



45-07-78-44
(161.32)



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

вход 13:20-13:23

Вариант 11 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Баженовой Маргариты Анатольевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«13» апрель 2025 года

Подпись участника

[illegible]

45-07-78-44
(161.32)

Исходные

65 (шестьдесят пять)

Крещени

11

$$\sqrt{4x^2 - 12x + 9} + \sqrt{9x^2 - 12x + 4} - (\sqrt{x-1})^2 = \sqrt{6+\sqrt{20}} - \sqrt{6-\sqrt{20}}$$

$$4x^2 - 12x + 9 = (2x-3)^2; \quad 9x^2 - 12x + 4 = (3x-2)^2;$$

$$6+\sqrt{20} = (1+\sqrt{5})^2; \quad (6-\sqrt{20}) = (1-\sqrt{5})^2$$

Тогда:

$$\begin{cases} |2x-3| + |3x-2| - (x-1) = 1+\sqrt{5} - (\sqrt{5}-1) \\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |2x-3| + |3x-2| - x + 1 = 2 & (\text{Замечая, что } 3x-2 \geq 0, \text{ при } x \geq \frac{2}{3}, \text{ а } x \text{ уже удовлетворяет } x \geq 1) \\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$(\star): |2x-3| + 2x-3 = 0$$

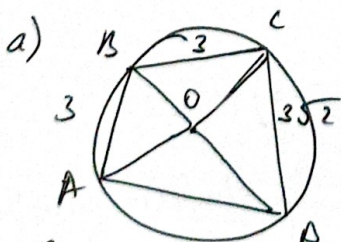
$$\text{При } x \geq \frac{3}{2}: 2x-3+2x-3=0 \\ x = \frac{3}{2}$$

$$\text{При } x < \frac{3}{2}: 3-2x+2x-3=0 \\ 0=0$$

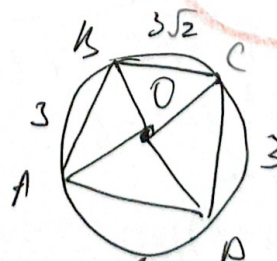
$$\begin{cases} x \in (-\infty; \frac{3}{2}] \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [1; \frac{3}{2}]$$

$$\text{Ответ: } [1; \frac{3}{2}]$$

13



б)



Рассмотрим два возможных варианта расположения сторон в четырехугольнике: а) $AB=3=BC$, $CD=3\sqrt{2}$

Чистовик

2) $AB=CD=3$
 $BC=3\sqrt{3}$; Пусть O - центр описанной окружности
 четырехугольника $ABCD$
 Тогда $OA=OB=OC=OD=3$

1) ΔBOA и ΔBOC - равносторонние: $\angle BOA = \angle BOC = 60^\circ$
 $(AB=BC=OA=OB=OC=3)$

2) ΔCOD - равнобедренный: $\angle COD = 120^\circ$, $CD=3\sqrt{3}$

3) Заметим, что $\sqrt{CO^2 + OD^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2} = CD$
 $\Rightarrow$ по обратной теореме Пифагора: ΔCOD - прямоугольный,
 $\angle COD = 90^\circ$

4) Тогда $\angle AOD = 360 - 60 - 60 - 90 = 150^\circ$; ΔAOD - равнобедренный

5) По формуле косинусов: $AD =$

$$S_{ABCO} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{DOA} = \frac{3^2 \sqrt{3}}{4} \cdot 2 + \frac{3 \cdot 3}{2} + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \sin 150^\circ =$$

$$= \frac{9\sqrt{3}}{2} + \frac{9}{2} + \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \left(\sqrt{3} + \frac{3}{2} \right)$$

6) Аналогично: $\angle AOB = 60^\circ = \angle BOC$ $\Rightarrow \angle DOA = 150^\circ$
 $\angle BOC = 90^\circ$

Тогда площадь будет такой же:

$$S_{ABCO} = \frac{9}{2} \left(\sqrt{3} + \frac{3}{2} \right)$$

Итого

$$\sin^3(\pi x) + \sin^3(2\pi x) - \sin^3(4\pi x) = (\sin(\pi x) + \sin(2\pi x) - \sin(4\pi x))^3$$

Обозначим $\sin(\pi x) = a$, $\sin(2\pi x) = b$; $\sin(4\pi x) = c$

$$a^3 + b^3 - c^3 = (a+b-c)^3$$

$$(b-c)(b^2+bc+c^2) = (a+b-c)^3 - a^3$$

$$(b-c)(b^2+bc+c^2) =$$

$$a^3 + b^3 - c^3 = a^3 + a^2(b-c) + a(b-c)^2 + (b^3 + bc^2 - b^2c - c^3)$$

$$0 = a^2(b-c) + a(b-c)^2 + bc(c-b)$$

$$(b-c)(a^2 + a(b-c) - bc) = 0$$

$$(b-c)(a(a+b) + (-c)(a+b)) = 0$$

$$(b-c)(a-c)(a+b) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} b=c \\ a=c \\ a=-b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(\pi x) = \sin(4\pi x) \\ \sin(2\pi x) = \sin(4\pi x) \\ \sin(\pi x) = -\sin(2\pi x) \end{cases}$$

45-07-78-44
(161.32)

Условия

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{5\pi x}{2}\right) = 0 \\ \sin(\pi x) \cos(3\pi x) = 0 \\ \sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{5\pi x}{2}\right) = 0 \\ \sin(\pi x) = 0 \\ \cos(3\pi x) = 0 \\ \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3\pi x}{2} = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{5\pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \pi x = \pi m, m \in \mathbb{Z} \\ 3\pi x = \frac{\pi}{2} + \pi q, q \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi d, d \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2n}{3}, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{1}{5} + \frac{2k}{5}, k \in \mathbb{Z} \\ x = m, m \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{1}{6} + \frac{q}{3}, q \in \mathbb{Z} \\ x = 1 + 2d, d \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

проверить где каждое имеет корни

По условию нужно отобрать $x \in [0, 3; 1, 8]$ Тогда подпадают: $\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{3}{5}; 1; \frac{7}{5}; 1, 8; \frac{1}{2}; \frac{5}{6}; \frac{1}{6}; 1, 5;$ Ответ: $\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; 0, 6; 1; 1, 4; 1, 8; 0, 5; \frac{5}{6}; \frac{7}{6}; 1, 5.$

Задача 2

 $4^{5-\frac{1}{x}} \geq a + \sin 2^x$ не имеет ни одного решения $x > 0$ (1) Значит, $4^{5-\frac{1}{x}} < a + \sin 2^x$ - выполняется для ~~любого~~ ^{всех} $x > 0$ (2) При $x \rightarrow +\infty$: $4^{5-\frac{1}{x}}$ будет стремиться к $4^5 = 1024$.Утверждение (1) означает, что график функции $f(x) = 4^{5-\frac{1}{x}}$ лежит всегда ниже, чем график функции $g(x) = a + \sin 2^x$ (Для $x > 0$) ↑ Вспомогательное из утверждения (2) следует, что минимальное значение $g(x)$ должно быть больше 1024 (т.к. функция $g(x)$ - периодична, то есть за определенный период достигнет как максимума, так и минимума, того $f(x) \approx 1024$), а для $f(x)$

Возраст $f(x)$:

при $x \in \mathbb{R}$:

Это верно, т.к. $f(x)$ при $x > 0$ возрастает, ~~и~~ стремится достигнуть 1024. Минимальное значение $y = \ln 2^x$ это 0.

Взяв: $4^{5-\frac{1}{x}} < 1024 \leq a \Rightarrow a \geq 1024$. Взяв минимальное значение a , при котором $4^{5-\frac{1}{x}} \geq a + \ln 2^x$ не имеет ни одного решения $x > 0$: $a = 1024$

ответ: 1024

15

$$f_1(x) = (x+a_1)(x^2+b_1x+12)$$

При $x = -a_1$: $f_1(-a_1) = 0$. По условию: $f_1(-a_1) = f_2(-a_1) = f_3(-a_1) = 0$

$$\text{Тогда: } (a_2 - a_1)(a_1^2 - b_2a_1 + 18) = 0$$

$$\begin{cases} a_2 = a_1 \text{ (1)} \\ a_1^2 - b_2a_1 + 18 = 0 \end{cases}$$

Предположим, что верно (1): Взяв:

$$f_1(x) = f_2(x) \text{ - выполняется при всех действительных } x$$

$$(x+a_1)(x^2+b_1x+12) = (x+a_2)(x^2+b_2x+18)$$

$$(x+a_1)((b_2-b_1)x+6) = 0$$

Но при $x=0$: $a_1(6) = 0, \Rightarrow a_1 = a_2 = 0$.

~~Но если при любых действительных x $f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = 0$, то~~

$$\text{Взяв } f_3(-a_1) = f_3(0) = 0$$

$$a_3 \cdot 24 = 0, a_3 = 0.$$

$$\text{Функции имеют вид: } \begin{aligned} f_1(x) &= x(x^2+b_1x+12) \\ f_2(x) &= x(x^2+b_2x+18) \\ f_3(x) &= x(x^2+b_3x+24) \end{aligned}$$

$$f_1(x) = f_2(x)$$

$$x(x^2 + b_1x + 12) = x(x^2 + b_2x + 18)$$

Условие

$$x((b_2 - b_1)x + 6) = 0$$

$$\text{при } x \neq 0: b_2 - b_1 = -6$$

$$x = 0$$

$$x = \frac{-6}{b_2 - b_1}$$

уравнение имеет два решения, но не
таким образом верно при любых действительных
x.

$$\Rightarrow a_1 \neq a_2 \neq a_3 \text{ и } a_1^2 - a_1 b_2 + 12 = 0$$

рассуждая аналогично для $f_2(-a_3)$, $f_3(-a_2)$, $f_1(-a_3)$, $f_1(-a_2)$, $f_3(-a_1)$, получаем, что:

$$x_1 = -a_1 \text{ и } x_2 = -a_2 - \text{ корни } x^2 + b_3x + 24 = 0 (*)$$

$$x_3 = -a_1 \text{ и } x_4 = -a_3 - \text{ корни } x^2 + b_2x + 18 = 0 (**)$$

$$x_5 = -a_2 \text{ и } x_6 = -a_3 - \text{ корни } x^2 + b_1x + 12 = 0 (***)$$

по теореме Виета:

$$\text{для } (*): x_1 + x_2 = -b_3 \text{ и } x_1 \cdot x_2 = 24$$

$$a_1 + a_2 = b_3 \text{ и } a_1 \cdot a_2 = 24$$

$$\text{для } (**): x_3 + x_4 = -b_2 \text{ и } x_3 \cdot x_4 = 18$$

$$a_1 + a_3 = b_2 \text{ и } a_1 \cdot a_3 = 18$$

$$\text{для } (***): x_5 + x_6 = -b_1 \text{ и } x_5 \cdot x_6 = 12$$

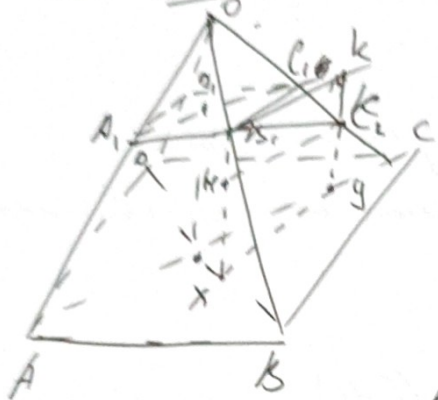
$$a_2 + a_3 = b_1 \text{ и } a_2 \cdot a_3 = 12$$

$$\text{Тогда: } \begin{cases} a_1 \cdot a_2 = 24 \\ a_2 \cdot a_3 = 12 \\ a_1 \cdot a_3 = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3}{a_1 \cdot a_3} = \frac{24 \cdot 12}{18} \\ a_2 = 4 \\ a_1 = 6 \\ a_3 = 3 \end{cases}$$

$$a_1, a_2 \text{ и } a_3 - \text{ числа положительные} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 4 \\ a_1 = 6 \\ a_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 9 \\ b_2 = 9 \\ b_3 = 10 \end{cases}$$

$$\text{Тогда } a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_2 + b_3 = 6 + 3 + 4 + 9 + 9 + 10 = 39$$

Ответ: ~~39~~ 39

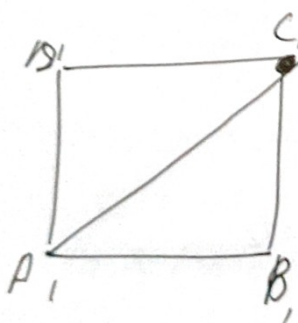


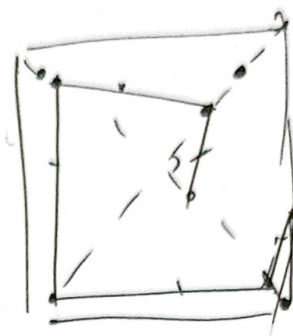
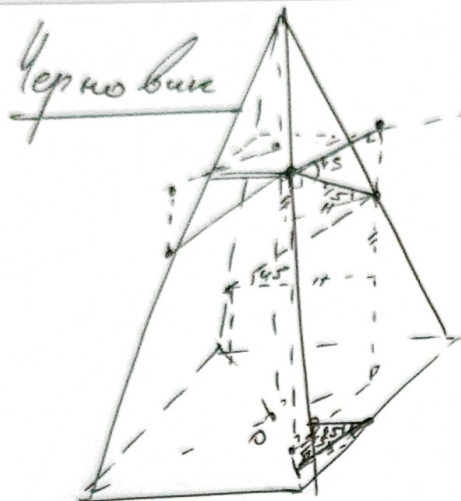
$ABCD$ $A_1B_1C_1D_1$ — усеченная пирамида
 Пусть она вынесена из π . В, и казан
 айти по графи ($ABSC$), B_1C_2 — первый
 отрезок ломаной пути. Пусть h
 перпендикуляр из B_1 на $ABSC$
 ($ABSC$); $B_1X \perp (ABSC)$, $X \in BD$

* $C_2 Y \perp (ABC)$, $Y \in AC$ (т.е. пирамида правильная)

$$C_2H = xy \sim C_2H \parallel xy$$

По условию: $\angle MC_2B_1 = 45^\circ \Rightarrow MC_2 = B_1M$ (треугольник MC_2B_1 равнобедренный)
 Отрезков MC_2 и B_1M будет верто, ~~то есть~~ ~~сумма~~ ~~их~~ проекции
 длины проекции MC_2 на (ABC) равна высоте
 усеченной пирамиды. Пусть $(MC_2) \cap AC_1 = K$:





15 Черновик

$$f_1(x) = f_2(x)$$

$$(x+a_1)(x^2+b_1x+12) = (x+a_2)(x^2+b_2x+18)$$

$$f_1(x) = 0 = (x+a_1)(x^2+b_1x+12)$$

$$\begin{cases} x = -a_1 \\ x^2+b_1x+12=0 \end{cases}$$

$$f_2(-a_1) = 0 = (-a_1+a_2)(+a_1^2-a_1b_2+18)$$

$$1) a_2 = a_1$$

$$b_1x+12 = b_2x+18$$

$$x(b_2-b_1)+6=0$$

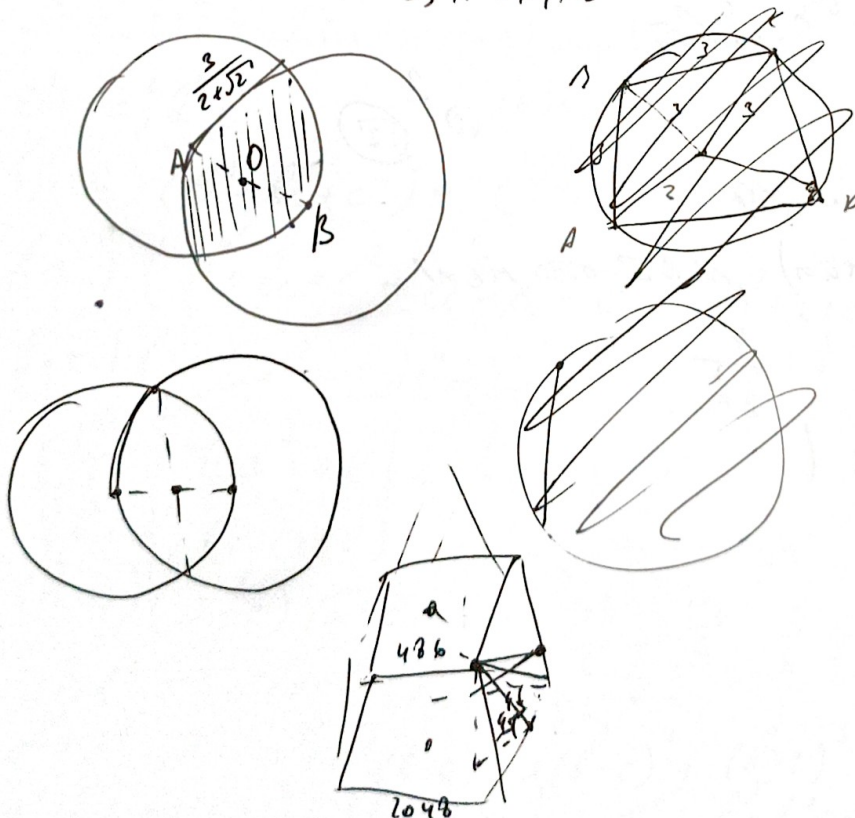
~~Но~~ Но при $x=0$: Не верно

$$\Rightarrow 2) a_1^2 - a_1b_2 + 18 = 0$$

Но г. всегда:

$$\cancel{x} (x-x_1)(x-x_2) = 0$$

$$x^2 - (x_1+x_2)x + x_1x_2 = 0$$



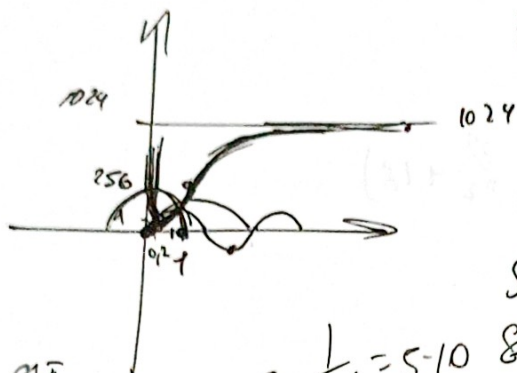
Перновик

$$y^{5-\frac{1}{x}} \quad \text{At } x \rightarrow +\infty : f(x) \rightarrow y^5$$

$$x \rightarrow +0^+ : f(x) \rightarrow 0$$

$$y^{5-\infty} \approx y^{-\infty} = \frac{1}{y^\infty} \rightarrow 0$$

$$\frac{5/2}{\frac{4}{11}} \sqrt[2]{256}$$



$$\sin^2 \frac{2x}{2\pi}$$

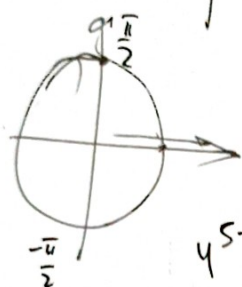
$$\sin 2^x = 0 \quad 2^x = \pi n, n \in \mathbb{N}$$

$$x = \log_2 \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$5 - \frac{1}{0.1} = 5 - 10$$

$$5 - \frac{1}{0.2} = 5 - \frac{10}{2} = 5 - 5 = 0$$

$$5 - \frac{1}{10}$$



$$y^{5-\frac{1}{x}} < a + \sin 2^x \quad \text{при } x > 0$$

тогда

$$1024 < a + \sin 2^x$$

$$[0, 1] - f(x) = y^{5-\frac{1}{x}} - \text{возраст}$$

$$[1, +\infty) - f(x) = y^{5-\frac{1}{x}} - y^{\text{убывает}}$$

$$\sin 2^x$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq 2^x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq x \leq \log_2 \left(\frac{\pi}{2} + \pi n \right), n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{y^5}{2^{\frac{1}{x}}}$$

$$x()$$

$$x()$$

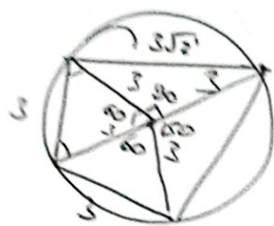
$$x()$$

$$x()$$

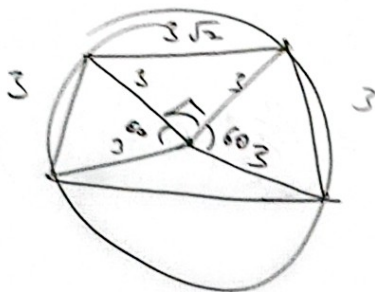
$$\sqrt[2]{\sqrt[3]{3}}$$



Черновик



$$\begin{array}{r} 560 - 120 - 90 = 150 \\ -120 \\ +240 \\ 90 \\ \hline 150 \end{array}$$



$$\sin^3(\pi x) + \sin^3(2\pi x) - \sin^3(4\pi x) = (\sin^3 \pi x + \sin^3(2\pi x) - \sin^3(4\pi x))^3$$

$$0 = \sin^2(\pi x) \sin(2\pi x) + \sin^2(2\pi x) \sin(4\pi x) - \sin^2(4\pi x) \sin(8\pi x)$$

$$\sin(2\pi x) \cdot \sin(4\pi x) = \sin(2\pi x) (\sin^2 \pi x)$$

$$\frac{8 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4}{8 \cdot 2} = 16$$

~~$\sin^2 \pi x$~~

$$0 = \sin^2 \pi x \cdot (\sin(2\pi x) - \sin(4\pi x)) + \sin^2 \pi x \cdot$$

~~a^3, b^3, c^3~~

$$(a+b+c)^3$$

$$(b-c)(b^2+bc+c^2) = (b-c)((a+b+c)^2 + (a+b-c)a + a^2)$$

$$(b-c)(b^2+bc+c^2 - a^2 - b^2 - c^2 - 2ab + 2ac + 2bc - a^3 - ab + ac - a^2)$$

$$(b-c)(-3a^2 - 3ab + 2ac + 3bc) = 0$$

$$(b-c)(a^2 + ab - ac - bc) = 0$$

$$(b-c)(a(a+b) - c(a+b)) = 0$$

$$(b-c)(a-c)(a+b) = 0$$

$$a^3 + b^3 - c^3 = (a+b-c)^3$$

$$a^3 + b^3 - c^3 = a^3 + a^2(b-c) + a(b-c)^2 + (b-c)^3$$

$$a^2(b-c) + a(b-c)^2 + bc(b-c)$$

$$\frac{10/6}{6/9/8} = \frac{40}{40} = 1$$

$$1 - 0,18 = 0,823^{12}$$

$$\frac{5}{5} = 1$$

$$\frac{8}{5} + \frac{1}{5} = \frac{9}{5}$$

$$\frac{1+4}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{1+6}{6} = \frac{7}{6}$$

$$\frac{1+10}{6} = \frac{11}{6}$$

$$\frac{1+14}{6} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{1+18}{6} = \frac{19}{6}$$

$$\frac{1+22}{6} = \frac{23}{6}$$

Черновик

255

$$|2x-3| + |3x-2| - (x-1) = \sqrt{(1+\sqrt{5})^2} - \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}$$

$x \geq 1$

$$|2x-3| + |3x-2| - (x-1) = 1 + \sqrt{5} - \sqrt{5} + 1$$

$$|2x-3| + |3x-2| - x + 1 = 1$$

$x \geq 0$ при

$$2x-3 \geq 0$$

$$x \geq \frac{3}{2}$$

$$3x-2 \geq 0$$

$$x \geq \frac{2}{3} \text{ - верно}$$

$$2 \cdot \frac{3^2 \sqrt{3}}{42} + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} + \frac{3 \cdot 3}{2} =$$

$$= \frac{9\sqrt{3} + 9}{2} = \frac{9}{2}(\sqrt{3} + 1 + \frac{1}{2})$$

$$|2x-3| + 3x-2 - x = 1$$

$$|2x-3| + 2x-3 = 0$$

$$2x-3 \geq 0:$$

$$2x-3 + 2x-3 = 0$$

$$4x-6=0$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$$2x-3 < 0:$$

$0=0$ - все решения

$$x \in [1; 1.5]$$

221

$$4^{5-\frac{1}{x}} \geq a \cdot e^{\ln 2 \cdot x}$$

$$0 \leq \leq 1$$

$$x > 0$$



$$2^{10-\frac{2}{x}} \leq 1$$

При $x > 0$: $f(x) = 4^{5-\frac{1}{x}}$

$$f(x) \geq 1$$

$$5 - \frac{1}{x} \geq 0$$

$$4^{-\infty} \rightarrow$$

$$4^{5-\frac{1}{x}} \geq a \cdot e^{\ln 2 \cdot x}$$

не имеет при $x > 0$, то

$$4^{5-\frac{1}{x}} < a \cdot e^{\ln 2 \cdot x} \text{ имеет при } x > 0.$$

$$x \rightarrow +\infty: f(x) \rightarrow 4^5 = 2^{10} = 1024$$

$$x \rightarrow 0: f(x) \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow -\infty: f(x) \rightarrow 4^5$$

$$x \rightarrow -\infty:$$

