30-28-54-99
(161.8)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

выход 13:34-13:36

Вариант 11 класс

+1 лист

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Банюка Севастьяна Игоревича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
30-28-54-99 (161.8)		+	+.	+	∓	+	−	∓	−

30-28-54-99
(161.8)

70 (семидесят) 82 (Рочев) (Нальчев)

Чистовик: №1

$$\sqrt{4x^2+12x+9}+\sqrt{9x^2+12x+4}-\left(\sqrt{-(x+1)}\right)^2=$$

$$=\sqrt{7+\sqrt{24}}-\sqrt{7-\sqrt{24}} \longrightarrow (\sqrt6-1)^2$$

$$(\sqrt6+1)^2$$

$$\begin{cases}|2x+3|+|3x+2|-(-(x+1)) = \cancel{1+\sqrt6-} \\ x+1\le 0\end{cases}$$

$1+\sqrt6-$
$-(\sqrt6-1)$

т.к при $x\le -1$ $3x+2\le 0$, то:

$$\begin{cases}x\le -1\\ |2x+3| - 3x - 2 + x + 1 = 2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\le -1\\ |2x+3| - 2x - 3 = 0\end{cases}$$

$\boxed{1}$ $x\in\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]$, то $\Leftrightarrow$

$-2x-3-2x-3=0 \Leftrightarrow$ $x=-3/2$

$\boxed{2}$ $x\in\left[-\frac{3}{2},-1\right]$, то $\Leftrightarrow$

$2x+3-2x-3=0 \Leftrightarrow$ верно $\forall x\in$ промежутку

Ответ: $\left[-\frac{3}{2},-1\right]$

№2

$$2^{5-\frac{1}{x}} \ge a+\sin 2^x;\ \min a^{>0}:\ \text{нет р-й } x>0$$

$f=2^{5-\frac{1}{x}}$, f – это возраст. ф-я

$g=\sin 2^x$, g – это периодич. ф-я.

~~Причём на промежутке от 0 до $\frac{\pi}{2}$ f возрастает. Поэтому для выполнения н-ва достаточно, чтобы когда $2^x \le \frac{\pi}{2}$~~

Чистовик

№2 Продолж.

Однако ясно, что $2^{5-\frac{1}{x}} < 2^5$

т.к $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$. Чтобы не имелось ни одного р-я $x > 0$

$\Leftrightarrow$ $a + \sin 2^x > 2^{5-\frac{1}{x}}$. Ясно, что

$\exists$-т достаточно большой x_0:

$\sin 2^{x_0} = -1$, $2^{5-\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to x_0]{} 2^5$!

А значит min значение a – это

$2^5 + 1 = 33$. $\boxed{\text{Ответ: } 33}$

№3

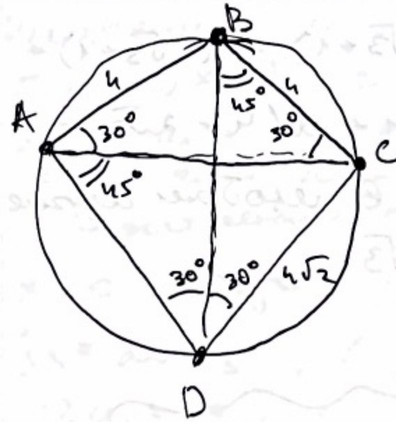
Т.к конфигурации м.б разные рас-м случаи: $\boxed{1}$ когда 4, 4 – соседние. $\boxed{2}$ когда 4, 4 – противолеж

~~из Т. синусов для~~

$\boxed{1}$ Пусть $AB = BC = 4$; $CD = 4\sqrt{2}$

из Т. синусов $\angle CDB = \angle BDA = 30^\circ$

30-28-54-99
(161.8)



(т.к $\frac{BC}{\sin\angle CBD} = 2R = 8$ и т.д)

Аналогично $\angle CBD = 45^\circ$

~~Тогда [ABCD]~~

~~[ABC] + [ABD]~~

Тогда $\angle B = 180^\circ - \angle D = 120^\circ$

$\Rightarrow$ $\angle ABD = 75^\circ$

А значит $\frac{AD}{\sin 75^\circ} = 8$. Найдём

$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} =$

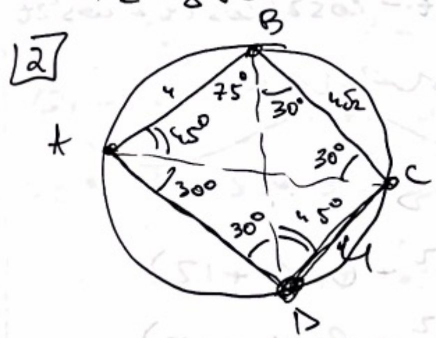
$= \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$. Тогда $S_{ABC} = \frac{4\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} =$

$= 4\sqrt{3}$; $S_{ADC} = \frac{4\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}(1+\sqrt{3})\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} =$

$= 4\sqrt{3}(\sqrt{3}+1) = 12 + 4\sqrt{3} \Rightarrow S_{ABCD} =$

$= 12 + 8\sqrt{3}$

$\boxed{2}$



Пусть $AB = CD = 4$

$BC = 4\sqrt{2}$

Расставим углы (см рис)

Тогда ABCD – р/б трап.

$\angle ABD = 75^\circ$ $\Rightarrow$

$AD = 2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$

Тогда $S_{ABCD} = \frac{4\sqrt{2} + 2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2} \cdot \underbrace{4\cdot\sin 75^\circ}_{\text{высота}}$

Листовки:

$= (2\sqrt{2} + \sqrt{2}(\sqrt{3}+1)) \cdot \sqrt{2}(\sqrt{3}+1) = 4(\sqrt{3}+1) +$

$+ 2(\sqrt{3}+1)^2 = 4\sqrt{3} + 4 + 2(4 + 2\sqrt{3}) =$

$= 12 + 8\sqrt{3}$. Т.е в любом случае

площадь $= 12 + 8\sqrt{3}$

Ответ: $12 + 8\sqrt{3}$

№4

Замена $t = \pi x$. Тогда:

$\cos^3 t - \cos^3 2t + \cos^3 4t = (\cos t - \cos 2t + \cos 4t)^3$

$(\cos t + \cos 4t)(\cos^2 t - \cos t \cos 4t + \cos^2 4t) =$

$= (\cos t + \cos 4t)((\cos t - \cos 2t + \cos 4t)^2 -$

$- \cos 2t(\cos t - \cos 2t + \cos 4t) + \cos^2 2t)$

$\Updownarrow$

$\left[\begin{array}{l} \cos t + \cos 4t = 0 \quad (1) \\ \cos^2 t - \cos t \cos 4t + \cos^2 4t = (\cos t - \cos 2t + \cos 4t)^2 - \cos 2t \cos t + \cos^2 2t - \cos 2t \cos 4t + \cos^2 2t \end{array}\right.$

Черновик

(1): ~~cos t + 2cos² 2t ...~~

№5

Листовки

$f_1 = (x + a_1)(x^2 + b_1 x + 12)$

$f_2 = (x + a_2)(x^2 + b_2 x + 15)$

$f_3 = (x + a_3)(x^2 + b_3 x + 20)$

30-28-54-99
(161.8)

Листовки №5 продолж.

Т.к $\forall x \in \mathbb{R}$ $f_1 = f_2 = f_3$, а по Т.

Безу мн-н n-ой степени имеет не более чем n корней, то $f_1 \equiv f_2 \equiv f_3$

(тождественно равны). Подставим

$x = 0$, тогда $f_1 = 12a_1$; $f_2 = 15a_2$

$f_3 = 20a_3$; $f_1 = f_2 = f_3 \Rightarrow$

$12a_1 = 15a_2 = 20a_3$. Ясно, что

f_1 обязательно имеет корень $-a_1$

$f_2 - (-a_2)$; $f_3 - (-a_3)$. Поэтому

т.к они тождественно равны, то

~~всех~~ корни совпадают. Если какие

то два из тройки $\{-a_1, -a_2, -a_3\}$

равны, то $a_1 = a_2 = a_3 = 0 \Rightarrow$ противор. с условием

$a_2 = \frac{4}{5}a_1$; $a_3 = \frac{3}{5}a_1$. Тогда

$x^2 + b_1 x + 12 = (x + \frac{3}{5}a_1)(x + \frac{4}{5}a_1)$

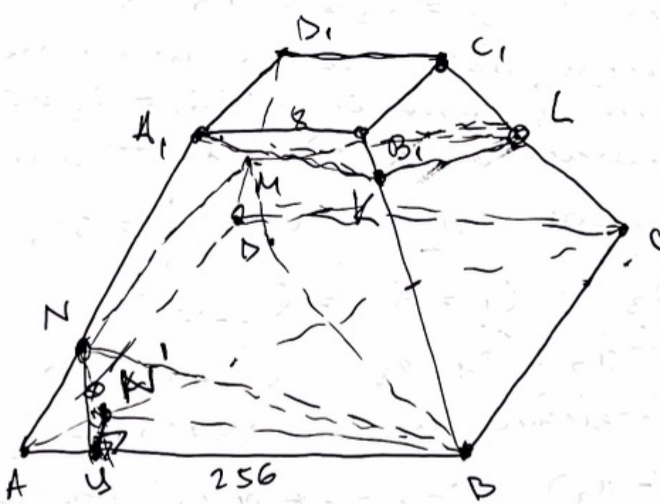
$\Rightarrow \frac{12}{25}a_1^2 = 12 \Rightarrow a_1 = 5 \Rightarrow$

$b_1 = 7$; Аналогично $a_3 = 3$, $a_2 = 4$, $b_2 = 3 + 5 = 8$

$7 + 8 + 9 + 3 + 4 + 5 = 12 + 24$

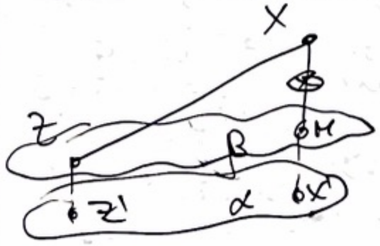
$b_3 = 4 + 5 = 9$. ~~...~~ $\boxed{\text{Ответ: } 36}$

№ 7



Пусть путешествие: $A \to K \to L \to M \to N' \to B$ (см рис)

Заметим ~~одно~~ св-во, что ортог. проекция пути на (ABC) будет по периметру равна ~~высоте~~ высоте, т.к угол м/у прямой и пл-тью $= 45^\circ$. Это легко д-ть: Пусть отрезок ZX



$\angle(\alpha, ZX) = 45^\circ$

Построим $\beta \parallel \alpha$ так, что $Z \in \beta$

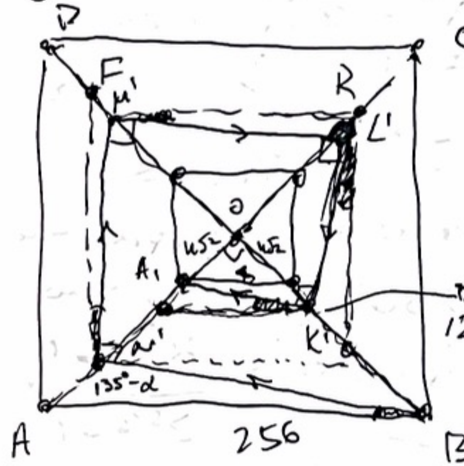
Опустим $XH \perp \beta$

тогда $ZH = XH$, т.к $tg\, 45^\circ = 1$

но $ZH = Z X'$, где Z', X' - пр-ии Z и X на α

При этом т.к углы м/у боковыми гранями и основанием равны, то ~~АМКЕ~~ расстояния от проекций точек (типа N') до сторон основания (в этом случае AB) отн. к ~~пересеч~~ одинаковы, т.е под одним углом.

(т.е ~~В~~ угол м/у AB и BN' = углу м/у $N'M'$ и AD и т.д).



Тогда $\triangle AN'B \sim \triangle M'N'F \sim \triangle M'RL'$ и т.д

Заметим ~~ТА~~ ~~синусов в~~ ~~виде~~: (по двум углам AN' и 45°)

Тогда $BN' \parallel A_1K' \parallel M'L'$ и $K'L' \parallel N'M'$ и $BN' \perp M'N'$. Пусть $M = \alpha$. Тогда $OK' = 4\sqrt{2} \cdot tg(\frac{\pi}{4} + \alpha)$. ~~$A_1K' = \frac{4\sqrt{2}}{\cos(\frac{\pi}{4}+\alpha)}$~~

~~$K'L' = \frac{4\sqrt{2}\, tg(\frac{\pi}{4}+\alpha)}{\cos(\frac{\pi}{4}+\alpha)}$~~; $OL' = 4\sqrt{2}\, tg(\frac{\pi}{4}+\alpha) \cdot tg(\frac{\pi}{4}+\alpha)$

и т.д. Пусть $tg(\frac{\pi}{4} + \alpha) = q$, тогда

Исправление

$ON' = 4\sqrt{2} \cdot q^{k-1}$, то $ON' = 128\sqrt{2} \cdot \cos(45° + \alpha)$

$\Rightarrow 4\sqrt{2} \cdot q^{k-1} = 128\sqrt{2} \cdot \frac{1}{q}$

$q^{5} = 2^{5} \Rightarrow q = 2^{5/6}$

$\Rightarrow \frac{1 + tg\alpha}{1 - tg\alpha} = 2^{5/6} \Rightarrow$

$tg\alpha + 1 = 2^{5/6} - 2^{5/6} \cdot tg\alpha$

$\cancel{tg\alpha(1 + 2^{5/6}) = 2^{5/6} - 1} \Rightarrow$

$tg\alpha = \frac{2^{5/6} - 1}{2^{5/6} + 1}$. Тогда высота пирамиды $= 128 \cdot tg\alpha$, т.к. α – угол м/у боковой пов-тью и осн-ем $\Rightarrow$ высота $= \frac{2^{5/6} - 1}{2^{5/6} + 1}$.

$\cdot 12^{7}$ $tg\alpha = 1/3$. А значит высота пирамиды $= 128\, tg\alpha$ т.к. α - угол м/у боковой пов-тью и осн $\Rightarrow$ высота $= \boxed{\frac{128}{3}}$

30-28-54-99
(161.8)

Исправление: №4

Замена $\pi x = t \longrightarrow$

$\cos^3 t - \cos^3 2t + \cos^3 4t = (\cos t - \cos 2t + \cos 4t)^3$

из формулы приведения известно, что $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$, а $\cos 4t = 2\cos^2 2t - 1$. Поэтому $\cos 4t$ – это некоторое выражение вида мн-на n-ой степени с переменной $\cos t$. Значит наше ур-е – это мн-н 12-ой степени отн-но переменной $\cos t$. А значит оно имеет не более 12 корней. Однако перенеся налево слагаемые и применяя ф-лу суммы кубов мы можем найти решение р-я:

$$\left[\begin{array}{l} \cos t + \cos 4t = 0 \\ \cos t - \cos 2t = 0 \\ \cos 4t - \cos 2t = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos\frac{5t}{2} \cdot \cos\frac{3t}{2} = 0 \\ \sin\frac{t}{2} \cdot \sin\frac{3t}{2} = 0 \\ \sin t \cdot \sin 3t = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{5t}{2} = \pi/2 + \pi n \\ \frac{3t}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ \frac{t}{2} = \pi n \\ \frac{3t}{2} = \pi n \\ t = \pi n \\ 3t = \pi n \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi n}{5} \\ t = \pi/3 + \frac{2\pi n}{3} \\ t = 2\pi n \\ t = \frac{2\pi n}{3} \end{array}\right. \quad t = \pi n; \quad t = \frac{\pi n}{3}$$

Чистовик:

$$\left[\begin{array}{l} t=\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi n}{5} \\ t=\frac{\pi n}{3} \end{array}\right. \leftarrow \text{если объединить}$$

Итого получаем 6 различных значений $\cos t$ при которых ур-е верно. Однако при раскрытии кубы $\cos^3 t$, $\cos^3 2t$, $\cos^3 4t$ сокращаются, отсюда исчезает кратность, поэтому все корни угаданы.

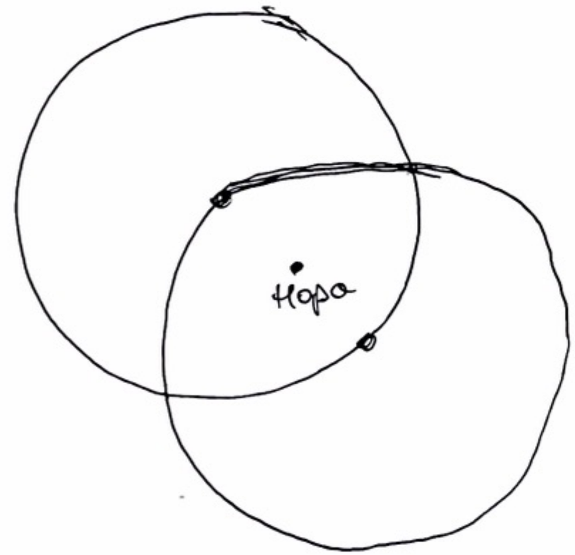
~~Ответ: $\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi n}{5}$, $\frac{\pi n}{3}$~~ Вчист

$$\left[\begin{array}{l} \pi x=\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi n}{5} \\ \pi x=\frac{\pi n}{3} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=\frac{2n+1}{5} \\ x=\frac{n}{3} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{3}{5}, \frac{7}{5}, \frac{9}{5}\right\}$

Чистовик

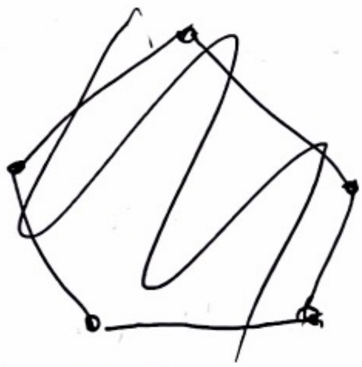
№6



Черновик:

$\cos^3 t - \cos^3 2t + \cos^3 4t =$

$= (\cos t - \cos 2t + \cos 4t)^3$



$(\cos t - \cos 2t)(\ldots) = (\cos t - \cos 2t)\ldots$

$\underbrace{\cos t + \cos 4t} = 0$

$\cos t - \cos 2t = 0$

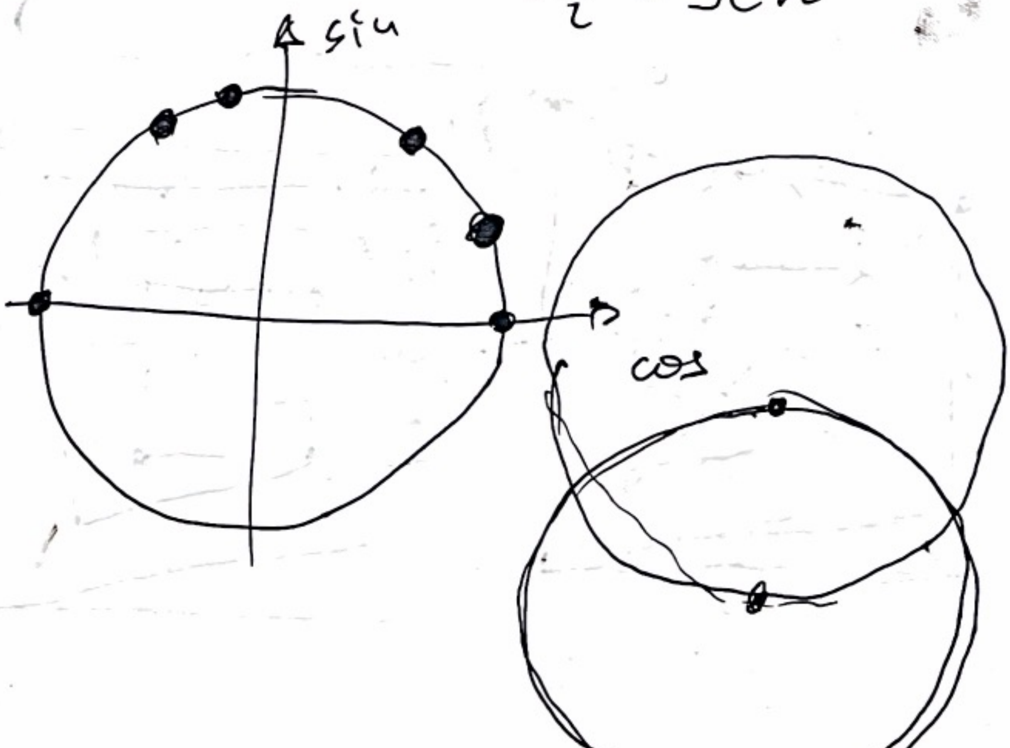
$\cos 4t - \cos 2t = 0$

$\cos t = z_0 + 0 \; 4$

$\cos t = -z_0$

$\cos \frac{5t}{2} \cdot \cos \frac{3t}{2} = 0$

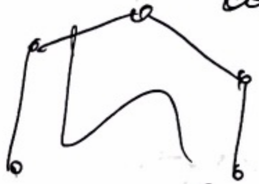
$\frac{5t}{2} = \pi n$



$\cos^3 t - \cos^3 2t + \cos^3 4t = \cos^3 t + (\cos 4t - \cos 2t) \cdot (\cos^2 4t + \cos 2t \cos 4t + \cos^2 2t)$

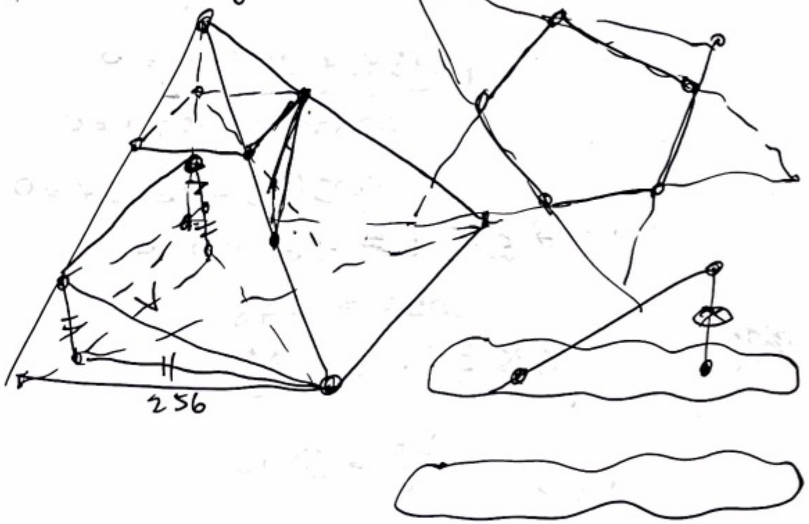
cos4

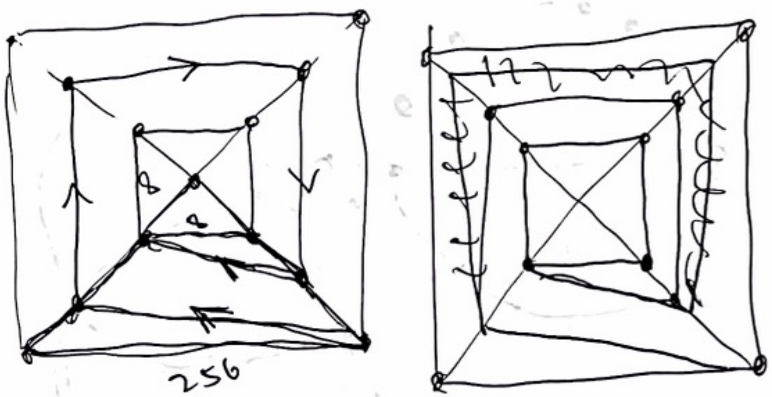
sin4

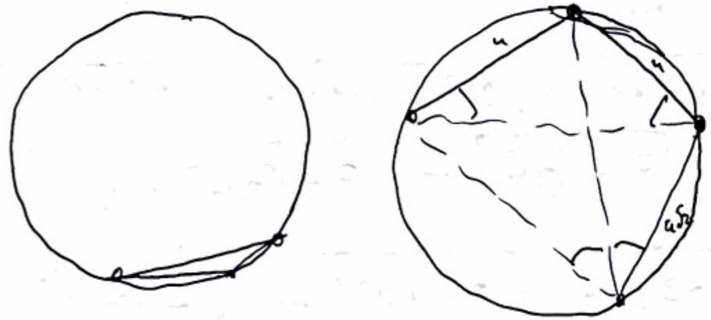


$2\cos^2 2t - 1$

$-2 \sin t \cdot \sin 3t$







$\cos^3 t - \cos^3 2t + \cos^3 4t = (\cos t - \cos 2t + \cos 4t)^3$

$\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$

$\cos^3 t - \cos^3 2t + \cos^3 4t + 3 \cos t \cos 2t \cos 4t$

$2 \cos t$

$\cancel{A^3 - B^3 + C^3 = (A - B + C)^3}$

$A^3 + C^3 =$

$A^3 + C^3 = (A + C)((A - B + C)^2 - \dots)$

$(A + C)(A^2$

$(\cos t + \cos 4t)(\cos^2 t - \cos t \cos 4t + \cos^2 4t) =$

$= (\cos t + \cos 4t)((\cos t - \cos 2t + \cos 4t)^2$

$\cos^2 4t$

$4t \rightarrow$

$\cos^2 4t \rightarrow \cos^4 2t \rightarrow \cos^8 t$

Черновик:

$\sqrt{4x^2+12x+9}+\sqrt{9x^2+12x+4}-\left(\sqrt{-(x+1)}\right)^2=$

$=\sqrt{7+\sqrt{24}}-\sqrt{7-\sqrt{24}}$

$\sqrt{(2x+3)^2}+\sqrt{(3x+2)^2}-\left(\sqrt{-(x+1)}\right)^2=$

$=\sqrt{7+\sqrt{24}}-\sqrt{7-\sqrt{24}}$

$-(x+1)\geq 0$ $\quad x+1\leq 0$

$x\leq -1$

$|2x+3|+3x+2$

$2^{5-\frac{1}{x}}$

$\sin 2^x$ периодич. ф-я

от 0 до $\frac{\pi}{2}$

$2^x=\frac{\pi}{2}$ $\qquad \frac{4}{\sin A}=8$

$2^{5-\frac{1}{x}}$

$\frac{2^5}{2^{\frac{1}{x}}}$