



0 992940 230008

99-29-40-23

(158.9)



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 7-8

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников «Ломоносов»

наименование олимпиады

по математике

профиль олимпиады

Андреевой Маргариты Андреевны

фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«13» апреля 2025 года

Подпись участника

МВ

90 (звеньев)

Чистовик

Задарга 7.

Выпрыгает Анг.

Вымывает Аня.
Она должна первым ходом ^{уделяя паронильным}
~~пирог~~ ^{на 3 равные части} ~~разрезать~~ (кусочки по 10×5 см), а ~~дальше~~ ^{разрезанные кусочки} ~~идти~~ ^{идут одну.}
~~ходить~~ так, чтобы сохранить симметричность.
Если в предыдущий ход Вова сделал разрез в куске
из одной ~~половины~~ ^{трети} пирога, то Аня делает такой же
разрез в куске другой ~~половины~~ ^{трети}. Если Вова сдела-
ет симметричные разрезы в одном ~~половинах~~ ^{трети}, то
Аня ничего не берет. Также Аня ест такие
же куски, что и Вова, только из другой ~~половины~~ ^{трети}.

Аня всегда может ходить отскакивающим об-
разом, т.к. если до текущего момента она не
доводила данную стратегию, то и сейчас ^{треть} ~~повышен~~
мира симметричны. Т.е. Аня не может сделать
ход, только и если и Ваня перед этим не сделала
сделала ход $\Rightarrow$ Ваня уже проиграла. Т.е. если
Ваня была кусок мира, то и Аня след. ходом
может съехать кусок, т.е. мир не может закон-
читься после хода Вани. Мир когда то заканчи-
вается, т.е. куки - хотя бы $\frac{1}{100}$ мира $\Rightarrow$ их может 100
 $\Rightarrow$ макс. 100 ходов может быть. Значит, мир закон-
чится, и это произойдет после хода Ани.

Чистовик

2

Задача 2.

Сумма цифр в частном числе чётна, т.е. это сумма двух одинаковых сумм цифр частей числа. Если при увеличении числа на 1 не было перехода через разряд, то разность сумм цифр — 1 (все цифры одинаковые, кроме последней, увеличивающейся на 1). Если был переход, то последняя цифра большего числа — 0, меньшего — 9. 0 не влияет на сумму цифр $\Rightarrow$ в числе ещё мин. 2 цифры, входящие в разные группы. Т.е. наименьшее суперсоставное число хотя бы трёхзначное. Предположим, что оно ровно 3-значное. Тогда:

$$\overline{ab9} + 1 = \overline{cdo}$$

$a+b=9$, иначе $9+a$ или $9+b > 10 > a, b$, и суммы цифр в группах не равны. $a \geq 1 \Rightarrow b \leq 8 \Rightarrow$

~~переход~~ переход через разряд был только в конце $\Rightarrow$

$$a=c, d=b+1$$

$c=d$, т.к. 0 не влияет на сумму, а без учёта 0 других разбиений на группы нет.

$$a=c=d=b+1$$

$$a+b=2b+1=9 \Rightarrow 2b=8 \Rightarrow b=4 \Rightarrow a=5 \Rightarrow c=5 \Rightarrow d=5$$

$$549 + 1 = 550$$

549 — суперсоставное число, а меньше — нет.

Ответ: 549

ЧИСТОВИК

3

При возведении 8 в степень ост. от дел. на 70 записывается:

$$8^1 \equiv_{70} 8$$

$$8^{4k+1} \equiv_{70} 8 \quad \text{для } k \geq 0$$

$$8^2 \equiv_{70} 4$$

$$8^{4k+2} \equiv_{70} 4 \quad \text{для } k \geq 0$$

$$8^3 \equiv_{70} 2$$

$$8^{4k+3} \equiv_{70} 2 \quad \text{для } k \geq 0$$

$$8^4 \equiv_{70} 6$$

$$8^{4k} \equiv_{70} 6 \quad \text{для } k \geq 1$$

$$8^5 = 8^4 \cdot 8 \equiv_{70} 6 \cdot 8 = 48 \equiv_{70} 8 \quad \text{— записывание}$$

Ост. от дел. числа на 4 можно определить по последним двум его цифрам (т.к. $100 \div 4$).

$$2025^1 \equiv_{100} 25$$

$$2025^2 = 2025 \cdot 2025 \equiv_{100} 25 \cdot 25 = 625 \equiv_{100} 25 \Rightarrow$$

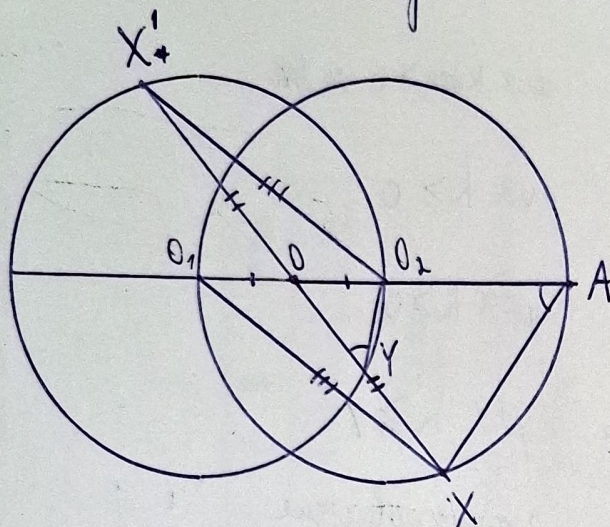
$$2025^x \equiv_{100} 25 \quad \text{для } x \geq 1 \quad \text{всегда}$$

$$100 \div 4 \Rightarrow 2025 \equiv_{4} 25 \equiv_{4} 1 \Rightarrow 8^{(2025 \cdot 2025)} \equiv_{70} 8^1 = 8$$

Это и есть последняя цифра.

Ответ: 8

Задача 4. Нарисуй



Обозначим: O - рас-
положение козы, O_1 -
1-ой пилышки, O_2 -
2-ой пилышки, A -
пересечение OO_2 с осп.,
в пределах которой
пилышки 2-ая пилышка,
отличное от O_1 , X -

Если кода пойдёт к X , то ответ $OX + OY$ правый.
 $OX = OX'$, т.к. это симметричные отрезки в окружностях.
 $OO_1 = OO_2 = r$, т.к. радиус. окр. $/2$. $\angle O_1 OX = \angle O_2 OX'$, т.к. вершины.
 Значит, $\triangle OO_2 X' \cong \triangle OO_1 X \Rightarrow O_1 X = O_2 X' \Rightarrow \angle O_1 A X = \angle O_2 Y X'$, т.к.
 они опираются на равные дуги $\widehat{O_1 X}$ и $\widehat{O_2 X'}$.
 $\triangle OO_2 Y \sim \triangle OXA$, т.к. $\angle O$ - общий, $\angle OY O_2 = \angle OAX \Rightarrow \frac{OY}{OA} = \frac{OO_2}{OX}$
 $\Rightarrow OY \cdot OX = OO_2 \cdot OA = 1 \cdot 3$, т.к. $OA = OO_2 + \text{радиус} = 3$. Если известно
 произведение двух чисел, то из суммы ~~максимальна~~ когда
~~их разность максимальна~~ или больше их разность, тем больше
 их сумма. $OX \text{ всегда } \geq OY \Rightarrow OX \text{ д.б. больше и, очевидно, не превосходит}$
 $OA = 3$, $OY \text{ д.б. мин. и не меньше } OO_2 = 1 \Rightarrow \text{макс. } OX + OY = 3 + 1 = 4$

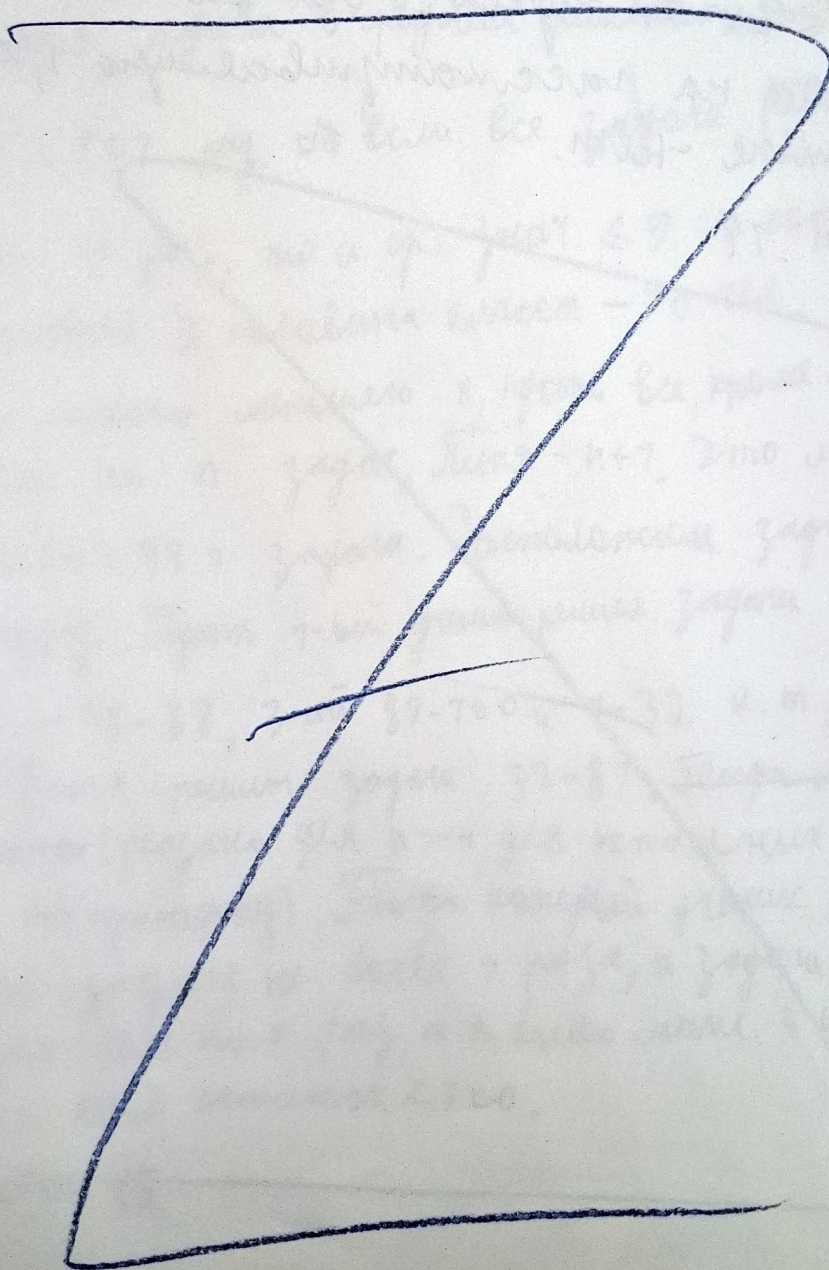
ЧИСТОВИК

5

Задача Ч. Жонис

П.В.К. помывалки симметричны, но на самом деле рассматриваем все варианты точки X , куда может пойти коза. Макс. вел-во достигается, когда O, X, A_1, A_2 на одной прямой, и коза проходит расстояние $OA=3$.

Ответ: в сторону одной из помывалок, 3 м.



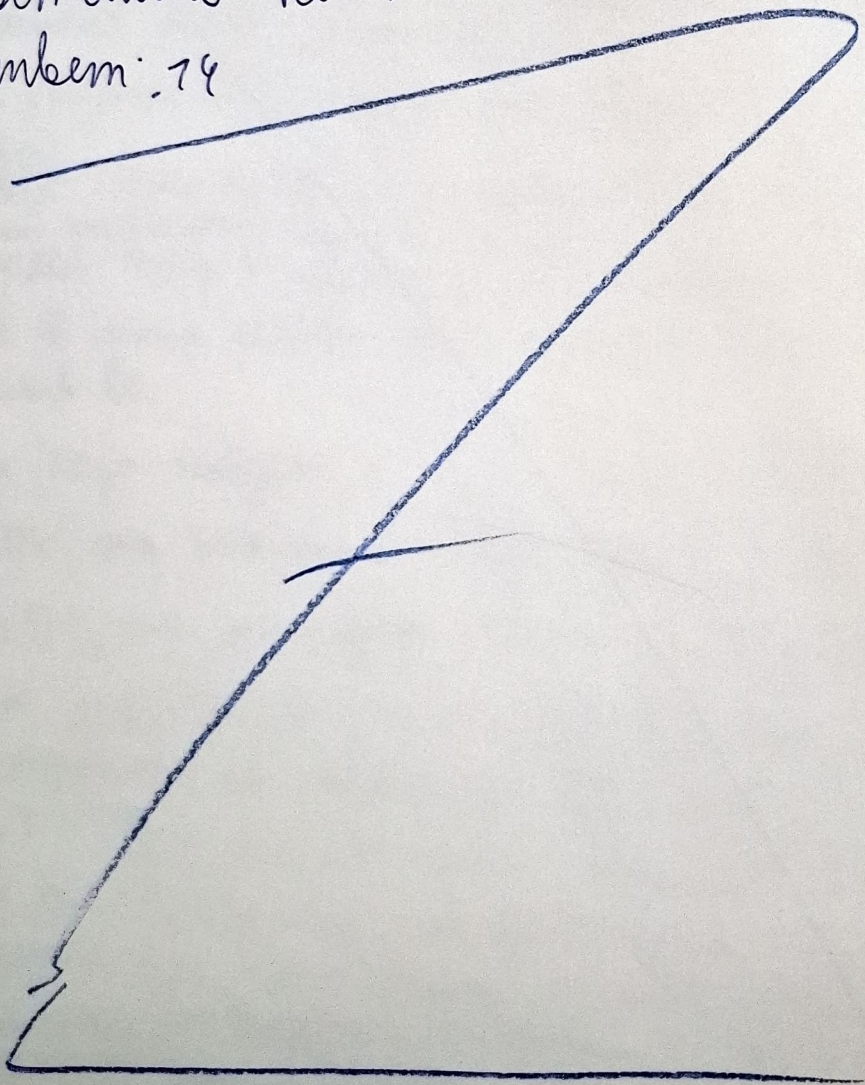
ЧИСТОВИК

6

Задача 5.

Рассмотрим 4 соседние грани кубой грани. На эту грань пукки могли прийтти только с 4-х соседних, а свои пукки утвдзи. 4 соседние грани разбиваются на пары противоположных $\Rightarrow$ на них суммарно $2 \cdot 7 = 14$ пукков, а от все могли прийтти на рассматриваемую грань, а остальные - нет.

Ответ: 14



ЧАСОВОИК

78

Задача 6.

Если $n=45$, то все решили хотя бы по n задач, в.т.ч. и Васа, а Петя решил больше — хотя бы $n+1$ задачу.

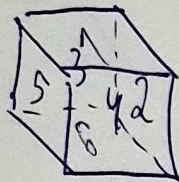
Для $n=45$ примерно задачи были решены $45 \cdot 20 + 1$ хотя бы $45 \cdot 20 + 1 = 901$ раз. Каждая задача в среднем решена хотя бы $\frac{901}{100} = 9,01$ раз. Если все задачи решены не

более 9 раз, то и ср. знач. $\leq 9 \Rightarrow$ есть задача, кот. решили $\geq$ половина класса — 70 чел.

Для любого меньшего n , пусть все, кроме Пети, решили по n задач, Петя — $n+1$. Это макс. $20 \cdot 44 + 1 = 881$ задача. Расположим задачи „по кругу“. Пусть 1-ый ученик решил задачи 1–44, 2-ой — 45–88, 3-ий 89–132 и т.д. Последний, Петя — решил задачи 37–81. Тогда каждый ученик (указано для $n=44$, для остальных n — по тому же принципу). Тогда каждый ученик решил много задачу не более 7 раз, а задачи решены не более чем по 7 раз, т.к. было макс. 9 учеников еще остаток ≤ 700 .

Ответ: 45

ЧЕРНОВИК



$$5+3+2+4=14$$

$$20.50 = 1000$$

20

~~1000/20~~

~~20~~

$$20.49 = 980$$

$$20.40 = 800$$

9,8

8

$$20.45 = 900$$

$$\cancel{20.44 = 880}$$

8,9

9

1 2 3 4 5 1 2 3 4 5
П П П П П Л Л Л Л Л

((((()))))))

1 2 3 4 5 2 3 4 5
П П П П Л П Л Л Л Л

1 2 1 2 3 3 4 5 4 5
П П Л Л П Л П П Л Л

1 2 3 4 1 2 5 3 4 5
П П П П Л Л П Л Л Л

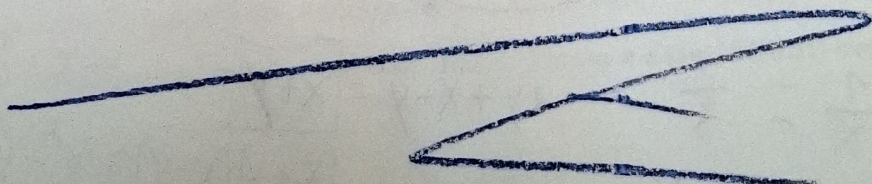
П П П Л

1 2 1 2 3 3 4 5 4 5
Л Л П П Л П П Л Л Л

~~1 2 3 4 5~~
1 1 1 П Л Л П Л П П

~~((((()))))))~~

1 2 3 1 2 4 3 4 5 5
П П П Л П Л Л П Л

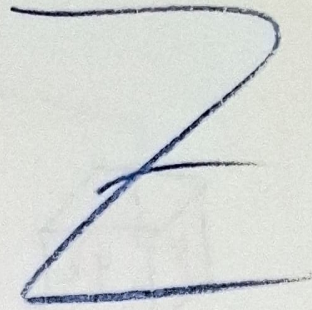
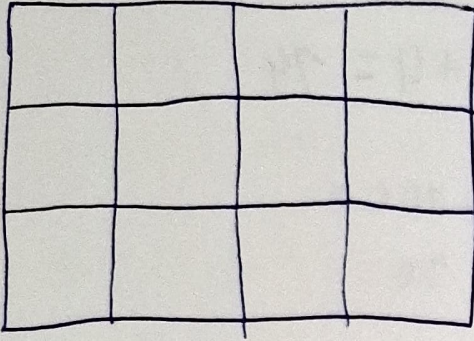


ЧЕРНОВИК

20

A A9

15



~~104~~

~~104~~

109

110

189

190

279

280

369

370

459

460

549 550

8 (2025²⁰²⁵)

~~25~~
~~25~~
~~25~~

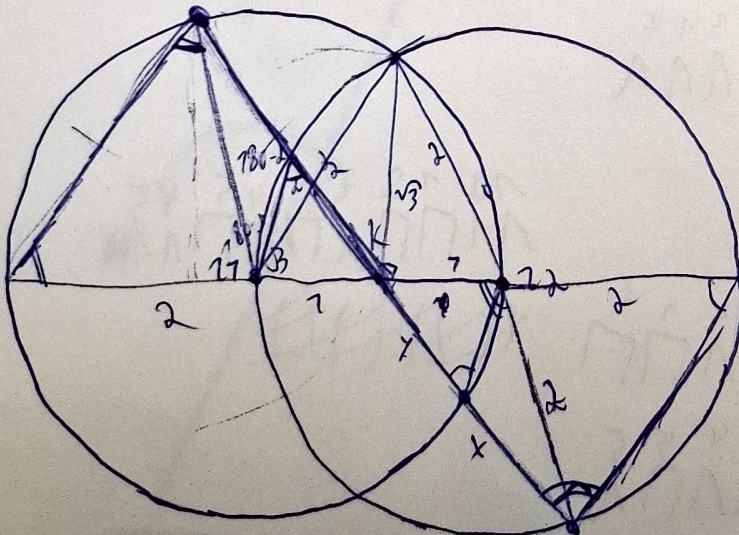
8, 64, 32, 16, 48

2025, 625

$$2^2 = 1^2 + \sqrt{3}^2$$

$$2\sqrt{3}$$

$$2+2=4$$



$$2\sqrt{3} < 4$$

$$\sqrt{3} < 2$$

$$3 < 4$$

$$2\sqrt{3} + 2$$

$$\frac{1}{x} = \frac{y}{3}$$

$$3 = xy$$

$$2y + x - y = \boxed{x+y}$$

$$x = y$$

$$y - x \uparrow$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$