

Вход 13¹⁴ - 13¹⁶

0 014 122 710006

01-41-22-71
(159.4)



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 9

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Батенина Глеба Вячеславовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

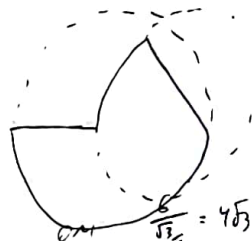
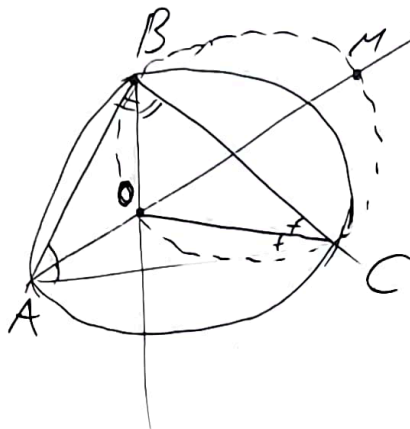
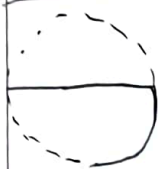
«13» апреля 2025 года

Подпись участника

[Подпись]

01-41-22-71
(159А)

Черновик



$$\frac{OM}{\sin 30^\circ} = \frac{BC}{\sin 120^\circ}$$

$$OM = l$$

OM - ?

$$BC = 6$$

$$AB : AC = 3 : 1$$

$$\angle BAC = 60^\circ$$

$$\angle BOC = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ =$$

$$= 60^\circ + \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} =$$

$$= 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$$

$$x^3 - 12x + 13 = x^3 + x - 13x + 13 =$$

$$x^3 + x^2 - x - 2 - 12x + 13 = 0$$

$$x^3 - (x^2 + 11x - 11) = 0$$

$$x^3 + x^2 - 13x + 11 = 0$$

$$x = 1$$

$$x^3 - x^2 - 11x + 15 = 0$$

$$27 - 9 - 73 + 15 = 0$$

$$x(x-3)(x+3) - (x+1)(x-2) = -3(x-1)$$

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 - 11x + 15 \quad | x-3 \\ x^3 - 3x^2 \\ \hline 2x^2 - 11x + 15 \\ 2x^2 - 6x \\ \hline -5x + 15 \end{array}$$

$$\frac{(x+1)(x-2)}{4}$$

$$x^3 - |x^2 - x - 2| = 12x - 13$$

$$D = 1^2 + 8 = 9$$

$$x^3 - (x^2 + 11x - 11) = 0$$

$$-3^3 \pm 36 + 3$$

$$3^3 - 12 \cdot 36 + 3$$

$$x^3 - 9x - 3x + 3 = 0$$

$$x(x-3)(x+3)$$

90 (девятьсот)

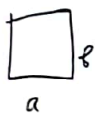
Черновик

$$x^3 - 3x^2 + 2x - 11x + 15$$



$$D = 11x - 8.15$$

$$x^3 - 9x - x^2 - 2x + 15$$



$$1 - 44$$

$$3 - 46$$

$$5 - 48$$

$$7 - 50$$

$$9 - 52$$

$$-3 > x > -4$$

$$4.4/4 + 2 +$$

$$x^3 - 9x - x^2 - 2x + 15$$

$$-12x > 36$$

$$1, b, c, d \in \mathbb{N}$$

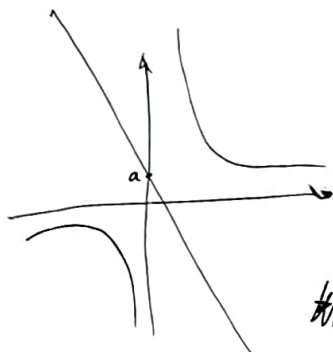
$$2a + 2b = 0.8$$

$$a(2-b) + 2(b-2) + 4 = 0$$

$$2c + 2d = cd$$

$$(b-2)(2-a) = -4$$

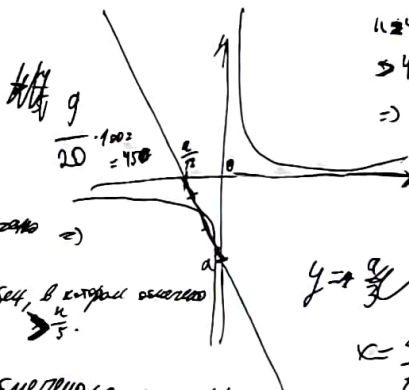
$$(b-2)(a-2) = 4$$



100

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 3 \\ d = 6 \end{cases}$$



11.45 "900

545.20 =

=> 3 секунды, в которых > 9

20 yr.

=> 20 h of work =>

=> 3 секунды, в которых работа

100 работ

= h

$\pi = \beta$

$h \rightarrow \min$:

3 работ, которые решено

сметливо < 900 работ.

3 yr, решивших < 900 = 45 работ

$$x = \frac{a}{18-3} \text{ или } x = \frac{a-2}{18-3}$$

$$\frac{a^2}{2 \cdot 27} = 1$$

$$-18x^2 + ax - 1 = 0$$

$$a = 27\sqrt{2}$$

в каждой секунде

$$x = \sqrt{2}$$

сметливо < 10

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \text{во всех работ} \cdot 1000 \Rightarrow \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{a}{18} = \frac{27\sqrt{2}}{18}$$

3 работ, которые решено < 50.

14600

$$h = 49$$

980

не хватает: 100

1	2	3	100
1			
2			
3			
...			
20			

Задача 1

N2

$$x^3 - |x^2 - x - 2| = 12x - 13$$

$$* |x^2 - x - 2| = x^3 - 12x + 13 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 12x + 13 \geq 0 \\ \begin{cases} x^2 - x - 2 = x^3 - 12x + 13 & ① \\ -(x^2 - x - 2) = x^3 - 12x + 13 & ② \end{cases} \end{cases}$$

$$①: x^3 - x^2 - 11x + 15 = 0$$

$$(x^3 - 9x) + (-x^2 - 2x + 15) = 0$$

$$~~x(x^2 - 9) + (-x^2 - 5x + 15)~~$$

$$~~x(x-3)(x+3) - x(x+5) + 3(x-5)~~ \Rightarrow x=1 - \text{корень}$$

$$x(x^2 - 9) + (-x^2 + 3x - 5x + 15) = 0$$

$$x(x-3)(x+3) - x(x-3) - 5(x-3) = 0$$

$$(x-3)(x^2 + 3x - x - 5) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x^2 + 2x - 5 = 0 \end{cases}$$

$$D = 4 + 4 \cdot 5 = 24 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x = \frac{-2 - \sqrt{24}}{2} = -1 - \sqrt{6} \\ x = \frac{-2 + \sqrt{24}}{2} = -1 + \sqrt{6} \end{cases}$$

Подставляем корни в пер-во:

$$* x=3: 3^3 - 12 \cdot 3 + 13 = 27 - 36 + 13 = 40 - 36 > 0$$

$$x = -1 - \sqrt{6}: (-1 - \sqrt{6})^3 - 12(-1 - \sqrt{6}) + 13 = -1 - 3 \cdot 1 \cdot \sqrt{6} - 3 \cdot 1 \cdot 6 - 6\sqrt{6} + 12 + 12\sqrt{6} + 13 = 6 + 3\sqrt{6} > 0$$

$$x = -1 + \sqrt{6}: (-1 + \sqrt{6})^3 - 12(-1 + \sqrt{6}) + 13 = 6\sqrt{6} - 3 \cdot 6 \cdot 1 + 3 \cdot 6 \cdot 1 - 1 + 12 - 12\sqrt{6} + 13 = 6 - 3\sqrt{6} < 0, \text{ т.к. } \sqrt{6} > \sqrt{4} = 2$$

не подходит

$$②: -x^2 + x + 2 = x^3 - 12x + 13$$

$$x^3 + x^2 - 13x + 11 = 0$$

заметьте, что сумма
всех корней = 0 $\Rightarrow$

$$\begin{array}{r|l} x^3 + x^2 - 13x + 11 & x-1 \\ \hline x^3 - x^2 & \\ \hline 2x^2 - 13x & \\ 2x^2 - 2x & \\ \hline -11x + 11 & \\ -11x + 11 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$x^3 + x^2 - 13x + 11 = (x-1)(x^2 + 2x - 11)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2 + 2x - 11 = 0 \end{cases}$$

$$D = 4 + 4 \cdot 11 = 48 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x = \frac{-2 - \sqrt{48}}{2} = -1 - 2\sqrt{3} \\ x = \frac{-2 + \sqrt{48}}{2} = -1 + 2\sqrt{3} \end{cases}$$

задание 2

$$x = -1 - 2\sqrt{3}: (-1 - 2\sqrt{3})^3 - 12(-1 - 2\sqrt{3}) + 13 =$$

$$= -1 - 3 \cdot 1 \cdot 12 - 3 \cdot 1 \cdot 2\sqrt{3} - 24\sqrt{3} + 12 + 24\sqrt{3} + 13 = -6\sqrt{3} - 12 < 0$$

не подходит

$$x = -1 + 2\sqrt{3}: (2\sqrt{3} - 1)^3 - 12(-1 + 2\sqrt{3}) + 13 = 24\sqrt{3} - 3 \cdot 12 \cdot 1 + 3 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 1 - 1 + 12 - 24\sqrt{3} + 13 =$$

$$= 6\sqrt{3} - 12 < 0, \text{ т.к. } \sqrt{3} < \sqrt{4} = 2, \text{ не подходит}$$

Ответ: $x = 3$; $x = -1 - \sqrt{5}$.

№ 7

1) Докажем, что если $n < 45$, то существует конфигурация, в которой каждая ячейка решено $< \frac{20}{2} = 10$ усами.

Представим задачу в виде таблицы: 20 строк (ученики) и 20 столбцов (задачи). Будем ставить крестик в клетку i -й строки j -го столбца, если i -й ученик решил j -ю задачу. Тогда расставим крестики таким образом:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	...	100
1	X												X	X	X	X	X	X	X	X	X		X
2	X	X											X	X	X	X	X	X	X	X	X		X
3	X	X	X										X	X	X	X	X	X	X	X	X		X
4	X	X	X	X									X	X	X	X	X	X	X	X	X		X
5	X	X	X	X	X								X	X	X	X	X	X	X	X	X		X
6	X	X	X	X	X	X							X	X	X	X	X	X	X	X	X		X
7	X	X	X	X	X	X	X						X	X	X	X	X	X	X	X	X		X
8	X	X	X	X	X	X	X	X					X	X	X	X	X	X	X	X	X		X
9	X	X	X	X	X	X	X	X	X				X	X	X	X	X	X	X	X	X		X
10	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X			X	X	X	X	X	X	X	X	X		X
11		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		X	X	X	X	X	X	X	X	X		X
12		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		X	X	X	X	X	X	X		X
13		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		X	X	X	X	X		X
14		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		X	X	X		X
15		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		X
16		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		X
17		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		X
18		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		X
19		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		X
20		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		X

и
там ранее

Будем «сдвигать» задачу 9 крестиков на 1 вниз в каждой новой строке. Тогда в каждой строке меньше 10 крестиков, и в каждой строке ровно $100 \cdot \frac{9}{20} = 45$ крестиков. Уберем крестики из 20-й строки 100-20 столбца, чтобы на 20-й ученик — Вася — решил меньше, чем Петя, но все равно $\geq 44 = n$ задач. (Петя может выбрать любого другого ученика).

Таким образом, если $n < 45$, то существует конфигурация, в которой каждую

2) Доказано, что $n = 4,5$ подходит.

Предположим, что в каждой задаче решено ≤ 9
функций. Но тогда всего эвристик $\leq 9 \cdot 100 = 900$, противоречие.
Значит, каку-то задачу решено ≥ 10 функций, т.е. д.

Отвеч: 45.

Две стороны - a и b . Тогда $P = 2a + 2b$; $S = ab$.

$$2a+2b=ab; \quad a(2-b)+2b=0; \quad a(2-b)+2(b-2)+4=0;$$

$$(a-2)/(2-b) = -4; \quad (a-2)/(b-2) = 4. \quad a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow a=2, b=2+1.$$

W. J. L. A. M.

4 можно различить в произведении членов ряда 4-мя способами:

$$\begin{cases} a-2=-4 \\ b-2=-1 \end{cases} \quad \text{um} \quad \begin{cases} a-2=-2 \\ b-2=-2 \end{cases} \quad \text{um} \quad \begin{cases} a-2=1 \\ b-2=4 \end{cases} \quad \text{um} \quad \begin{cases} a-2=2 \\ b-2=2 \end{cases}$$

$a \notin \mathcal{N}$

$a, b \in \mathbb{N}$

$$a=3; b=7$$

$$a=4; b=4$$

Знаєт два прийоми імена у чинках імена сторони 3; 7 и 4; 4.

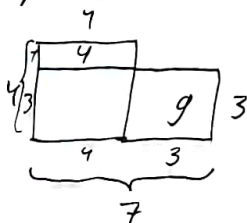
Замечки по строки ~~иногда~~ ^{иногда} упрощаются, ~~иногда~~ ^{иногда} в которых

В 2 слух бумаж, не могут превосходить $\min(3; 4)$ и $\min(4; 7)$ соответственно.
(фигура, получившаяся из 2-х слов - прямоугольник, т.е. некоторые стороны угла всегда параллельны).

Значит $S_2 = \min(3, 4) \cdot \min(4, 7) = 3 \cdot 4 = 12$.

$$S_1 + 2S_2 = 3 \cdot 7 + 4 \cdot 4 = 37 \Rightarrow S_1 \geq 37 - 2 \cdot 12 = 13.$$

Пример по 73;



$$949 = 73$$

October: 13

задание 4

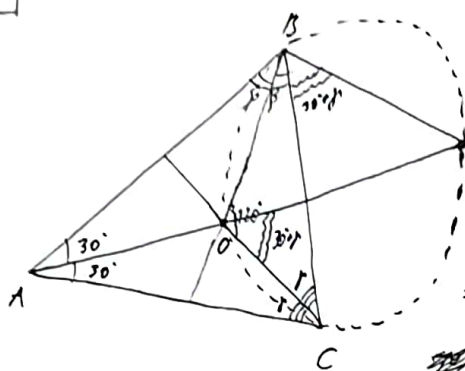
Дано:

$AC = 6$

$AB:AC = 3:1$

$\angle BAC = 60^\circ$

$OM = ?$



$$\text{Пусть } \angle ABO = \angle OBC = \beta;$$

$$\angle BCO = \angle OCA = \gamma.$$

$$\text{Тогда } 2\beta + 2\gamma = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\Rightarrow \beta + \gamma = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \angle BOC = 180^\circ - \beta - \gamma = 120^\circ$$

~~треугольник BOC - вписанный~~

$$\angle MOC = \angle OAC + \angle OCA = 30^\circ + \gamma \quad (\text{внешний})$$

$$\text{треуголь. OVMC - вписанный} \Rightarrow \angle CBM = \angle COM = 30^\circ + \gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle OVM = \beta + 30^\circ + \gamma = 90^\circ \Rightarrow \underline{OM - диаметр.} \Rightarrow$$

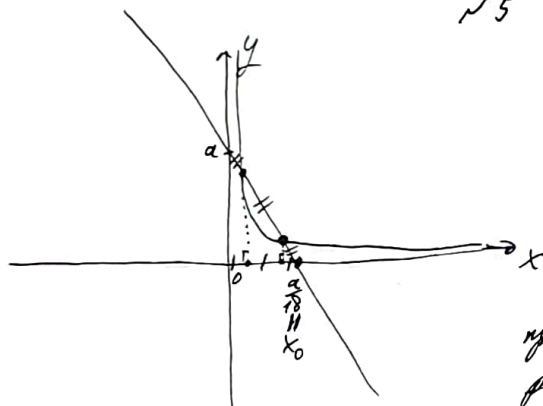
$$\Rightarrow OM = 2R, \text{ где } R - \text{радиус окр. (BOC).}$$

$$\text{Однако по т. синусов в } \triangle BOC: \frac{BC}{\sin \angle BOC} = 2R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow OM = 2R = \frac{6}{\sin 120^\circ} = \frac{6}{\sqrt{3}/2} = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{4 \cdot 3}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}.$$

Ответ: $4\sqrt{3}$.

№ 5



Заметим, что равенство нулей
у условий равносильно равенству
~~их проекций на Oх (по т. Паскаля).~~

Тогда это значит, что
абсциссы точек пересечения
прямой с гиперболической дельтой
равны ~~1/18 и 2/18~~ ~~1/18 и 2/18~~ ~~1/18 и 2/18~~ абсциссы
 $\frac{x_0}{3}$ и $\frac{2x_0}{3}$, где x_0 - абсцисса точки

пересечения прямой с осью Oх. Заметим, что $0 = -18x_0 + a \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{a}{18} \Rightarrow \text{коэф. } x \text{ точек } 1 \text{ прямой с гиперболической}$$

$$\text{равны } \frac{a}{54} \text{ и } \frac{a}{27}, \text{ т.е. } \frac{a}{54} \text{ и } \frac{a}{27} \text{ делители двух корней}$$

$$\text{уравн. } -18x + a = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0 \Rightarrow -18x^2 + ax - 1 = 0$$

$$18x^2 - ax + 1 = 0 \Rightarrow$$

Задача 5

$$\Rightarrow \text{исходно } \left\{ \frac{a}{54} - \frac{2a}{54} = 0 \cdot \frac{1}{1} \right. \\ \left. \frac{a}{54} - \frac{2a}{54} = \frac{a}{54} \right.$$

1) при равенстве нулю при $a = 0$, т.е. $\frac{a}{54} - \frac{2a}{54} = \frac{3a}{54}$,

2) при $a \neq 0$ — равно при $a = \pm \sqrt{\frac{54 \cdot 2}{1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{1}} = \pm 9$.

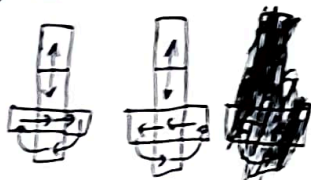
Ответ: $a = \pm 9$.

№ 6

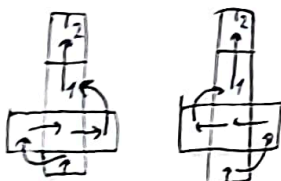
Если разложить стержень ~~на 4 части~~ на 4 части, то получится 4 стержня, склеивая которые переставим, при котором кубик останется таким же, т.е. на каждой грани будет по 1-му кубичку.

1) Если ~~первый~~ первый из 4 способов переставить

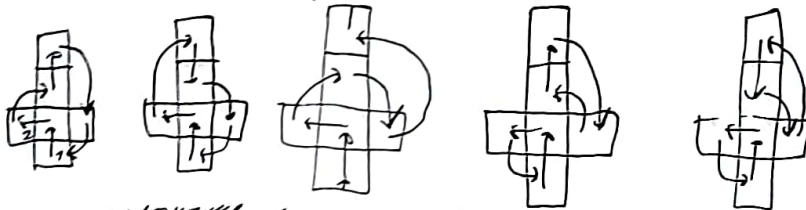
1) Если ~~первый~~ к которому переставил первый, вернувшись на место первого, то у остальных 3 стержней еще 2 способа переставить.



2) Если второй ~~первый~~ переставил, то у остальных 2 стержней 2 варианта:



3) Если третий ~~первый~~ переставил, то у остальных 10 вариантов.



и аналогично 5, или он пойдет направо

итого $4 \cdot (2 + 2 + 10) = 4 \cdot 14$ ~~нужно~~ подходящих способов $\Rightarrow$

$$\Rightarrow P = \frac{4 \cdot 14}{46} = \frac{14}{46}.$$

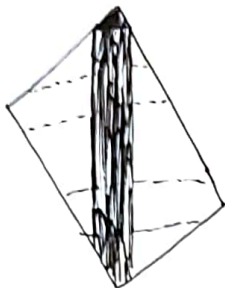
Ответ: $\frac{14}{46}$.

лист 6

№ 1

Ответ: Симметричная структура у Али.

Первый ход Али для доски ширины $\frac{1}{10}$ ширины вдали от диагонали. Второй ход Али будет диагональ, абсолютно симметричная первым, как показано на рисунке. Тогда у Али всегда будет ход, и, значит, она сделает последний ход и доска ширины, т.е.т.



№ 8
Если одержать концы в лапашах, то второй ход доски будет ~~2х~~, потому что ~~2х~~ ширины ~~дур~~ в сумме доски дадут 2х, радиансы. Т.к. отрезки квадрата не дают.

