0 161914 820006

16-19-14-82
(162.10)

выход 13-58 – 13-59
+1 +1
замена ручки (т.к. своя кончилась)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант ______________

Место проведения Ульяновск
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Асеева Ивана Михайловича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«13» апреля 2025 года

Подпись участника

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
16-19-14-82	65	+	+	+	∓	+	−	∅	∅

4) неверные корни (2 лишних корня)
6) Неверное решение

Числовик. 65 (шестьдесят пять)

Задача 1.

ОДЗ: $x-2\le 0$

$x\le 2$

$$\sqrt{4x^2-12x+9}+\sqrt{x^2-6x+9}+\left(\sqrt{-(x-2)}\right)^2=\sqrt{3+\sqrt{8}}-\sqrt{3-\sqrt{8}}$$

$$\sqrt{(2x-3)^2}+\sqrt{(x-3)^2}+\left(\sqrt{-(x-2)}\right)^2=\sqrt{3+\sqrt{8}}-\sqrt{3-\sqrt{8}}.$$

1. Сначала поймем, что такое:

$$\sqrt{3+\sqrt{8}}-\sqrt{3-\sqrt{8}}=\sqrt{\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}-\sqrt{3-\sqrt{8}}\right)^2}$$

Мы можем возвести в квадрат и извлечь корень из всего этого выражения, т.к $3+\sqrt{8}>3-\sqrt{8}$.

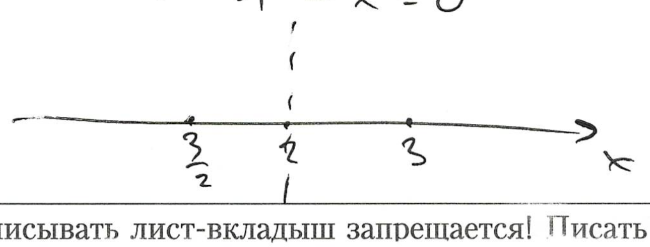
$$\sqrt{\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}-\sqrt{3-\sqrt{8}}\right)^2}=\sqrt{3+\sqrt{8}+3-\sqrt{8}-2\sqrt{(3+\sqrt{8})(3-\sqrt{8})}}$$
$$=\sqrt{6-2\sqrt{9-8}}=\sqrt{4}=\underline{2}.$$

Т.е мы должны решить уровнение:

$$\sqrt{(2x-3)^2}+\sqrt{(x-3)^2}+\left(\sqrt{-(x-2)}\right)^2=2.$$

$$|2x-3|+|x-3|-x+2=2$$

$$|2x-3|+|x-3|-x=0$$



Т.к $x \le 2$, то модуль $|x-3|$ всегда будет раскрываться с минусом.

Тогда нам нужно разобрать два случая:

1) $x \in [\frac{3}{2}; 2]$.

2) $x < \frac{3}{2}$.

1 случай: тогда $|2x-3|$ раскроется с плюсом.

$2x-\cancel{3}-x+\cancel{3}-x=0$

$0=0$.

Т.е все $x \in [\frac{3}{2}; 2]$ — подходят.

2 случай: $x < \frac{3}{2}$.

$3-2x+3-x-x=0$

$4x=6$

$x=\frac{3}{2}$ ✗ (не подходит из-за ограничения.)

Ответ: $x \in [\frac{3}{2}; 2]$.

Чистовик.

16-19-14 2 (162.10)

Черновик!

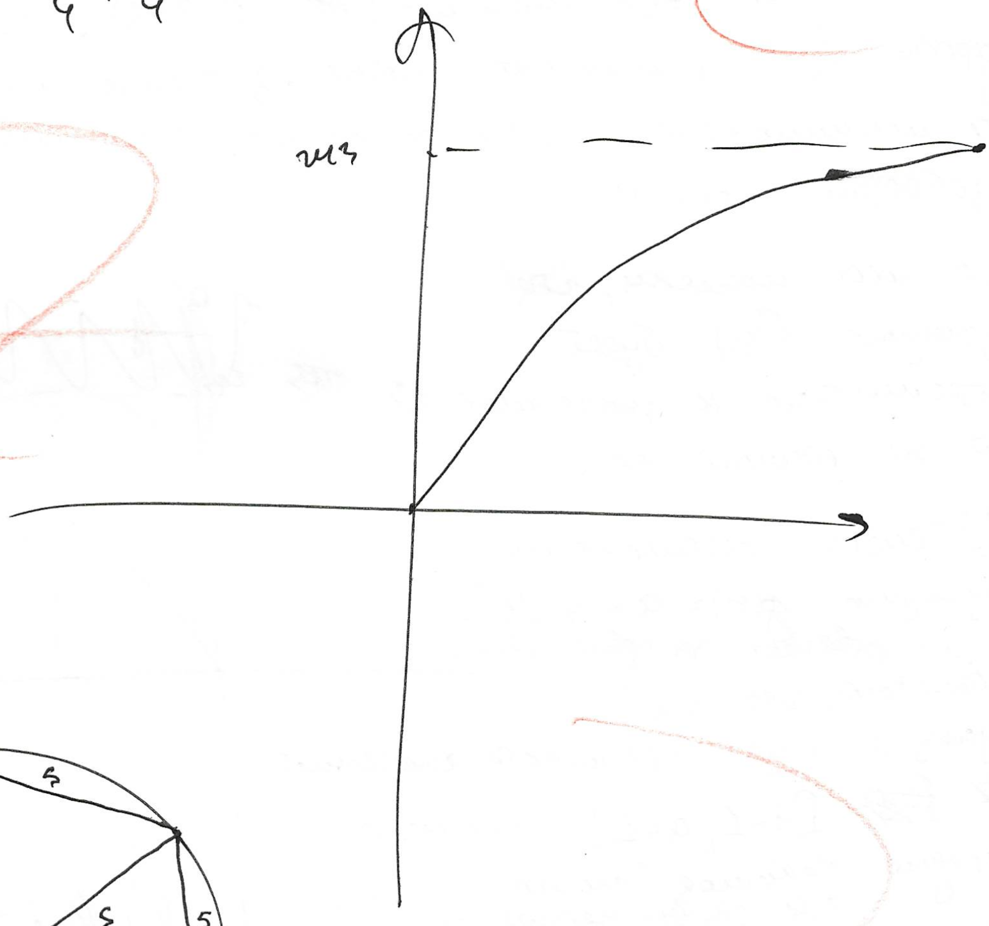
$$\sqrt{(x-5)^2} + \sqrt{(x-3)^2} + \left(\sqrt{-(x-2)^4}\right)^2 = 2$$

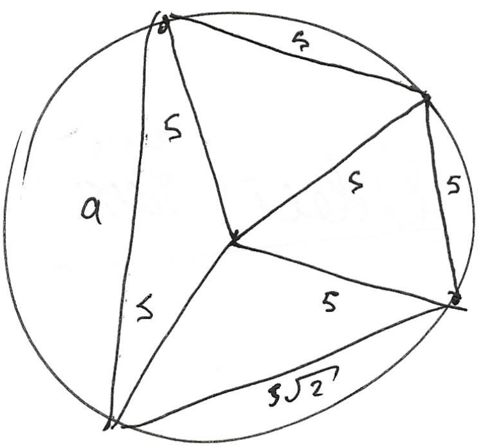
$0 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$

$\frac{7}{4}$

$3^{5-\frac{1}{x}}$

$\cancel{\frac{14}{4}}$ $\frac{1}{2} + \frac{5}{4} + \frac{1}{4}$





Чистовик.

Задача 2.

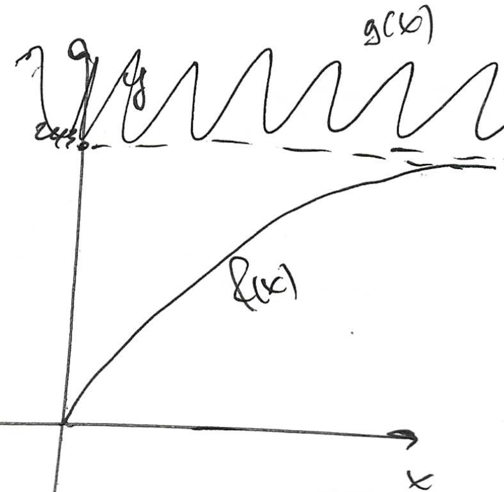
$$3^{5-\frac{1}{x}} \geq a + \sin 4^x$$

min $a>0$, при котором неравенство не имеет решений при $x>0$.

I) Давайте посмотрим на $f(x) = 3^{5-\frac{1}{x}}$ при $x>0$. (затем нарисуем графики).

Понятно, что она монотонно возрастает и принимает все значения: ~~от~~ $(0; 243)$, т.к дробь $\frac{1}{x}$ принимает макс. значение при $x \to 0$, а минимальное при $x \to \infty$. Приблизительно изобразим график!

Т.е мы поняли, что функция $f(x)$ будет стремиться к значению 3^5, ~~243~~ но не достигать его.



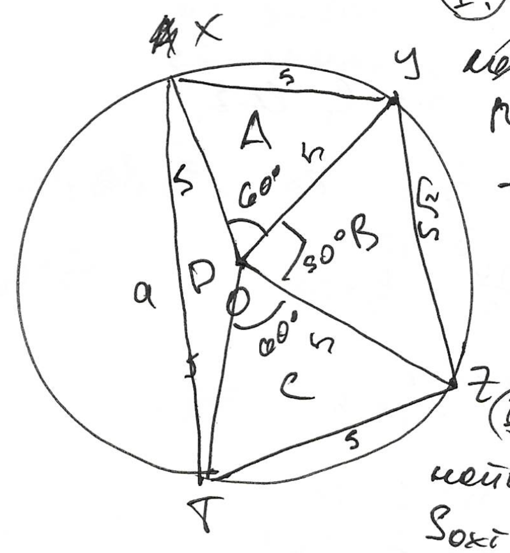
II) Теперь рассмотрим функцию $g(x) = a + \sin 4^x$.
a – отвечает за сдвиг вверх.
Понятно, что эта функция будет принимать значения ~~от~~ $[a-1; a+1]$ сколько угодно большое число раз.
(т.к $\sin y$ – периодическая)
Тогда при $a < 244$, наша функция $g(x)$ будет иметь значение ≤ 243, а это значит, что она обязательно пересечется с $f(x)$, а это не должно быть по условию.
Значит, $a \geq 244$. Заметим, что $a = 244$ нам подходит, т.к значение $g(t): [243; 245]$ а $f(t) \in (0; 243)$.

Ответ: ~~244~~ 244

Задача 3.

Чистовик.

I. ~~Давайте назовем вершины~~



Пусть нам четырехугольник — XYZT, центр окружности: O. Пусть $XY = TZ = 5$
$YZ = 5\sqrt{2}$.
$OX = OY = OZ = OT = 5$.

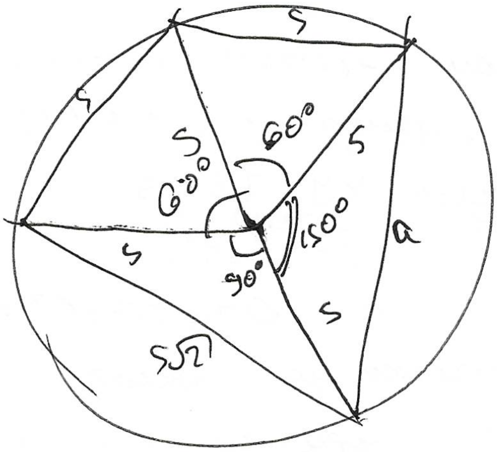
II. Фактически нас просят найти $a = XT$, при котором $S_{OXT} \to max$. Но мы понимаем, что угол $\angle XOT$ — фиксирован, и равен $360 - 60 - 90 - 60 = 150$ (по другому быть не может, т.к. ΔXOY — правильный $\Rightarrow \angle XOY = 60°$; ΔOTZ — правильный $\Rightarrow \angle TOZ = 60°$; $OZ^2 + OY^2 = YZ^2 \Rightarrow \angle YOZ = 90°$). Значит, S_{XYZT} — фиксирована и равна:

$$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \sin 150° + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \sin 60° + \frac{1}{2} \sin 90° \cdot 5 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \sin 60°$$

$$= 12{,}5\left(1 + \sqrt{3} + \frac{1}{2}\right) = 12{,}5\left(\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right).$$

$\boxed{\text{Ответ: } 12{,}5\left(\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right)}$

Черновик:



$3\pi x = \frac{\pi}{2} + \pi l, \ l \in Z.$

$3x = \frac{1}{2} + l, \ l \in Z$

$x = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}l.$

$\frac{3\pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$

$\frac{3x}{2} = \frac{1}{2} + k$

$3x = 1 + 2k$

$x = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}k$

$a^3 - b^3 + c^3 = (a-b+c)^3 = (a-b+c)(a-b+c)(a-b+c).$

$\cancel{a^3} - \cancel{b^3} + \cancel{c^3} = (a^2 - ab + ac - ab + b^2 - bc + c^2 + ca - cb)(a-b+c)$

$= (a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ac)(a-b+c)$

$= \cancel{a^3} - a^2b + a^2c + b^2a - \cancel{b^3} + b^2c + c^2a - c^2b + \cancel{c^3} - 2a^2b + 2ab^2$

$-2abc + 2abc + 2b^2c - 2bc^2 + 2a^2c - 2abc + 2ac^2$

$-3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3b^2c + 3c^2a - 3c^2b - \cancel{2c^2b} - 6abc$

$\Updownarrow$

$(a+b)(a-c)(b-c) = 0.$

$(a^2 - ba - ac + bc)(b-c) = 0$

$a^2b - b^2a - abc + b^2c - a^2c - abc + ac^2 - bc^2 = 0.$

$a^2b - b^2a + b^2c - bc^2 \cancel{-a^2c} + ac^2 - a^2c$

$(a-b)(a-c)(b-c) = 0.$

$(a^2 - ab - ca + bc)(b-c) = 0.$

$a^2b - ab^2 - abc + b^2c$

задача 4.

Черновик!

Пусть $a = \sin\pi x$
$-b = \sin 2\pi x$
$c = \sin 4\pi x$

$a, b, c \in [-1; 1]$.

$a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)^3$

$\cancel{a^3 - b^3 + c^3} = \cancel{a^3 - b^3 + c^3} + 3ab^2 + 3a^2b + 3a^2c + 3b^2c + 3c^2a + 3c^2b + 6abc$

$3a^2b + 3a^2c + 3b^2c \overset{+3a^2c}{} + 3c^2a + 3c^2b + 6abc = 0 \quad | : 3$

$a^2b + ab^2 + bc^2 + b^2c + a^2c + c^2a + 2abc = 0.$

Это условие равносильно!

$(a+b)(b+c)(a+c) = 0$

Давайте раскроем скобки, чтобы это доказать!

$\cancel{(ab - ac - b^2 + bc)(a-c) = 0}$

$\cancel{a^2b - a^2c - b^2a + abc -}$

$(ab + b^2 + ac + bc)(a+c) = a^2b + b^2a + a^2c + abc + abc + b^2c + ac^2 + bc^2$ — это то же самое, что написано сверху.

Тогда:

$(\sin\pi x - \sin 2\pi x)(\sin 4\pi x - \sin 2\pi x)(\sin 4\pi x + \sin\pi x) = 0.$

Пусть $\pi x = t$

$(\sin t - \sin 2t)(\sin 4t - \sin 2t)(\sin 4t + \sin t) = 0$

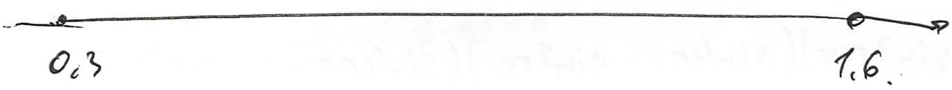
$$\left[\begin{array}{l} \sin 2t - \sin t = 0 \\ \sin 4t - \sin 2t = 0 \\ \sin 4t + \sin t = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{3t}{2} = 0 \\ 2\sin t\cos 3t = 0 \\ 2\sin 2{,}5t\cos 1{,}5t = 0. \end{array}\right.$$

Черновик.

$$\left[\begin{array}{l} \sin\frac{t}{2}=0 \\ \cos\frac{3t}{2}=0 \\ \sin t=0 \\ \cos 3t=0 \\ \sin\frac{5t}{2}=0 \\ \cancel{\cos\frac{3t}{2}=0} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{t}{2}=\pi k,\ k\in Z \\ \frac{3t}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z \\ t=\pi k,\ k\in Z \\ \frac{5t}{2}=\pi k,\ k\in Z \\ 3t=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi x}{2}=\pi k,\ k\in Z \\ \frac{3\pi x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z \\ x=r,\ r\in Z \\ \frac{5\pi x}{2}=\pi m,\ m\in Z \\ 3\pi x=\frac{\pi}{2}+\pi l,\ l\in Z. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cancel{x=2k,\ k\in Z} \\ x=\frac{2}{3}n+\frac{1}{3},\ n\in Z \\ x=r,\ r\in Z \\ x=\frac{2}{5}m,\ m\in Z \\ x=\frac{1}{3}l+\frac{1}{6},\ l\in Z. \end{array}\right.$$

Теперь отберем корни, на нужном нам отрезке:



1) $x=r$: только один корень – 1.

2) $x=\frac{2}{5}m$: шесть: $\frac{2}{5}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{6}{5}$; $\frac{7}{5}$; $\frac{8}{5}$.

3) $x=\frac{1}{3}l+\frac{1}{6}=\frac{2l+1}{6}$: четыре корня ~~пять корней~~: $\frac{1}{2}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{7}{6}$; $\frac{9}{6}$

4) $x=\cancel{\frac{1}{3}l+2}\ \frac{2}{3}n+\frac{1}{3}=\frac{2n+1}{3}$: один ~~два~~ корня: $\frac{1}{3}$ и

их совпадения убираем

$\boxed{\text{Ответ: } 1;\ \frac{2}{5};\ \frac{3}{5};\ \frac{4}{5};\ \frac{6}{5};\ \frac{7}{5};\ \frac{8}{5};\ \frac{1}{2};\ \frac{5}{6};\ \frac{7}{6};\ \frac{9}{6};\ \frac{1}{3}.}$

Черновик:

$x = \cancel{14}; \frac{2}{3}n + \frac{1}{3}; 5; \frac{2}{5}m; \frac{1}{3}l + \frac{1}{6}$

$2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) - a_1(a_1 + a_3)$

$- a_1(a_2 + a_3) - a_2(a_1 + a_2)$

$- a_2(a_2 + a_3) - a_3(a_2 + a_1) - a_2(a_2 + a_3)$

$+ 52 = 0.$

$\frac{2}{5}; \frac{3}{5}; \frac{4}{5}; \frac{6}{5}; \frac{7}{5}; \frac{8}{5}$

a_1^2

$-2a_1a_3 - 2a_2a_3 - 2a_2a_1 + 52 = 0$

$\frac{2l+1}{6} = \frac{k}{5}$

$l = 1, l = 2, l = 3, l = 4, l = 5.$

$\frac{11}{6} > 1.6.$

$3(a_1 + a_2 + a_3) - ?$

$n = 0$

$n = 1$

$n = 2$

$b_2 = a_1 + a_3 \quad b_1 = a_2 + a_2$

$b_3 = a_1 + a_2$

$f_1(x) = (x + a_1)(x^2 + b_1x + 6)$

$f_2(x) = (x + a_2)(x^2 + b_2x + 8)$

$f_3(x) = (x + a_3)(x^2 + b_3x + 12).$

$-a_1 \, u - a_3 \approx x^2 + b_2x + 8$

$-a_1 u - a_2 \approx x^2 + b_3x + 12$

$-a_2 u - a_3 \approx x^2 + b_1x + 6$

$-a_1 -$ ~~10-15 мл~~ 15 - мин.

$a_1^2 - a_1b_2 + \cancel{8} = a_3^2 - a_3b_2 + \cancel{8}$

$3(a_1 + a_2 + a_3) - ?$

$(a_1 - a_3)(a_1 + a_3) - b_2(a_1 - a_3) = 0.$

$a_1 + a_3 = b_2.$

$a_1^2 - a_1b_2 + 8 + a_3^2 - a_3b_2 + 8 + a_1^2 - b_3a_1 + 12 + a_2^2 - b_3a_2 + 12$

$+ a_2^2 - b_1a_2 + 6 + a_3^2 - b_1a_3 + 6 = 2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) - a_1b_2 - a_1b_3 - a_2b_3$

$- a_2b_1 - b_1a_3 + 52 = 0.$

Задача 5.

Чистовик.

$f_1(x) = (x+a_1)(x^2+b_1x+6)$

$f_2(x) = (x+a_2)(x^2+b_2x+8)$

$f_3(x) = (x+a_3)(x^2+b_3x+12)$

$f_1(x) = f_2(x) = f_3(x)\ \forall x.$

$\sum\limits_{i=1}^{3} a_i + \sum\limits_{n=1}^{3} b_n$ — ?

(I) нам дано в условии, что эти функции совпадают (константой они, очевидно быть не могут).

(II) Подставим $x = -a_1$. Тогда $f_1(x) = 0 \Rightarrow f_2(x) = f_3(x) = 0.$

$$\left[\begin{aligned}&(a_2-a_1)(a_1^2-b_2a_1+8)=0 \quad (1)\\ &(a_3-a_1)(a_1^2-b_3a_1+12)=0. \quad (2)\end{aligned}\right.$$

Тогда из первого равенства:

$$\left[\begin{aligned}&a_1=a_2\\ &a_1^2-b_2a_1+8=0\end{aligned}\right.$$

Если $a_1=a_2$, то $6\cdot a_1 = 8\cdot a_1$ (1 и 2 строчки в условии, мы просто вычислим свободный член).

Тогда $a_1=a_2=0 \Rightarrow a_3=0.$

Значит $f_1(x) = x(x^2+b_1x+6)$

$f_2(x) = x(x^2+b_2x+8)$

$f_3(x) = x(x^2+b_3x+12)$

$\cancel{x}(\cancel{x^2}+b_1x+6) = \cancel{x}(\cancel{x^2}+b_2x+8) = \cancel{x}(\cancel{x^2}+b_3x+12)$

$b_1x+6 = b_2x+8 = b_3x+12$

Очевидно, что для любого x это не выполняется, т.к это просто линии на графике, пересекающие ось ординат в точках: 6; 8; 12.

Значит $a_1 \neq a_2$.

Тогда $-a_1$ – корень x^2+b_2x+6 и x^2+b_3x+12

$-a_2$ – корень x^2+b_1x+6 и x^2+b_3x+12

$-a_3$ – корень x^2+b_2x+8 и x^2+b_3x+12.

Значит: ~~$b_2 =$~~ $a_1+a_3=b_2$

$a_2+a_1=b_3$

$a_3+a_2=b_1$

Тогда нам надо найти: $3(a_1+a_2+a_3)$ – ?

Запишем заново наши трёхчлены!

$x^2+(a_1+a_3)x+8=f_2(x)$ – корни $-a_1$ и $-a_3$

$x^2+(a_2+a_3)x+6=f_1(x)$ – корни $-a_2$ и $-a_3$

$x^2+(a_2+a_1)x+12=f_3(x)$ – корни $-a_2$ и $-a_1$.

Мы знаем, что $\begin{cases} a_1a_3=8 \\ a_2a_3=6 \\ a_1a_2=12. \end{cases}$

Пусть $a_1=c$, $a_2=d$, $a_3=e$

$\begin{cases} ce=8 \\ de=6 \\ cd=12. \end{cases}$

~~решение угадывается!~~
~~$c=4, d=3, e=2$.~~

Черновик.

$$\begin{cases} ce=8 \\ de=6 \\ cd=12. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ce=8 \\ \frac{12e}{c}=16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ce=8 \\ 12e=16c \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} ce=8 \\ e=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}c \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\cancel{\tfrac{4}{3}c^2=8} \quad \frac{1}{2}c^2=8$$

$$c^2=16,$$

$$\text{т.к. } c>0. \Downarrow$$

$$c=4$$

Очевидно, что $e=2$

это решение $\Downarrow$

подходит. $d=3.$

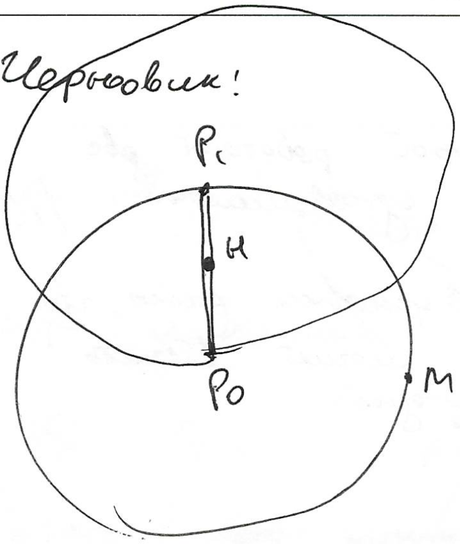
Тогда $3(a_1+a_2+a_3) = 3(4+2+3) = \boxed{27.}$

$\boxed{\text{Ответ: 27.}}$

Чистовик.

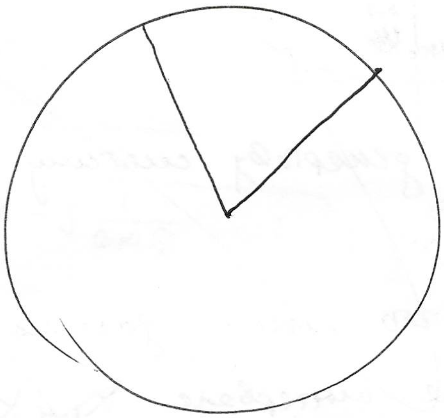
16-19-14-82
(162.1)

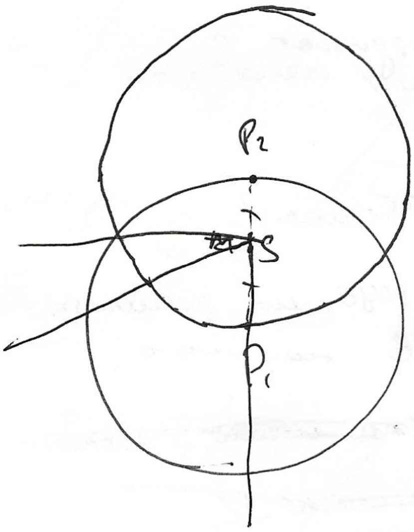
Черновик!



25

$\boxed{15:12.}$

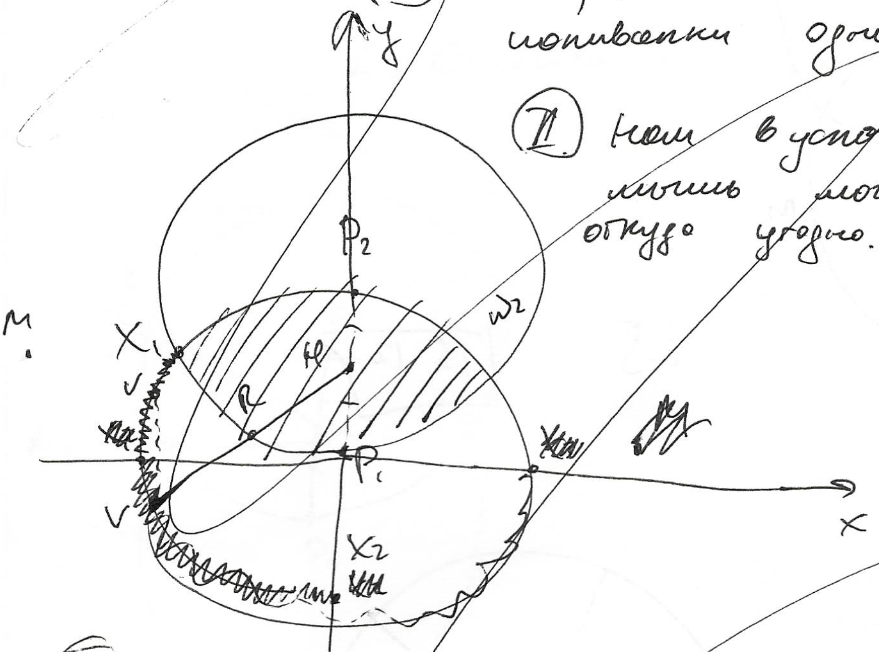




Задача 6.

I. Зона, в которой работают две поливалки одновременно: |||||

II. Нам в условии дано, что мышь может вбегать откуда угодно.



III. Введем декартову систему координат с центром P_1.

IV. Очевидно, что мышь должна „вбегать" в поливалки на интервале X_1 и X_2 (НУО, мы рассматриваем случай, когда мышь входит в нижнюю окружность, т.к радиусы равны) ~~, т.к, если мышь вбегает на интервале~~ $(X_2; X_3)$ ~~, например, в точке V,~~

~~Пусть~~ V. Пусть мышь вбегает в точке V (с координатами $(X; y)$), и напрямую бежит к точке M (с координатами $\left(0; \frac{1}{4+2\sqrt{2}}\right)$. Мы знаем, что $x^2+y^2=\frac{1}{6+4\sqrt{2}}$.

Наше расстояние (минимальное):

$$\sqrt{x^2+\left(y-\frac{1}{4+2\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{x^2+y^2-\frac{y}{2+\sqrt{2}}+\frac{1}{24+8\sqrt{2}}}$$

$\sqrt{5 - \frac{y}{2+\sqrt{2}} + \frac{1}{24+8\sqrt{2}}}$

тогда $y \to$ max. значит, $y_2 = \sqrt{\frac{1}{6+4\sqrt{2}}}$

Ордината равна ординате x_1.

То есть, нам нужно найти

Пусть VM пересекает ω_2 в R.

т.к. $x = -\sqrt{\frac{1}{6+4\sqrt{2}} - y^2}$.

То координаты $V\left(4 - \sqrt{\frac{1}{6+4\sqrt{2}} - y^2};\ y\right)$.

$M\left(0; \frac{1}{4+2\sqrt{2}}\right)$.

Пусть прямая $VM = kx + b$.

$b = \frac{1}{4+2\sqrt{2}}$

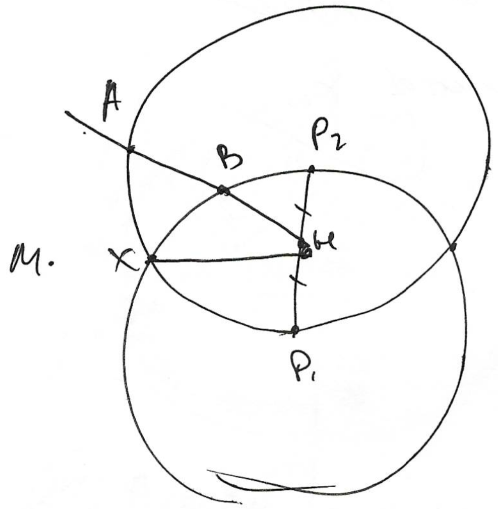
$y = -k\sqrt{\frac{1}{6+4\sqrt{2}} - y^2} + \frac{1}{4+2\sqrt{2}}$

$\frac{y - \frac{1}{4+2\sqrt{2}}}{-\sqrt{\frac{1}{6+4\sqrt{2}} - y^2}} = \boxed{k}$

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Задача 6.

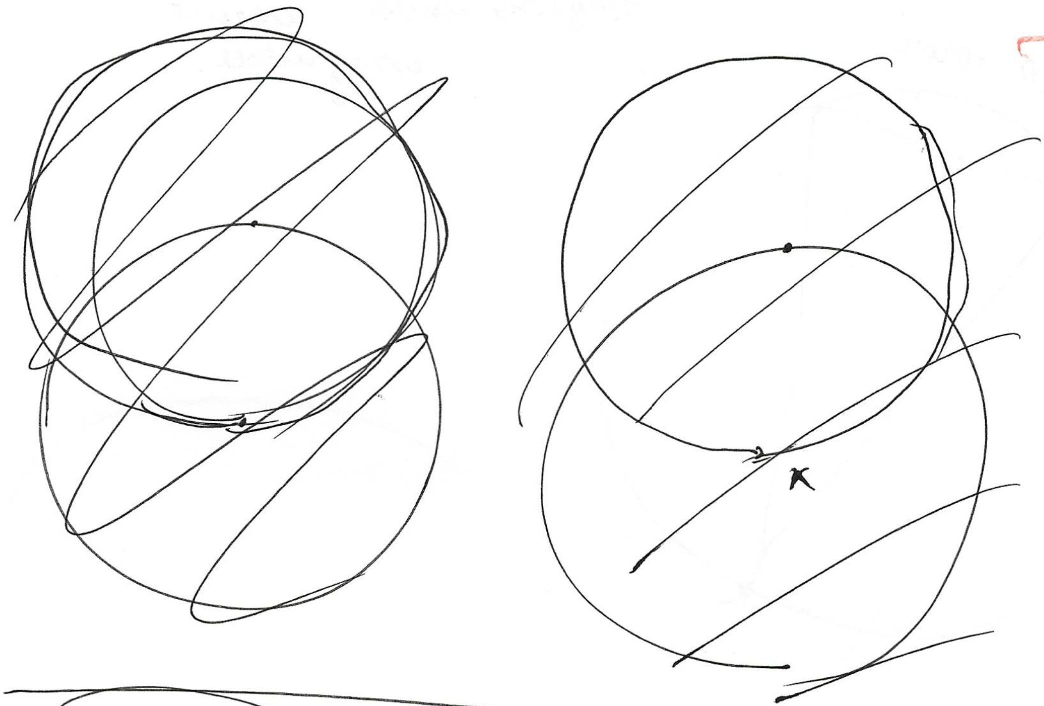
I. Докажем, что при



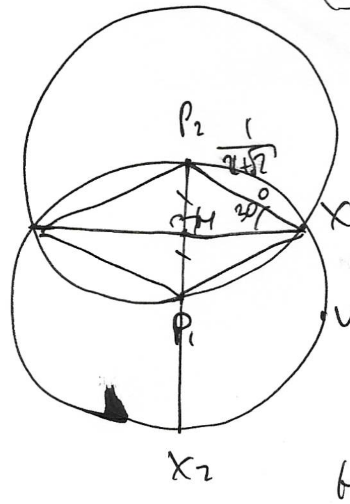
Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

16-19-14-82
(162.10)

~~Задача 6.~~



Задача 6.



(I) Пусть $f(t)$ – обозначает степень ~~от~~ „мокрости" мыши (до н)
t – точка.

Понятно, что $f(x_1) = f(x_2)$.

Т.к. $HX_1 = 2HP_1$.

Мы понимаем, что при $\forall t \in (x_1, x_2)$ – ф-ция ~~убывает~~ возрастает. Значит, искомый путь: HX_1.

$HX_1 = P_2X_1 \cdot \sin 60° = \frac{1}{2+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4+2\sqrt{2}}$.

Итовик.

$\boxed{\text{Ответ: } \frac{\sqrt{3}}{4+2\sqrt{2}}}$

Задача 8.

Сколько попарно неравных треугольников может получиться.

40 точек.