0 315709 300000

31-57-0…30
(162.7)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11

Место проведения Санкт-Петербург
город

Эшифр

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Атрошкина Игоря Александровича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

+1 лист

+1 лист

Дата
«13» апреля 2025 года

Подпись участника

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
31-57-09-30	75	+	+	+	+	+	–	–	–

~~Вариант 75 (семьдесят пять)~~ ~~Демидр~~

Черновик

$$\sqrt{4x^2-12x+9}+\sqrt{x^2-6x+9}+\left(\sqrt{-(x-2)^2}\right)^2=$$

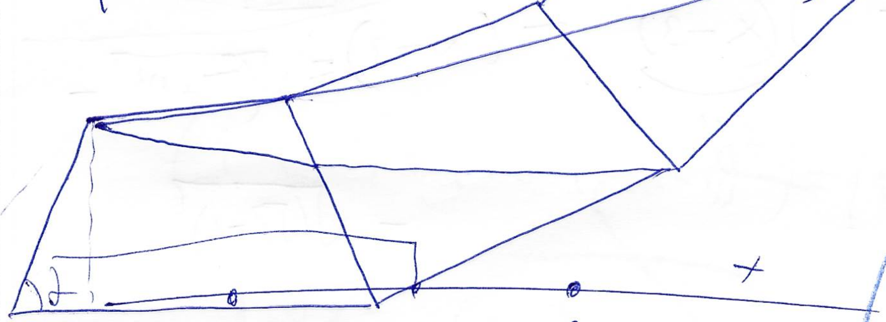
$$=\sqrt{3+\sqrt{8}}-\sqrt{3-\sqrt{8}}$$

$-(x-2)\geq 0$

$x-2\leq 0$

$x\leq 2$

$|2x-3|+|x-3|+-(x-2)$



$\frac{3}{2}$ 2 3 x

$3^{5-\frac{1}{x}}\geq a+4\sin 4^x$

$\frac{1}{x}\in(0;+\infty)$

$x=\frac{1}{5}$

$3^0\geq a+\sin 4^{\frac{1}{5}}$

$3^{5-\frac{1}{x}}<a+\sin 4^x$

$\frac{3^5}{\sqrt[x]{3}}<a+\sin 4^x$

$a_1 16=a_2\cdot 8=a_3\cdot 12.$

$3a_1=4a_2=6a_3$

$\sin^3\pi x\left(1-(2\cos\pi x)^3+2(4\cos 2\pi x\cos\pi x)^3\right)=\sin^3\pi x\left(1-2\cos\pi x+4\cos\pi x\cdot\cos\pi x\right.$

$\sqrt[4]{16}=4$ $\sqrt[4]{16}=2$

$\sin^3\pi x\left(1-(2\cos\pi x)^3+(2\cos\pi x\cdot\sin 2\pi x\ \sin\pi x\cdot\cos\pi x)^3\right.$

Чистовик страница 1 из 12

№1

$$\sqrt{4x^2-12x+9}+\sqrt{x^2-6x+9}+\left(\sqrt{-(x-2)}\right)^2=$$

$$=\sqrt{3+\sqrt{8}}-\sqrt{3-\sqrt{8}}$$

ОДЗ: $-(x-2)\geq 0$

$x-2\leq 0$

$\boxed{x\leq 2}$

$$\underbrace{\sqrt{(2x-3)^2}}_{\geq 0}+\underbrace{\sqrt{(x-3)^2}}_{\geq 0}-(x-2)=\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}-\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases}|2x-3|+|x-3|-(x-2)=(\sqrt{2}+1)-(\sqrt{2}-1)\\ x\leq 2\end{cases}$$

$$|2x-3|+|x-3|-x+2=\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1=2$$

$$\begin{cases}|2x-3|+|x-3|-x=0 \rightarrow \underbrace{|2x-3|+|x-3|}_{\geq 0}=x\\ x\leq 2\end{cases}$$

раскроем модули (точки вскр: $x=\frac{3}{2};3$) $\Rightarrow \underline{x\geq 0}$

1) $\begin{cases}x\in[0;\frac{3}{2}]\\ x\geq 0\end{cases} \Rightarrow x\in[0;\frac{3}{2}]$

$3-2x+3-x-x=0$

$6=4x$

$\underline{x=\frac{3}{2}}$

2) $\begin{cases}x\in[\frac{3}{2};3]\\ x\leq 2\end{cases}$

$\Downarrow$

$x\in[\frac{3}{2};2]$

$2x-3+3-x-x=0$

$0=0$

$\Downarrow$

$\forall x\in[\frac{3}{2};2]$

Ответ: $x\in[\frac{3}{2};2]$

31-57-09-30 (162.7)

Черновик

$\sin^3 \pi x\left(1-(2\cos\pi x)^3+(4\cos\pi x\cdot\cos 2\pi x)^3\right)=$

$\sin^3\pi x\left(1-\underbrace{2\cos\pi x}_{t}+4\cos\pi x\cdot\underbrace{\cos 2\pi x}_{2\cos^2\pi x-1}\right)^3$

$\sin\pi x=0$

$\pi x=\pi k$

$x=k$

$x=1$

$\left(1-(2t)^3+(4t(2t^2-1))^3\right)=\left(1-2t+4t(2t^2-1)\right)^3$

$1-8t^3+(8t^3-4t)^3=\left((1-2t)+(8t^3-4t)\right)^3$

$(1-8t^3)+\cancel{(8t^3-4t)^3}=(1-2t)^3+\cancel{(8t^3-4t)^3}$

$(1-2t)(1+2t+4t^2)$

$+3(1-2t)^2(8t^3-4t)+$

$3(1-2t)(8t^3-4t)^2$

$t=\frac{1}{2}$

$(\underbrace{1-2t+8t^3-4t}_{1-6t+8t^3})^2+(1-2t)(8t^3-4t)$

$1+2t+4t^2=(1-2t)^2+3(1-2t)(8t^3-4t)+$

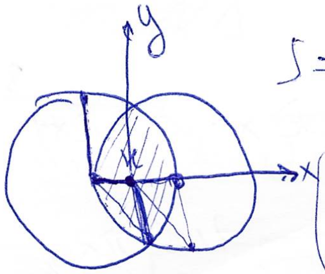
$(8t^3-4t)^2$

$1+2t+4t^2=(1-6t+8t^3)^2+8t^3-4t-16t^4+8t^2$

$16t^4-8t^3-4t^2+6t+1=(1-6t+8t^3)^2$

$8t^3(2t-1)-2t(2t-1)+4t+1$

Черновик



$$S = \pi\left(\frac{1}{2+\sqrt2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2(2+\sqrt2)}\right)^2 =$$

$$\left(\frac{1}{2+\sqrt2} - \frac{1}{2(2+\sqrt2)}\right)\left(\frac{1}{2+\sqrt2} + \frac{1}{(2+\sqrt2)\cdot 2}\right) =$$

$$\frac{1}{2(2+\sqrt2)} \cdot \frac{3}{2(2+\sqrt2)} = \frac{3}{2\cdot 2(2+\sqrt2)^2} =$$

$$\frac{1}{2+\sqrt2} + \frac{1}{2(2+\sqrt2)} = \frac{3}{2(2+\sqrt2)} \quad \frac{1}{2+\sqrt2}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\left(x - \frac{1}{(2+\sqrt2)\cdot 2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{(2+\sqrt2)^2}$$

$f_1(x) = (x+a_1)(x^2+b_1x+6)$ $\quad 6a_1 = 8a_2 = 12a_3$

$f_2(x) = (x+a_2)(x^2+b_2x+8)$ $\quad 6a_1 = 8a_2$

$f_3(x) = (x+a_3)(x^2+b_3x+12)$ $\quad a_1 = a_2$

$b_2 < b_3$

$b_3 < b_1$

$b_1 < b_2$

$f(6) = (6+a_1)(36+6b_1+6)$

$f_1(-a_1) = \cancel{(a_1^2 + a_1b_1+6)} = 0$ $\quad f_1(-a_2)$

$$-\begin{cases} a_1^2 - a_1b_2 + 8 = 0 \\ a_1^2 - a_1b_3 + 12 = 0 \end{cases}$$

$$-\begin{cases} a_2^2 - a_2b_1 + 6 = 0 \\ a_2^2 - b_3a_2 + 12 = 0 \end{cases}$$

$a_2 - b_3a + a_2b_1 + 6 = 0.$

$-a_1b_3 + a_1b_2 + 4 = 0.$

$a_2(b_1 - b_3) = -6$

$b_2 < b_3$

$a_1(b_2 - b_3) = -4.$

$b_3 < b_1$

$b_2 > b_1$

$$f(-a_3) = -\begin{cases} a_3^2 - a_3b_1 + 6 = 0 \\ a_3^2 - a_3b_2 + 8 = 0 \end{cases}$$

$a_3(b_1 - b_2) = -2.$ $\quad -a_3b_2 + a_3b_1 = -2.$

31-57-09-30 (162.7)

Черновик.

$\begin{cases} a_1 + a_3 = -b_2 \\ a_1 a_3 = 8 \end{cases}$ $\begin{cases} a_2 + a_3 = -b_1 \\ a_2 a_3 = 6 \end{cases}$ $\begin{cases} a_1 + a_3 = b_2 \\ a_1 a_3 = 8 \end{cases}$

$\frac{a_1}{a_3} = 2$

$\frac{a_2}{a_3} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

a

$\begin{cases} a_2 + a_3 = b_1 \\ a_2 a_3 = 6 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1 + a_2 = b_3 \\ a_1 a_2 = 12 \end{cases}$

$\begin{cases} a_3 + a_2 = b_1 \\ a_3 a_2 = 6 \end{cases}$ $\begin{cases} a_2 + a_1 = b_3 \\ a_2 a_1 = 12 \end{cases}$ $a_1 + a_3 = b_2$ $a_1 a_3 = 8$. $2a_3^2 = 8$

$\frac{3^5}{\sqrt[x]{3}} = a + \sin 4^x$

t m

$a_3 = 2$

$3^5 = \sqrt[x]{3}a + \sin 4^x \sqrt[x]{3}$

$2(a_1 + a_2 + a_3) = b_1 + b_2 + b_3$ $a_1 = 4$.

$3^5 = \sqrt[x]{3}(a + \sin 4^x)$

b_1

$\begin{cases} \frac{a_1}{a_3} = 2 \\ \frac{a_2}{a_3} = \frac{3}{2} \end{cases}$

$x^2(b_1 + a_1)$

$b_1 + a_1 = -(a_1 + a_2 + a_3)$

$a_1 = 2a_3$

$f_2(-a_2) = 0$

$f_1(-a_2) = 0$.

$b_2 + a_2 = -(a_1 + a_2 + a_3)$

$(a_1 - a_2)(a_2^2 - b_1 a_2 + 6) = 0$ $b_3 + a_3 = -(a_1 + a_2 + a_3)$

$(a_3 - a_2)(a_2^2 - b_3 a_2 + 12) = 0$ $\begin{cases} t + m = -3t \\ 2t = m \end{cases}$

$ax^2 + b_1 x + 6 = 0$

$\begin{cases} m = -4t \\ 2t = m \end{cases}$ $2t = -4t$

$\begin{cases} a_3 + a_2 = b_1 \\ a_3 a_2 = 6 \end{cases}$

$\begin{cases} a_2 + a_1 = b_3 \\ a_2 a_1 = 12 \end{cases}$ $\begin{cases} a_1 + a_3 = b_2 \\ a_1 a_3 = 8 \end{cases}$

$a_1 a_3 = 8$

$a_2 a_3 = 6$

$a_1 a_2 = 12$

$a_1()a$

$a_1(a_2 + a_3) = 20$

$a_2(a_1 + a_3) = 18$ $a_3(a_1 + a_2) = 14$

Чистовик страница 2 из 12

№5

$f_1(x) = (x+a_1)(x^2+b_1x+6)$

$f_2(x) = (x+a_2)(x^2+b_2x+8)$

$f_3(x) = (x+a_3)(x^2+b_3x+12)$

$f_1(0) = f_2(0) = f_3(0)$ по условию

$6a_1 = 8a_2 = 12a_3 \Rightarrow \begin{cases} a_1 \neq a_2 \\ a_1 \neq a_3 \\ a_2 \neq a_3 \end{cases}$ иначе к.у.о. $\begin{cases} a_1 = a_2 \\ 6a_1 = 8a_2 \end{cases}$

$\Downarrow$

$a_1 = a_2 = 0$

но $a_1, a_2 > 0$

$\cancel{\frac{a_1}{a_2}} = a_1 = \frac{8}{6}a_2 = \frac{4}{3}a_2$

$a_1 = 2a_3$

~~подставим~~ $-a_1$

$f_1(-a_1) = f_2(-a_1) = \cancel{f_3(-a_1)}$

$\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{(a_1-a_1)} \cdot (a_1^2 - a_1b_1 + 6) = \underset{\overset{\not\shortparallel}{0}}{(a_2-a_1)}(a_1^2 - b_2a_1 + 8)$

$\Downarrow$

$a_1^2 - b_2a_1 + 8 = 0$

$\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{f_1(-a_1)} = f_3(-a_1)$

$\shortparallel$

$\underset{\overset{\not\shortparallel}{0}}{(a_3-a_1)}(a_1^2 - a_1b_3 + 12)$

$a_1^2 - a_1b_3 + 12 = 0.$

31-57-05 30 (162.7)

Чистовик страница 8 из 12

$$\left[\begin{array}{ll} x = 4x + 1 + 2k & k \in Z \\ 1 - x = 4x + 1 + 2l & l \in Z \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 3x = -2k - 1 \\ 5x = -2l \end{array}\right. \quad k, l \in Z$$

т.к. $k, l \in Z$

$$\left[\begin{array}{l} 3x = 2k - 1 \\ 5x = 2l \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{2}{3}k - \frac{1}{3} \\ x = \frac{2}{5}l \end{array}\right. \quad \cancel{x} \in [0,3; 1,6]$$

1) $\frac{8}{5} \geq \frac{2}{3}k - \frac{1}{3} \geq \frac{3}{10}$

$\frac{2}{3}k \leq \frac{8}{5} + \frac{1}{3} = \frac{24+5}{15} = \frac{29}{15}$

$k \leq \frac{29 \cdot 3}{15 \cdot 2} = \frac{29}{10}$

$\frac{2}{3}k - \frac{1}{3} \geq \frac{3}{10}$

$\frac{2}{3}k \geq \frac{9}{30} + \frac{10}{30} = \frac{19}{30}$

$k \geq \frac{19 \cdot 3}{2 \cdot 30_{10}} = \frac{19}{20}$

$$\left.\begin{array}{l} k \in Z \\ k \in [\frac{19}{20}; \frac{29}{10}] \end{array}\right\} \Rightarrow k = 1; 2$$

$x = \frac{1}{3}; 1$

2) $\frac{8}{5} \geq \frac{2}{5}l \geq \frac{3}{10}$ $| \cdot 5$

$8 \geq 2l \geq \frac{3}{2}$

$$\left\{\begin{array}{l} l \leq 4 \\ l \geq \frac{3}{4} \end{array}\right. \quad l = 1; 2; 3; 4$$

$x = \frac{2}{5}; \frac{4}{5}; \frac{6}{5}; \frac{8}{5}$

Чистовик страница 9 из 12

(3) $\sin 4\pi x = \sin 2\pi x.$

$2\sin 2\pi x \cos 2\pi x = \sin 2\pi x$

$$\left[\begin{array}{l} \sin 2\pi x = 0 \\ \cos 2\pi x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 2\pi x = \pi k, \; k \in Z \\ 2\pi x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi l, \; l \in Z \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{k}{2}, \; k \in Z \\ x = \pm\frac{\cancel{\pi}}{6} + l, \; l \in Z \end{array}\right.$$

$x \in [0{,}3; 1{,}6]$

$x = \frac{1}{2}; \frac{2}{2}; \frac{3}{2}$

$x = \cancel{\pm\frac{\pi}{\pi}} \pm\frac{1}{6} + l$

$1{,}6 \geq \frac{1}{6} + l \geq 0{,}3$

$$\begin{cases} \frac{8}{5} - \frac{1}{6} \geq l \\ l \geq \frac{3}{10} - \frac{1}{6} \\ l \in Z \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{8 \cdot 6 - 5}{30} \geq l \\ l \geq \frac{9-5}{30} \\ l \in Z \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{43}{30} \geq l \\ l \geq \frac{4}{30} \\ l \in Z \end{cases}$$

$l = 1$

$x = \frac{7}{6}$

$\frac{8}{5} \geq -\frac{1}{6} + l \geq 0{,}3$

$$\begin{cases} \frac{8}{5} + \frac{1}{6} \geq l \\ l \geq \frac{3}{10} + \frac{1}{6} \\ l \in Z \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{53}{30} \geq l \\ l \geq \frac{14}{30} \\ l \in Z \end{cases}$$

$l = 1$

$x = \frac{5}{6}$

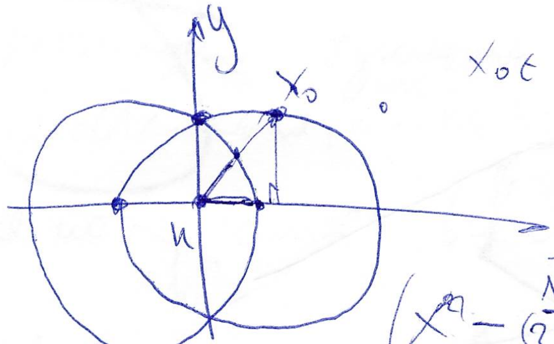
~~Ответ: $x = \{\frac{1}{3}; \frac{3}{5}; \frac{4}{5}\}$~~

Ответ см. на след. стр.

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

31-57-09-30 (162.7)

Черновик



$x_0 \in [0; \frac{3a}{2})$

$\left(x^a - \frac{1}{(2\sqrt{2})^2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2\times\sqrt{2}}\right)^2$

$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = a^2$

$y^2 = \left(a - x + \frac{a}{2}\right)\left(a + x - \frac{a}{2}\right)$

$\left(\frac{3a}{2} - x\right)\left(\frac{a}{2} + x\right)$

$3^{5-\frac{1}{x}} = a + \sin(4^x)$

$y_0^2 = \left(\frac{3a}{2} - x_0\right)\left(\frac{a}{2} + x_0\right)$

$f(x) = 3^{5-\frac{1}{x}} - \sin(4^x)$, $y = \frac{y_0}{x_0}x =$

$f'(x) = \ln 3 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 3^{5-\frac{1}{x}}$ $y^2 = \frac{y_0^2}{x_0^2} \cdot x^2 = \frac{\left(\frac{3a}{2} - x_0\right)\left(\frac{a}{2} + x_0\right)}{x_0^2} \cdot x^2$

$- \cos(4^x) \cdot \ln 4$.

$\ln 3 \frac{3^{5-\frac{1}{x}}}{x^2} = \cos 4^x \ln 4$

$\left(x + \frac{1}{2(2\times\sqrt{2})}\right)^2 + x^2 \frac{\left(\frac{3a}{2} - x_0\right)\left(\frac{a}{2} + x_0\right)}{x_0^2} = a^2$

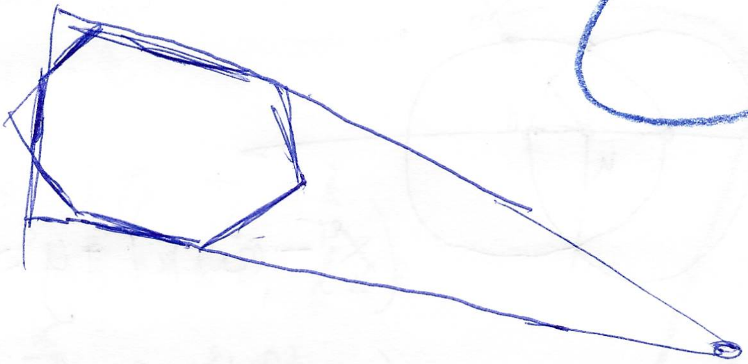
$S = (x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + 2(x^2 + y^2)$

$\frac{1}{x} \downarrow$ $-\frac{1}{x} \uparrow$

$3^{5-\frac{1}{x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 3^5$ max 3^5

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

~~Чистовик страница~~

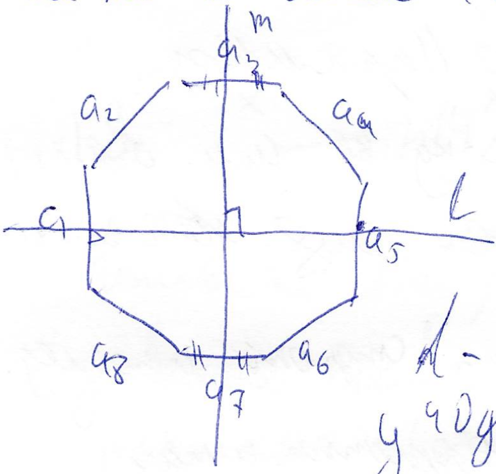


Подписывать лист-вкладыш запрещено! Писать на полях листа-вкладыша запрещено!

Чистовик страница 11 из 12

№8

рассмотрим 8угольник для более простого объяснения, т.к. на 40угольнике работает все то же самое (все оси симметрии и т.д.)



н.у.о. пусть сторона красная. a_1. проведем $l \perp a_1$ и проход. через середину a_1 l - ось симметрии 8угольника и у 40угольника она тоже есть

Если 1я сторона a_4, то 3я и.б. a_5; a_6; a_7, то тогда для конфигурации, например $a_1 a_4 a_7$ => есть симметричная $a_1 a_3 a_6$ => для каждого треугольника найдется (не сим. отн. l) ~~n - 4 симметричны ему, из n-угольник правильный~~, значит ~~мы отмечали~~ 3 симметричен (сим. отн. прямой ⊥ одному из оснований.

Если △ сим. отн. l, то ему будет равный такой, то все его стороны ставятся в соот. сторонам симметричным отн. m.

Чистовик страница 12 из 12

тогда, если мы выбираем прямую остальные, затем выбираем 38 способами вторую сторону не $\parallel$ ей, то 3ю стороны мы выбираем 36 способами, чтобы не было $\parallel$ прямых.

Таким образом, каждому в-ку не симм. отн. ср. пер.-ов к сторонам будет еще ~~40~~ $39 \cdot 2 + 1 = 79$ соотв. полученных симм. отн. 1 стороны и послед. поворотом или только поворотом. и так для каждой из 3х сторон

Чистовик страница 10 из 12

Ответ: $x \in \{\frac{1}{3}; \frac{2}{5}; \frac{1}{2}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}; 1; \frac{6}{5}; \frac{7}{6}; \frac{3}{2}; \frac{8}{5}\}$

№2

$$3^{5-\frac{1}{x}} \geq a + \sin(4^x)$$

$$f(x) = 3^{5-\frac{1}{x}} - \sin(4^x) \geq a$$

чтобы не было решений на $x>0$, то $f(x)<a$

давайте посмотрим чему может равняться $f(x)$, найдем ее max.

$\nearrow 3^{5-\frac{1}{x}}$ $\frac{1}{x} \to 0$

$$\lim_{x \to +\infty} 3^{5-\frac{1}{x}} = 3^5$$

т.к. нер-во не выполняется на всех $x>0$, то и на бесконечности тоже

$-\sin(t)$ функция периодическая $\Rightarrow$

~~при t очень большом~~ при большом t будут такие точки, что $-\sin t = 1$, тогда

~~$f(x)$~~ ~~lim~~ $f(x) < \exists x_0: \sin(4^{x_0}) = -1$ ~~max~~ т.к. т.к. $\begin{cases} 4^x \in [1; +\infty) \\ и\ 4^x \uparrow на\ \mathbb{R} \end{cases}$

$$\left.\begin{aligned} 3^{5-\frac{1}{x}} &< 3^5 \\ -\sin(4^x) &\leq 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 3^{5-\frac{1}{x}} - \sin(4^x) < 3^5 + 1$$

$a = 3^5 + 1$

Ответ: $a = 3^5 + 1$

Черновик.

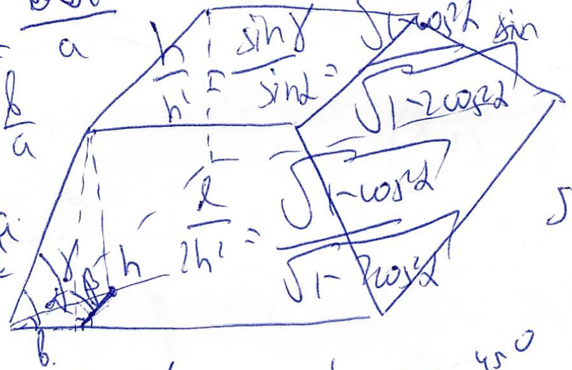
$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$ $\quad \sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}$

$\cos\alpha = \cos\gamma \cdot \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{a^2-h^2}}{a\cdot\sqrt{2}}$

$\cos\gamma = \frac{b\sqrt{2}}{a}$ $\quad \sin\gamma = \sqrt{1-\frac{\sin}{2\cos^2\alpha}}$

$\cos\alpha = \frac{b}{a}$

$\frac{h}{h'} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\sqrt{1-2\cos^2\alpha}}$



$\frac{l}{2h'} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\sqrt{1-2\cos^2\alpha}}$

$\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

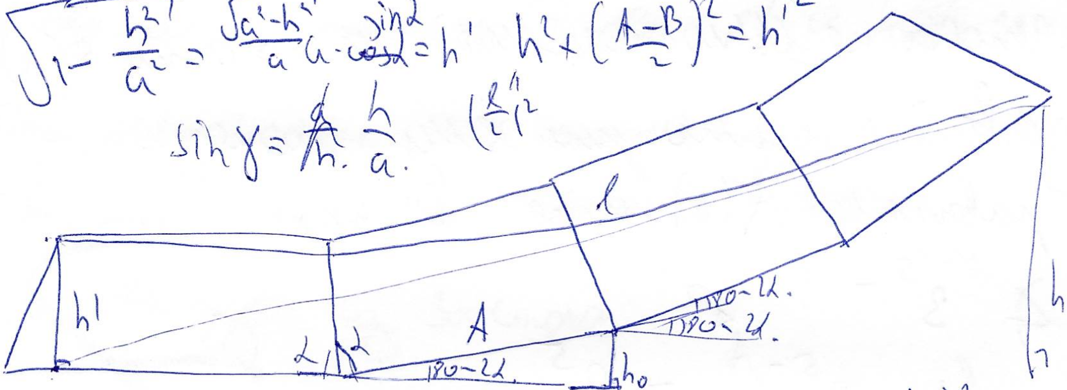
$\frac{\cos^2\gamma}{\cos^2\alpha} = 2.$

$\sin\gamma = \sin\alpha \cdot \sin\beta$, $\quad \sin\alpha = \frac{h}{a}$, $\sin\beta = \frac{h}{h'}$

$\cos\gamma = \cos\alpha \cdot \cos 45^\circ = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}}$ $\quad \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{A-B}{2}\right)^2 + h'^2$

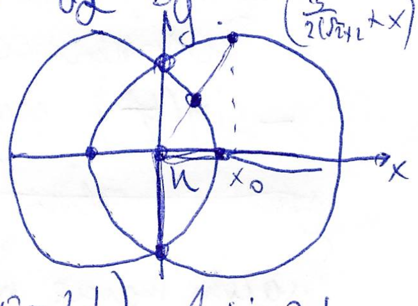
$\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2-h^2}}{a}$ $\quad a\cdot\frac{\sin\alpha}{\cancel{\cos\alpha}} = h'$ $\quad h^2 + \left(\frac{A-B}{2}\right)^2 = h'^2$

$\sin\gamma = \frac{h}{h'}\cdot\frac{h}{a}$ $\quad \left(\frac{l}{2}\right)^2$

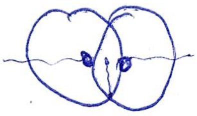


$\cancel{\cos\alpha}\ \cancel{\sin\alpha}\ \cos\alpha.$ $\quad 180-2\alpha$ $\quad \left(x+\frac{1}{(2\sqrt{2})^2}\right)^2 + y = \left(\frac{1}{2+\sqrt{2}}\right)^2$

$\frac{\cancel{\sin\alpha}}{\cancel{\cos\alpha}} = \frac{h}{a}\cdot\sqrt{2}$ $\quad 4\cdot 180 - 8\alpha$ $\quad y^2 = \left(\frac{1}{2+\sqrt{2}} - x - \frac{1}{2(\sqrt{2}+1)}\right)\left(\frac{3}{2(\sqrt{2}+1)}+x\right)$



$h' = h\sqrt{2} = \frac{l}{2}\sqrt{2}$



$h'\sqrt{2}\,k = l$

$h_0 = A\cdot\sin(180-2\alpha) = A\cdot\sin 2\alpha$

$l = A\cdot\cos(180-2\alpha)\cdot 4 + \cos$

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{(a^2-h^2)\cdot 2}}{a}$

$l = 4A\cdot\cos 2\alpha.$

$\sin\alpha = \sqrt{1-\frac{2(a^2-h^2)}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2-2a^2+2h^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{2h^2-a^2}}{\cancel{a^2+2h^2}\ a}$

$l = 4A\cdot\left(2\cdot\frac{(a^2-h^2)}{a^2\cdot 2}\right)$

$\cancel{4A\sin 2\alpha = h'}$

Z

Чистовик страница 3 из 12

$f_1(-a_2) = f_2(-a_2)$

$$\underbrace{(a_1-a_2)}_{\neq 0}(a_2^2 - b_1 a_2 + 6) = (\overset{0}{\cancel{a_2 - a_2}})(\ldots)$$

$\Downarrow$

$a_2^2 - b_1 a_2 + 6 = 0$

аналогично подставляя $-a_3$ и $-a_2$ получим, что кв. трехчлен

1) $x^2 + b_1 x + 6 = 0$

имеет корни $-a_2$ и $-a_3$

$\Downarrow$

по т. Виета.

$\begin{cases} -a_2 - a_3 = -b_1 \\ -a_2 \cdot -a_3 = 6 \end{cases}$ $\begin{cases} a_2 + a_3 = b_1 \\ a_2 a_3 = 6 \end{cases}$

2) $x^2 + b_2 x + 8 = 0$ имеет корни $-a_1$ и $-a_3$

аналогично

$\begin{cases} a_1 a_3 = 8 \\ a_1 + a_3 = b_2 \end{cases} \xrightarrow{a_1 = 2a_3}$ $2a_3^2 = 8$ $\begin{cases} a_3^2 = 4 \\ a_3 > 0 \end{cases} \Rightarrow a_3 = 2$

$a_1 = 2a_3$

$a_1 = 4$

3) $x^2 + b_3 x + 12 = 0$

$\begin{cases} a_1 a_2 = 12 \\ a_1 + a_2 = b_3 \end{cases} \xrightarrow{a_1 = \frac{4}{3} a_2}$

$\frac{4}{3} a_2^2 = 12$

$a_2^2 = 9$

$a_2 > 0$

$\Downarrow$

$a_2 = 3$

$\boxed{\text{Ответ: } 27}$

$a_1 = 4$; $a_2 = 3$; $a_3 = 2$

$a_1 + a_3 = b_2 = 6$ $a_1 + a_2 = b_3 = 7$

$a_2 + a_3 = b_1 = 5$ $a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_2 + b_3 = 4 + 3 + 2 + 5 + 6 + 7 = 27$

Черновик

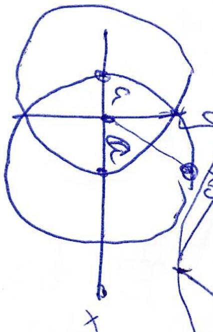
$1,\ \frac{1}{2};\ \frac{2}{2};\ \frac{4}{3};\ \frac{6}{5};\ \frac{8}{5};\ \frac{4}{2};\ \frac{8}{2}$

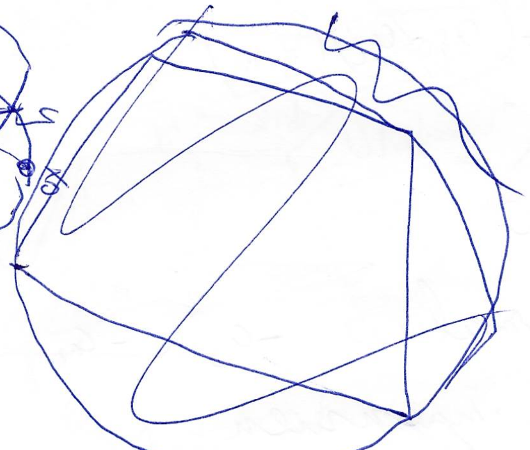
$\frac{7}{6};\ \frac{5}{6}$

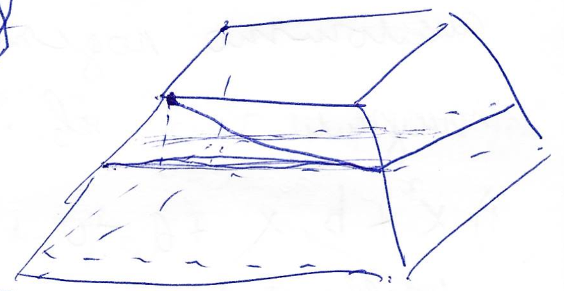
10

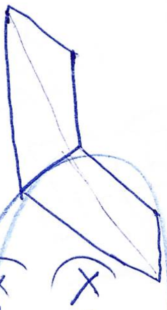
$\frac{1}{3};\ \frac{2}{5};\ \frac{1}{2};\ \frac{4}{5};\ \frac{5}{6};\ 1;\ \frac{6}{5};\ \frac{7}{6};\ \frac{3}{2}$

$\frac{8}{5}$



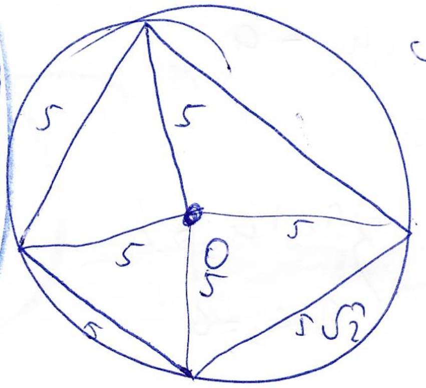


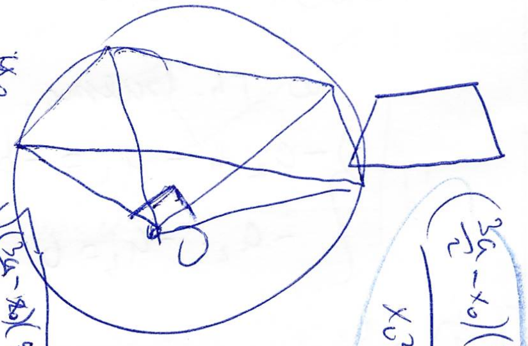




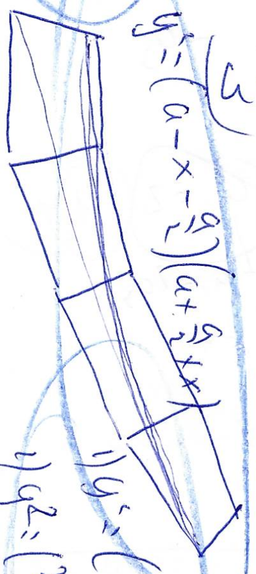
$(x+\frac{a}{2})^2+y^2=\frac{a^2}{2}$

$(x-\frac{a}{2})^2+y^2=c^2$





$y=\frac{x_0}{a}$



$y=(a-x-\frac{a}{2})(a+\frac{a}{2}+x)$

$y^2=(\frac{a}{2}-x)(\frac{3a}{2}+x)$

$y^2=(\frac{3a}{2}-x)(\frac{a}{2}+x)$

$(a+b+c)^3=(a+b)^3+3(a+b)^2c+3c^2(a+b)+c^3$

$3c(a^2+2ab+b^2)$

$a^3+3a^2b+3b^2a+b^3+3ca^2+6abc+3b^2c+$

$3c^2a+3c^2b+c^3=$

$a^3+b^3+c^3+3a^2b+3b^2a+3ca^2+3b^2c+$

$3c^2a+3c^2b+6abc=$

$\cancel{3ab(a+b)}+$

$3ab(\cancel{a+b+c})+3$

$3ab(a+b)+3c^2(a+b)+$

$3ac(a+b)+3bc(a+b)=$

$(a+b)(3ab+3ac+3bc+3c^2)$

$3a(b+c)+3c(b+c)$

$\frac{x_0}{c^2}$

$(\frac{3a}{2}-x_0)(\frac{a}{2}+x_0)$

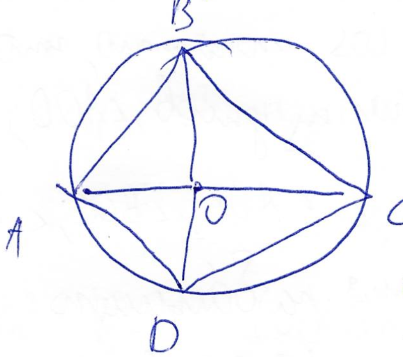
$(\frac{a}{2}-x)(\frac{3a}{2}+x)$

$x_0^2=(\frac{a}{2}-x_0)(\frac{3a}{2}+x_0)$

Чистовик страница 4 из 12

№3

Если O внутри четырехуг-ка $AO = BO = CO = DO = R = 5$



$S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{AOD} + S_{COD} + S_{BOC}$

у нас есть 3 треугольника с со след. сторонами:

1) $5; 5; 5$
2) $5; 5; 5$
3) $5; 5; 5\sqrt{2}$

1. в 1м. и 2м. случае треугольник равносторонний => угол при вершине O равен 60° и их площадь $= \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5\cdot \sin 60^\circ = \frac{25}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{4}$.

2. 3й треугольник прямоугольный, т.к. $5^2 + 5^2 = (5\sqrt{2})^2$ ⇕ угол при вершине O равен 90° и его площадь равна $\frac{5\cdot 5}{2} = \frac{25}{2}$

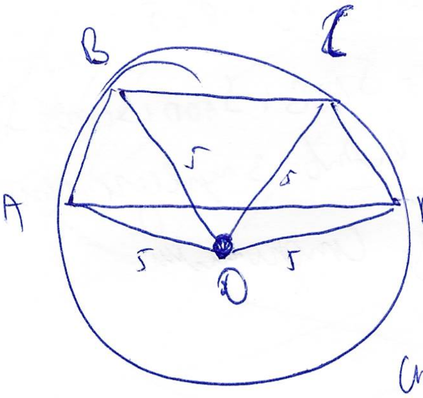
3. на 4й угол при вершине O остается $360^\circ - (90^\circ + 60^\circ + 60^\circ) = 150^\circ$ и у него 2 стороны по 5 => $S = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5\cdot \sin 150^\circ = \frac{25}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{25}{4}$

Общая площадь $\frac{25}{4} + \frac{25\sqrt{3}}{4}\cdot 2 + \frac{25}{2} =$

$\frac{25+50\sqrt{3}+50}{4} = \boxed{\frac{75+50\sqrt{3}}{4}}$

Чистовик страница 5 из 12

Если O не внутри ABCD.



из Th. cos. понятно, что наиб. угол из углов $\angle AOD$; $\angle AOB$; $\angle BOC$; $\angle COD$ опирается на большую сторону, т.к. $AO = BO = CO = DO$.

~~1) Если DA =~~ тогда $DA = 5\sqrt{2}$ или неиз. число,

1) если $DA = 5\sqrt{2}$, тогда $\angle AOD = 90°$ (т.к. $5^2 + 5^2 = (5\sqrt{2})^2$) но тогда какие-то 2 стороны равны по 5 => обр. 2 равносторонних треугольника, к-е у вершины O имеют углы по 60°, которые внутри $\angle AOD = 90°$, но $60° + 60° > 90°$ strano

2) DA = неизв. стороне тогда мы знаем AB; BC; CD и у нас также будет 2 равносторонних треугольника и один прямоугольный и у вершины O будут углы 90°, 60° и 60° => $\angle AOD = 60° + 60° + 90° = 210°$, но тогда O лежит внутри ABCD.

Ответ: $\frac{75 + 50\sqrt{3}}{4}$

Чистовик страница 6 из 12

№ 4

$\sin^3 \pi x - \sin^3(2\pi x) + \sin^3(4\pi x) =$

$= (\sin(\pi x) - \sin(2\pi x) + \sin(4\pi x))^3$

$\exists \sin \pi x = a; -\sin 2\pi x = b; \sin 4\pi x = c$

$\cancel{a^3 + b^3 + c^3} = (a + b + c)^3$

$\cancel{a^3 + b^3 + c^3} + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + 3b^2c + 6abc$

$0 = 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + 3b^2c + 6abc$

~~$3ab(a+b) + 3ac($~~

$3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3abc + 3b^2c + 3abc + 3ac^2 + 3bc^2 = 0 \quad |:3$

$ab(a+b) + ac(a+b) + bc(a+b) + c^2(a+b) = 0.$

$(a+b)(ab + ac + bc + c^2) = 0$

$(a+b)(a(b+c) + c(b+c)) = 0$

$(a+b)(a+c)(b+c) = 0$

имеем:

$$\left[\begin{array}{l} \sin \pi x - \sin 2\pi x = 0 \\ \sin \pi x + \sin 4\pi x = 0 \\ -\sin 2\pi x + \sin 4\pi x = 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \left[\begin{array}{l} \sin \pi x - 2\sin \pi x \cos \pi x = 0 \\ \sin \pi x + \sin 4\pi x = 0 \\ 2\sin 2\pi x \cos 2\pi x - \sin 2\pi x = 0 \end{array}\right.$$

Чистовик страница 7 из 12

1)

$$\sin \pi x (1 - 2\cos \pi x) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin \pi x = 0 \\ \cos \pi x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{ll} \pi x = \pi k & k \in Z \\ \pi x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi l & l \in Z \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{ll} x = k & k \in Z \\ x = \pm \frac{1}{3} + 2l & l \in Z \end{array}\right. \\ x \in [0{,}3; 1{,}6] \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \end{array}\right.$$

$\frac{5}{3} \overset{>}{\vee} 1{,}6$

$\frac{5}{3} \vee \frac{8}{5} \quad | \cdot 15$

$25 \overset{>}{\vee} 24$

$x = \frac{1}{3} + 2n > 1{,}6$ не подх (или $n \in N$)

$x = \pm \frac{1}{3} - 2n$, где $n \in N$ не подх., т.к. x будет < 0

подходит $x = 1$

2) $\sin \pi x + 4\sin 4\pi x = 0$

$\cancel{4 \sin \pi x \cos x\pi \cos 2\pi x}$

$\cancel{a \quad b}$

$\cancel{a(1 + 4b(2b^2 - 1)) = a}$

$\cancel{a(1 + 8b^3 - 4b) = 0}$

$\sin \pi x = -\sin(4\pi x) = \sin(4\pi x + \pi)$

$$\left[\begin{array}{ll} \pi x = 4\pi x + \pi + 2\pi k & k \in Z \\ \pi - \pi x = 4\pi x + \pi + 2\pi l & l \in Z \end{array}\right.$$