} \geq \sqrt{-3\sin x} \\ \sqrt{\cos x} \leq 2\sqrt{-3\sin x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \geq -3\sin x \\ \cos x \leq -12\sin x \\ \sin x \leq 0; \cos x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x \geq -\frac{1}{3} \\ \operatorname{tg} x \leq -\frac{1}{12} \\ \cos x \geq 0; \sin x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in [\arctg(-\frac{1}{3}) + 2\pi k;$$

$$(k \in \mathbb{Z}) \arctg(-\frac{1}{12}) + 2\pi k)$$

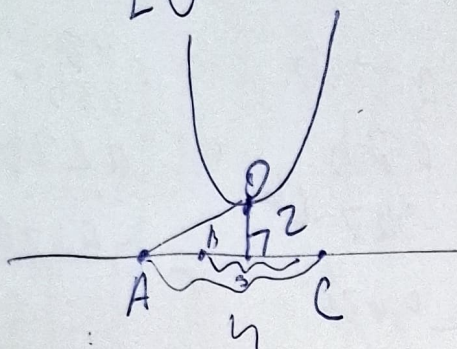
$$\text{или: } x \in [\arctg(-\frac{1}{3}) + 2\pi k; \arctg(-\frac{1}{12}) + 2\pi k] \\ (k \in \mathbb{Z})$$



~~мы $f(x) = |x+1-a| + |4^x - a| \leq 4^x + x + 1$~~

~~$f'(x) = 0$
 $f'(x) = -2 \ln 4 \cdot 4^x + 2$
 $f(x) =$~~

№6



1) Известно, что
трапеция, из которой
кас. к параболу
перпендикулярна
направлению - это
директриса параболы;
т.е. точки A, B, C лежат
на одной прямой.

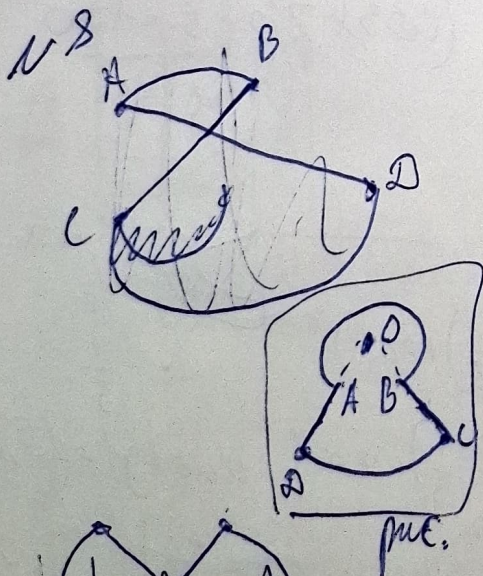
2) В силу. если B ∈ окруж. AC то AB = 4 - 3 = 1

$$S_{OAB} = \frac{4 \cdot 1}{2} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$$

В силу. Если B не лжт. на окруж. AC; AB = 7

$$S_{OAB} = \frac{7 \cdot 2}{2} = 7$$

Ответ: 1 или 7.



1) т.к. BC и AB - кас.
кас. к. ~~направлению~~
Окр.

то пересек. хорды
BC и AB - центр. ОО
дуг (центр. Окр. и др.
содержит.)

2) Замечая, что град.
меры дуг AB и AC дан.
дуга дуга до 360°, т.к.
ит. центр. угол дан. дуг.
дуга до 360°

31-02-16-80

(160.3)

AB (сиротам.)

3) без. осп. одес. пункт радиус дуги AB равен 1

Пусть $AD = BC = \pi(AB) = \pi DC = x$

Тогда из соотношения с котор. $\frac{OA}{OB}$ с центром O

πAB (меньше) переводит в πDC эк.

$$\pi DC = \pi AB \cdot \left(\frac{1+x}{1}\right) = 2\pi - \pi AB (2\pi - \pi AB) \cdot (1+x) =$$

Большая

$$= (2\pi - x) \cdot (1+x)$$

Значит $x = (2\pi - x)(1+x)$

$$x = 2\pi + 2\pi x - x^2 - x^2$$

$$x^2 + 2x - 2\pi x - 2\pi = 0$$

$$D/4 = 1 - 2\pi + \pi^2 + 2\pi = 1 + \pi^2$$

$$x = \pi - 1 + \sqrt{\pi^2 + 1}$$

$$x = \pi - 1 - \sqrt{\pi^2 + 1} < 0 - \text{не подходит}$$

Зн. $\pi - 1 + \sqrt{\pi^2 + 1}$ - мера большой

$$\text{тогда } 2\pi - (\pi - 1 + \sqrt{\pi^2 + 1}) = \pi + 1 - \sqrt{\pi^2 + 1} -$$

мера меньшей

Ответ: $\pi - 1 + \sqrt{\pi^2 + 1}$ - мера большой

$\pi + 1 - \sqrt{\pi^2 + 1}$ - мера меньшей.

Задача 15 Пропустим грани AB , BC и CD на игральной кость, т.е. сущи на прямоугольнике, граней - 7,

Заметим, что всего исходов 4^6 . Из них нам известны только перестановки, где координаты 6!, но из них нам не известны те, в которых некоторые из них перешли в свою клетку, либо в прямоугольнике. Найдём кол-во перестановок в которых нет. Э.т. осн. на месте по формуле ин. ин.

Ак - к-во тех, которые остались на месте.

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6| = |A_1| + \dots + |A_6| - |A_1 A_2| - |A_1 A_3| - \dots$$

$$\dots = 6! - C_6^2 \cdot 4! + C_6^3 \cdot 3! - C_6^4 \cdot 2! + C_6^5 \cdot 1 - 1 =$$

$$= 6! - \frac{6!}{2!} + \frac{6!}{3!} - \frac{6!}{4!} + 6 - 1$$

Стандартные и перестановки, которые переводят числа в пром. темпу:

$$\text{Итого все вероятности: } \frac{6! - 2(6! - \frac{6!}{2} + \frac{6!}{3!} - \frac{6!}{4!} + 5)}{46}$$

$$= \frac{\frac{6!}{3!} - \frac{6!}{4!} + 5}{46} = \frac{120 - 25}{46} = \frac{95}{46}$$

$$\text{Answer: } \frac{95}{46}$$

$$|x+1-a| + |4^x - a| = 4^x - x - 1$$

$$|x+1-a| + |4^x - a| = 4^x - a + (a - x - 1)$$

