



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

вход 13:36-13:38

Вариант 11 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Баринова Льва Егоровича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«13» Апреля 2025 года

Подпись участника

Льва

Задача

$$\begin{aligned} & \sqrt{4x^2 - 12x + 9} + \sqrt{9x^2 - 12x + 4} - (\sqrt{x-1})^2 = \\ & = \sqrt{6+520} - \sqrt{6-520} = \sqrt{5+255+1} - \\ & - \sqrt{5-255+1} = \sqrt{(\sqrt{5}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} = \\ & = \sqrt{5}+1 - (\sqrt{5}-1) = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 & = \sqrt{(2x-3)^2} + \sqrt{(3x-2)^2} - (\sqrt{x-1})^2 = \\ & = |2x-3| + |3x-2| - (\sqrt{x-1})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2 = |2x-3| + |3x-2| - (x-1) \\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$1) \quad x \geq \frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} 2 = 2x-3+3x-2-x+1 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x=6 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$$2) \quad \frac{3}{2} > x \geq \frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} 2 = -2x+3+3x-2-x+1 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4=4 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$x \in [1; \frac{3}{2})$$

$$3) \quad \frac{2}{3} > x - \text{нет решений } x \geq 1$$

$$\text{Ответ: } [1; \frac{3}{2}]$$

Решение

Упр. 60 не имеет решений $x > 0$

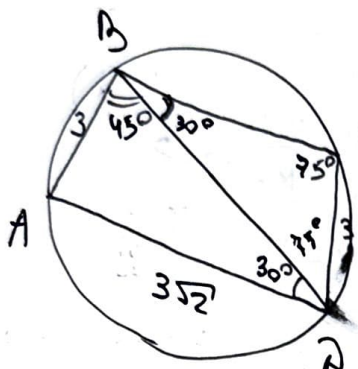
$$4^{5-\frac{1}{x}} \geq a + \sin 2^x \quad \text{Найти: } \min a > 0$$

$$a-1 \leq a + \sin 2^x \leq a+1$$

№3

Рассмотрим 2 случая

(1)



(стороны по 3 не имеют общих точек)

1) по подобной теореме синусов в $\triangle ABD$:

$$\sin \angle ADB = \frac{AB}{AD} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\angle ADB = 30^\circ$$

Ан-ко в $\triangle BCD$: $\angle CBD = 30^\circ$

в $\triangle ABD$: $\sin \angle ABD = \frac{AD}{AB} = \frac{3\sqrt{2}}{6} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\angle ABD = 45^\circ$

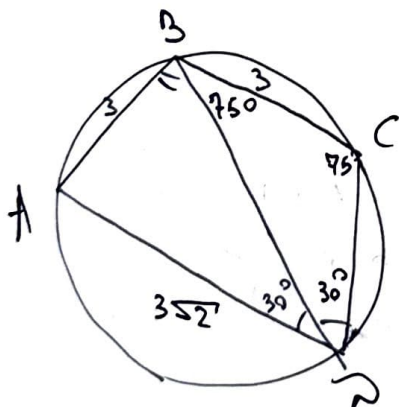
$$\Rightarrow \angle BAD = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ \Rightarrow$$

по д-ву впис $\angle BCD = 75^\circ$

$$\Rightarrow \angle BDC = 180^\circ - 30^\circ - 75^\circ = 75^\circ \Rightarrow \triangle BDC - \text{равноб.}$$

по теореме $\Rightarrow BC = BD$

(2)



Ан-ко (1) $\angle ADB = 30^\circ = \angle BDC$

$$\angle ABD = 45^\circ \Rightarrow \angle BAD = 105^\circ$$

$$\Rightarrow \angle BCD = 75^\circ \Rightarrow$$

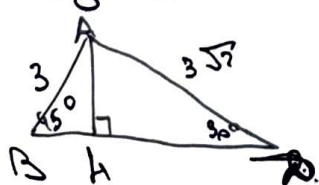
$$\angle CBD = 180^\circ - 30^\circ - 75^\circ = 75^\circ \Rightarrow \triangle BDC - \text{равноб.}$$

$$\Rightarrow BD = DC$$

неизвестная сторона = BD

и в 1 и в 2 случаях, это верно

по теореме синусов



н.н. Ан - высота в $\triangle ABD$,

$$\text{по теореме } BH = AB \cdot \cos 45^\circ = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$HD = AD \cdot \cos 30^\circ = 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$$

$$\Rightarrow BD = \frac{3 + 3\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2} + 3\sqrt{12}}{2}$$

По формуле Брахмагупты

$$S(ABCD) = \frac{1}{2} p(p-AB)(p-BC)(p-CD)(p-DA)$$

$$u \quad b \quad d \quad u \quad b \quad d \quad S(ABCD) = S(\triangle ABD) + S(\triangle BCD) = \frac{1}{2} AB \cdot BD \cdot \sin 45^\circ + \frac{1}{2} BC \cdot CD \cdot \sin 30^\circ =$$

$$= \frac{1}{2} BD \left(3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3\sqrt{2} + 3\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) =$$

$$= \frac{3\sqrt{2} + 3\sqrt{6}}{4} \cdot \left(\frac{6\sqrt{2}}{4} + \frac{3\sqrt{2} + 3\sqrt{6}}{4} \right) =$$

$$= \frac{3\sqrt{2} + 3\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{9\sqrt{2} + 3\sqrt{6}}{4} =$$

$$= \frac{3(\sqrt{2} + \sqrt{6}) \cdot 3(3\sqrt{2} + \sqrt{6})}{16} = \frac{9}{16}$$

$$= \frac{9}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 + \sqrt{3})(3 + \sqrt{3}) = \frac{9}{8} \cdot (3 + \sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 3) =$$

$$= \frac{9(6 + 4\sqrt{3})}{8} = \frac{9(3 + 2\sqrt{3})}{4}$$

$$= \frac{9(3 + 2\sqrt{3})}{4} \quad \text{Або: } \frac{9(3\sqrt{2} + 2\sqrt{6})}{8}$$

$$\sin^3(\pi x) + \sin^3(2\pi x) - \sin^3(4\pi x) = (\sin(\pi x) + \sin(2\pi x) - \sin(4\pi x))^3$$

$$\sin^3(2\pi x) - \sin^3(4\pi x) = \sin^3(2\pi x) - \sin^3(4\pi x)$$

$$a^3 + b^3 - c^3 = (a + b - c)^3$$

$$b^3 - c^3 = (a + b - c)^3 - a^3 = (a + b - c - a)((a + b - c)^2 + a(a + b - c) + a^2) =$$

$$= (b - c)(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc + a^2 + ab - ac + a^2) =$$

$$= (b - c)(3a^2 + b^2 + c^2 + 3ab - 3ac - 2bc)$$

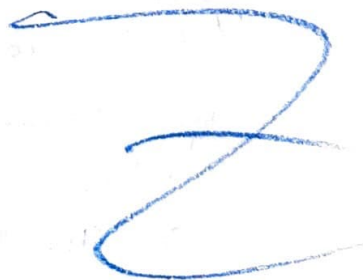
$$0 = (b - c)(3a^2 + b^2 + c^2 + 3ab - 3ac - 2bc - (b^2 + bc + c^2)) =$$

$$= (b - c)(3a^2 + 3ab - 3ac - bc)$$

$$0 = (b - c)(a^2 + ab - ac - bc) = (b - c)(a(a + b) - c(a + b)) =$$

$$= (b - c)(a - c)(a + b)$$

$$\begin{cases} b = c \\ a = c \\ a = -b \end{cases} \quad \begin{cases} \sin(2\pi x) = \sin(4\pi x) \\ \sin(\pi x) = \sin(4\pi x) \\ \sin(\pi x) = -\sin(4\pi x) \end{cases}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} 2\pi x = 4\pi x - 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 2\pi x = \pi - 4\pi x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 4\pi x = \pi x + 2\pi p, p \in \mathbb{Z} \\ 4\pi x = \pi - \pi x + 2\pi z, z \in \mathbb{Z} \\ 2\pi x = -\pi x + 2\pi q, q \in \mathbb{Z} \\ 2\pi x = \pi + \pi x + 2\pi l, l \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$



$$x \in [0, 3; 1, 8] \\ x \in \left[\frac{3}{10}; \frac{9}{5}\right]$$

$$x = k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{1}{6} + \frac{n}{3}, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{2p}{3}, p \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{1+2z}{3}, z \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{2z}{3}, z \in \mathbb{Z}$$

$$x = 1 + 2l, l \in \mathbb{Z}$$

$$1$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{6}$$

$$\frac{7}{6}$$

$$\frac{9}{6}$$

$$\frac{2}{3}$$

$$\frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{5}$$

$$1$$

$$\frac{7}{5}$$

$$\frac{9}{5}$$

$$\leftarrow \sqrt{6} \approx 2.45$$

$$1$$

$$\frac{3}{5}, \frac{7}{5}, \frac{9}{5}$$

$$\text{Обоз: } 1; \frac{1}{2}; \frac{5}{6}; \frac{7}{6}; \frac{9}{6}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{3}{5}$$

Ис

$$f_1(x) = (x+a_1)(x^2+b_1x+12)$$

$$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 > 0$$

$$f_2(x) = (x+a_2)(x^2+b_2x+18)$$

$$\forall x: f_1(x) = f_2(x) = f_3(x)$$

$$f_3(x) = (x+a_3)(x^2+b_3x+24)$$

$$\text{Найти: } a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$$

$$f_1(0) = f_2(0) = f_3(0)$$

$$f_1(0) = 12a_1$$

$$f_2(0) = 18a_2$$

$$f_3(0) = 24a_3$$

$$\Rightarrow 2a_1 = 3a_2 = 4a_3$$

$$0 = f_1(-a_1) = f_2(-a_1)$$

$$(a_2 - a_1)(a_1^2 - a_1b_2 + 18)$$

$$a_2 \neq a_1 \text{ (т.к. } a_2, a_1 > 0 \text{ и } 2a_1 = 3a_2)$$

$$\Rightarrow a_1^2 - a_1b_2 + 18 = 0$$

$$0 = f_3(-a_3) = f_2(-a_3) = (a_3^2 - a_3b_2 + 18)$$

$$a_3^2 - a_3b_2 + 18 = 0$$

Получаем $-a_1$ и $-a_3$ - корни ур-ий

$$x^2 + b_2x + 18 = 0 \Rightarrow a_1a_3 = 18$$

при этом

$$2a_1 = 4a_3$$

$$a_1 \cdot \frac{2}{3}a_1 = 18$$

$$a_1 = 2a_3$$

$$2a_3^2 = 18$$

$$a_3 = 3$$

$$\Rightarrow a_1 = 18, a_2 = \frac{4}{3}a_3 = \frac{4}{3} \cdot 9 = 12$$

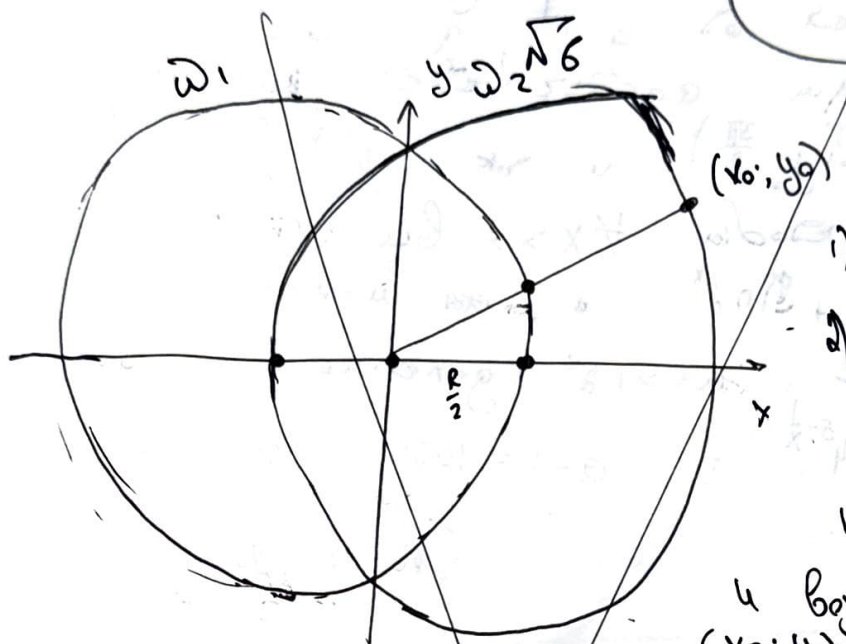
при этом

также y и x или y или x , то
 $b_2 = a_1 + a_3$

Ан-но для грузов b получаем, что
 $b_1 = a_2 + a_3$, $b_3 = a_1 + a_2 \Rightarrow$

$$a + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 = 3(a_1 + a_2 + a_3) = 3(9 + 12 + 18) = 3 \cdot 39 = 117$$

Ответ: 117



1) Пусть $R = \frac{3}{2\sqrt{2}}$

2) Введем систему координат так, как показано на картинке

и возьмем точку $(x_0; y_0)$, лежащую на

правой окружности

$$\omega_1: \left(x + \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = R^2$$

$$\omega_2: \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = R^2$$

$\frac{R}{2}$ — это расстояние между центрами

$$\text{Получаем что } \left(x_0 - \frac{R}{2}\right)^2 + y_0^2 = R^2$$

прямая $(0;0) - (x_0; y_0)$:

$$y = \frac{y_0}{x_0} \cdot x$$

Найдем пересечение

$$\frac{x-0}{x_0-0} = \frac{y-0}{y_0-0}$$

$$\begin{cases} \left(x + \frac{R}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 \cdot x^2 = R^2 \quad | :1 \\ \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y_0^2 = R^2 \quad | : (-1) \end{cases}$$

$$x^2 + Rx + \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 \cdot x^2 - x_0^2 - y_0^2 = 0$$

$$\left(\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 + 1\right)x^2 + Rx - x_0^2 - y_0^2 = 0$$

$$\begin{aligned} \left(\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 + 1\right)x^2 + Rx - \frac{3R^2}{4} &= 0 \\ &= 4R^2 + 3R^2\left(\frac{y_0^2}{x_0^2}\right) \end{aligned}$$

$$D = R^2 + 3R^2\left(\frac{y_0^2}{x_0^2} + 1\right) =$$

52

Заготовки

при $x > 0$
 $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$

$-\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2}$

Пусть

$x_1 < x_2 \Rightarrow$

$5 - \frac{1}{x_1} < 5 - \frac{1}{x_2}$

$4^{5-\frac{1}{x_1}} < 4^{5-\frac{1}{x_2}}$

$\Rightarrow 4^{5-\frac{1}{x}} \uparrow$ на $(0; +\infty)$,
 до предела 1024 так как $4^{\frac{1}{2}} = 2$, $4^{\frac{3}{2}} = 8$, $4^{\frac{5}{2}} = 32$, $4^{\frac{7}{2}} = 128$, $4^{\frac{9}{2}} = 512$, $4^{\frac{11}{2}} = 2048$

$a + \sin 2^x$ - периодизма и колеблется от $a-1$ до $a+1$
 (минимум достигается например при $x = \log_2 \frac{3\pi}{2}$) и так $4^{5-\frac{1}{x}} \uparrow$, то

для того, чтобы $\forall x > 0$ выполнялось
 $4^{5-\frac{1}{x}} < a + \sin 2^x$ * минимальное значение $a + \sin 2^x$ должно равняться пределу $4^{5-\frac{1}{x}}$
 $a-1 = 1024$ $a = 1025$

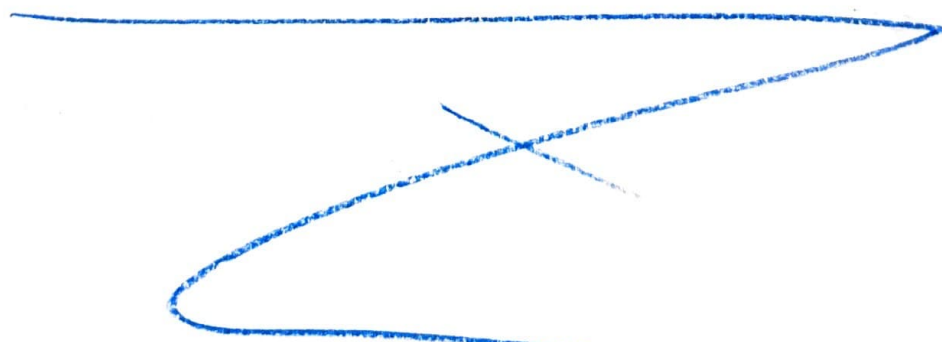
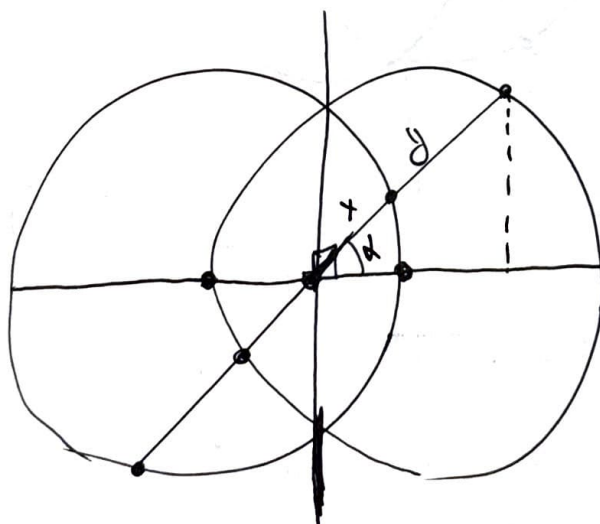
Ответ: 1025

Если вып на $x \in (0; \log_2 \frac{27}{2}]$,
 то вып в $\log_2 x$
 $4^{5-\frac{1}{x_1}} < 4^{5-\frac{1}{x_2}}$ $5-\frac{1}{x_1} < 5-\frac{1}{x_2}$
 $\frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1}$ $x_1 < x_2$



на $(0; +\infty)$ $4^{5-\frac{1}{x}}$ $\uparrow$ g_0
 при $x \rightarrow 0$ $\log_2 4$

$a \pm \sin 2^x \in a \pm 1$ для того, чтобы
 $\forall x > 0$ $4^{5-\frac{1}{x_2}}$ меньше a $\log_2 4$
 $y + 2x$



Ершов. 35

$$0 = f_1(-a_1) = f_2(-a_1) = (a_2 - a_1)(a_1^2 - a_1 b_2 + 18)$$

$$0 = (a_3 - a_1)(a_1^2 - a_1 b_3 + 24)$$

$$f_1(0) = 18a_1 \quad f_2(0) = 18a_2 \quad f_3(0) = 24a_3$$

$$\Rightarrow a_1 \neq a_2 \neq a_3$$

$$2a_3 = 3a_2 = 4a_1 \Rightarrow$$

$$a_1^2 - a_1 b_2 + 18 = 0$$

$$a_3^2 - a_3 b_2 + 18 = 0$$

Получается a_1 и a_3 -

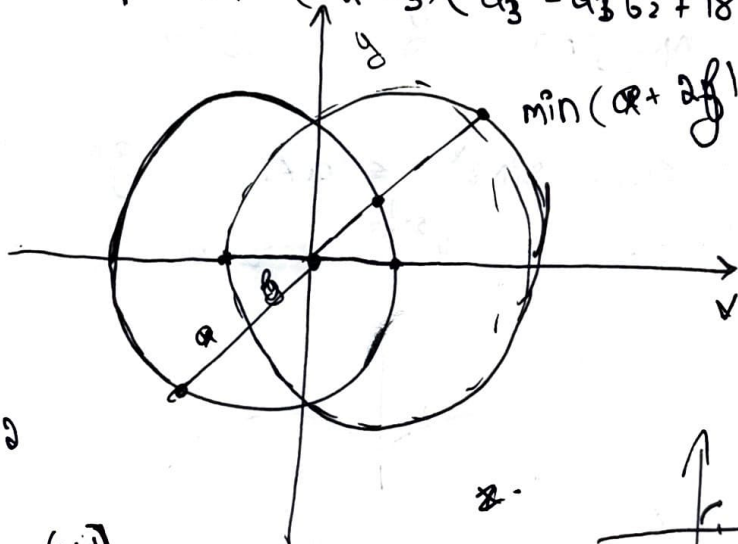
$$\text{корни } x^2 + b_2 x + 18 = 0$$

$$\rightarrow (x - a_1)(x - a_3) = x^2 - (a_1 + a_3)x + a_1 a_3 \quad a_1 a_3 = 18$$

$$0 = f_1(-a_1) = f_2(-a_1) = (a_2 - a_1)(a_1^2 - a_1 b_2 + 18)$$

$$0 = f_3(-a_3) = f_2(-a_3) = (a_2 - a_3)(a_3^2 - a_3 b_2 + 18)$$

$\sin^2 x$



при $x > 2$

$x \in (0; 1]$

$\sum 2$

$$4^{5-\frac{1}{x}} < a + \sin^2 x$$

при $x > 0$

$$y = 4^{5-\frac{1}{x}} \quad x = 10^{-3} \quad 5-1000$$

$$a-1 \quad \text{при } x = \log_{20} 2 > \log_{20} \frac{9}{2} > \log_{20} 4 = 2$$

$$a + \sin^2 x > a + \sin^2 1 > 1024$$

$$4^{5-\frac{1}{x}} < 1024$$

$$a = 1024 - \sin^2 y = 4$$

$$4^{5-\frac{1}{x}}$$

$$4^{5-\frac{1}{x}}$$

$$4^{5-\frac{1}{x}}$$

$$y = \frac{1}{\log 5}$$

Ерковит

$$x > 0$$

$$4^{5-\frac{1}{x}} < a + \sin 2^x$$

$$a+b-c \quad (a+b)^2 \rightarrow (a+b)^{2 \cdot c} = a^{2c} b^{2c}$$

$$0 < 2^{10-\frac{2}{x}} < 2^{10}$$

$$1025$$

$$\frac{1}{5} < \frac{3}{10}$$

$$a + \sin 2^x \geq 1024$$

$$\begin{array}{r} \times 33 \\ 24 \\ \hline 9 \\ 117 \end{array}$$

$$1 < \frac{3}{2}$$

$$a \geq 1024 + \sin^2 x$$

$$\frac{3}{5} > \frac{3}{10}$$

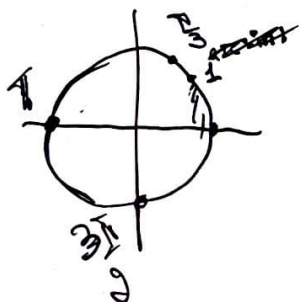
$$1024 -$$

$$0 < x \leq$$

$$0 < 2^x \leq 2\pi$$

галес

$4^{5-\frac{1}{x}} \downarrow$, а $a + \sin 2^x$ выражает
и убывает по периоду в $[a-1; a+1]$



$$2^x > 2^0 = 1$$

$$\sin \frac{\pi}{3}$$

$$a + \sin 2^x$$

$$a < 1025$$

$$\sin 2^x = 0$$

$$x = \log_2 1$$

$$a + \sin 2^{\log_2 \frac{\pi}{3}} = a - 1 < 1024$$

$$a + \sin 2^{\log_2 \frac{\pi}{3}} = a - 1$$

$$4^{5-\frac{2}{3\pi}} > 4^{5-\frac{2}{3}} = 4^{5-\frac{1}{3}} = 4 \cdot 2^{10-\frac{1}{2}} = \frac{2^{10}}{\sqrt{2}} \vee 2^{10} - 1$$

$$2^{10} \vee 2^{10} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{2} \vee \sqrt{2} \cdot 2^{10} (\sqrt{2} - 1)$$

$$5-\frac{1}{x}$$

терновик

Р1

$$\sqrt{6+5\sqrt{5}} - \sqrt{6-5\sqrt{5}} = \sqrt{5+25+1} - \sqrt{5-25-1} = \sqrt{31} - \sqrt{-21} = \sqrt{31} - i\sqrt{21}$$

$$2 \times 2. \sqrt{a} \quad 2^{10-\frac{1}{x}} \quad a^3 \cdot b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3$$

$$\sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$10 - \frac{1}{x} \cdot 2^{10-\frac{1}{x}} < 2^{10}$$

$x > 0$

$$2\pi x = 2\pi p$$

$$x = \frac{2p}{3}$$

$$6x = 1 + 2\pi$$

$$a + \sin x \quad a = 1025$$

$$\frac{1}{6} \leq \frac{3}{10}$$

$$10 < 18$$

$$5x = 1 + 2\pi$$

$$3x = \frac{2\pi}{3}$$

$$2^x = 2\pi = 2^{\log_2 2\pi}$$

$$x = \log_2 2\pi =$$

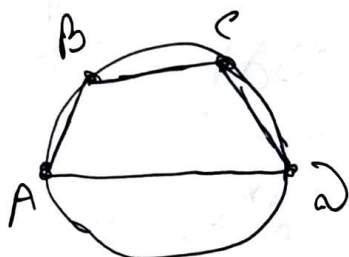
$$x = 1 +$$

$$= 1 + \log_2 \pi > 2$$

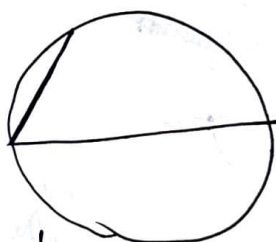
Р3

213

52



$$3\sqrt{2} < 6$$



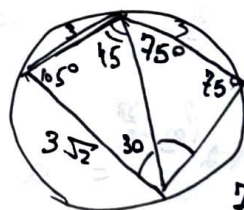
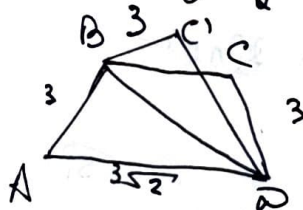
$$\frac{1}{6} \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{6} \leq \frac{9}{5}$$

$$25 \leq 54$$

$$2R = \frac{a}{\sin \alpha}$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$



$$\frac{3\sqrt{2}}{6} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \pi$$

75

105

105

$$\frac{7}{6} \leq \frac{9}{5}$$

35 54

$$\frac{9}{6} \leq \frac{9}{5}$$

$$\frac{11}{6} \leq \frac{9}{5}$$

Р2 Найдем $x > 0$ и т

$$4^{x-\frac{1}{x}} < a + \sin 2x$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3} \leq \frac{3}{10}$$

[illegible]