0 630944 960001

63-09-44-96
(161.24)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

Бахчевой Валентины Дмитриевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«13» апреля 2025 года

Подпись участника

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
63-09-44-96		+	+	+	+	+	∓	0	0

63-09-44-96 (161.24)

черновик

$\sqrt{4x^2+12x+9}+\sqrt{x^2+6x+9}+(\sqrt{(x+2)})^2=\sqrt{4+\sqrt{12}}-\sqrt{4-\sqrt{12}}$

$\cancel{(2x+3)^2}$ $|2x+3|+|x+3|+x+2=|\sqrt{3}+1|-|\sqrt{3}-1|$

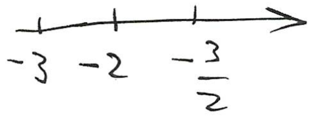
$\cancel{4+2\sqrt{3}=(\sqrt{3}-1)^2=4-2\sqrt{3}}$

$x\geq -2$ - огр. $|2x+3|+|x+3|+x+\cancel{2}=\cancel{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+1}$

$|2x+3|+|x+3|+x=0$ $x=-\frac{3}{2}$; $x=-3$

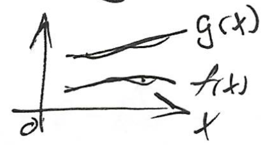
1) $x<-3 \Rightarrow$ $\cancel{-2x-3-x-3}$ -

$f(x)$ $g(x)$ $a>0$ $a\to\min$



$5^{3-\frac{1}{x}}\geq a+\sin 3^x$

нет реш $x>0$



$\forall x>0$ $5^{3-\frac{1}{x}}<a+\sin 3^x \Leftrightarrow \frac{125}{5^{\frac{1}{x}}}<a+\sin 3^x$

$5^{3-\frac{1}{x}}<a+\sin 3^x$ $\sin 3^x=-1$ $3^x=-\frac{\pi}{2}$

$\sin 3^x=-1 \Rightarrow 3^x=\arcsin(-1)$

$+3^x=\frac{3\pi}{2}\Rightarrow \sin 3^x=-1$

$a-1>5^{3-(\frac{3\pi}{2}+2\pi k)}$ $a+\sin 3^x>5^{3-\frac{1}{x}}$

$3^x=\frac{3\pi}{2}+2\pi n\Rightarrow \sin 3^x=-1\Rightarrow a-1>5^{3-\frac{1}{(\ldots)}}$

$\sin 3^x=1 \Rightarrow a+1>5^{3-\frac{1}{x}}=\frac{125}{\sqrt[x]{5}}$

$\forall x>0$

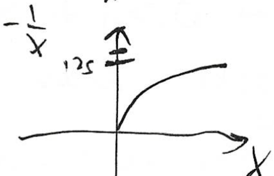
$a+\sin 3^x>5^{3-\frac{1}{x}}$ $\sin 3^x=\sin(3^x+t)$

$\cancel{a+\sin(3^x+t)}$

$3^x=\frac{3\pi}{2}+2\pi n\Rightarrow a-1>5^{3-\frac{1}{x}}\Leftrightarrow a>1+\frac{125}{5^{\frac{1}{x}}}$

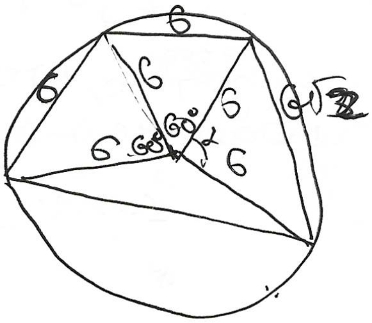
$5^{3-\frac{1}{x}}\to\max \Rightarrow 3-\frac{1}{x}\to\max\Rightarrow x\to\max$

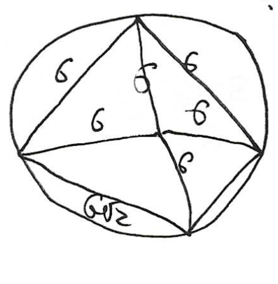
$a=126$ $126+\sin 3^x>5^{3-\frac{1}{x}}$



$R=6$

$S\to\max$?





чистовик

Задача 1

$\sqrt{4x^2+12x+9}+\sqrt{x^2+6x+9}+(\sqrt{(x+2)})^2=\sqrt{4+\sqrt{12}}-\sqrt{4-\sqrt{12}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{(2x+3)^2}+\sqrt{(x+3)^2}+(\sqrt{(x+2)})^2=\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}-\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow |2x+3|+|x+3|+x+\cancel{2}=\cancel{\sqrt{3}}+\cancel{1}-\cancel{\sqrt{3}}+\cancel{1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |2x+3|+|x+3|+x=0$ (*)

ОДЗ: $\begin{cases}(2x+3)^2\geq 0\\(x+3)^2\geq 0\\x+2\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow x\geq -2$

1) $x\in[-2;-\frac{3}{2}] \Rightarrow$ (*) $\Leftrightarrow -\cancel{2x}-3+\cancel{x}+3+\cancel{x}=0 \Leftrightarrow 0=0 \Leftrightarrow$ И — весь отрезок — корни

2) $x\in(-\frac{3}{2};+\infty) \Rightarrow$ (*) $\Leftrightarrow 2x+3+x+3+x=0 \Leftrightarrow 4x=-6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$ — не входит в интервал $(-\frac{3}{2};+\infty)$

Ответ: $[-2;-\frac{3}{2}]$.

Задача 2

$5^{3-\frac{1}{x}}\geq a+\sin 3^x$ нет реш $x>0$ $\quad a\to\min_{a>0}$ -?

Это значит, что $\forall x>0$ $\underbrace{a+\sin 3^x}_{f(x)} > \underbrace{5^{3-\frac{1}{x}}}_{g(x)}$

$\forall x>0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(5^{3-\frac{1}{x}})=125$, $g(x)\uparrow$

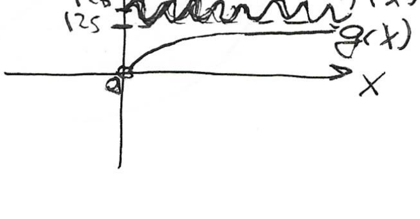
$\forall 3^x=\frac{3\pi}{2}+2\pi n, n\in\mathbb{N}_0 \Rightarrow \sin 3^x=-1 \Rightarrow a-1>5^{3-\frac{1}{x}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a>1+5^{3-\frac{1}{x}}$ — выполняется для $\forall x>0$ (должно выполн.)

$g(x)\to\max$ при $x\to+\infty \Rightarrow a\geq\lim\limits_{x\to+\infty}(1+5^{3-\frac{1}{x}})=126$

(переход к нестрогому рав-ву из-за того, что $\forall x>0$ $g(x)\neq\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$, т.е. предел не достигается).

$a=126 \Rightarrow f(x)\in[125;127]$ $\quad$ эскиз для $x>0$

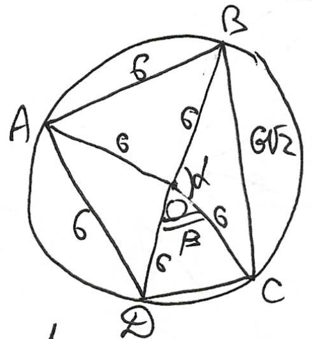


Ответ: $a=126$.

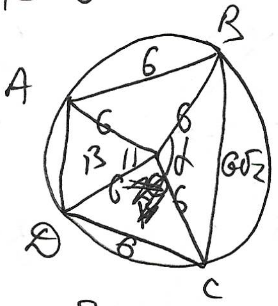
чистовик

Задача 3

$R=6$



1 сл.



2 сл.

1сл: S_{ABO}, S_{AOD} – фиксиров., т.к. $\triangle ABO$ и $\triangle AOD$ – р/с;
в $\triangle BOC$ $\cos\alpha$ ищется однозначно (th cos) через 3 известные стороны, $0<\alpha<180^\circ \Rightarrow \sin\alpha>0 \Rightarrow \sin\alpha$ опред. однозначно $\Rightarrow S_{\triangle BOC}$ однозначна; $\beta=360^\circ-2\cdot 60^\circ-\alpha$.
$S_{\triangle DOC}$ – однозначно опред.

2сл: $S_{\triangle ABO}$, $S_{\triangle DOC}$ – однозн; α и β опред. также, как в 1сл; S_{ABCD} не зависит от порядка располож. сторон длинами $6, 6, 6\sqrt{2}$ ($S_{\triangle BOC}$ и $S_{\triangle AOD}$ однозн. через углы и прилеж. стороны)

$S_{ABCD}=S_{\triangle ABO}+S_{\triangle BOC}+S_{\triangle DOC}+S_{\triangle AOD}$ (считано по 1 сл. н.уо)

$S_{\triangle ABO}+S_{\triangle AOD}=\frac{6^2\sqrt{3}}{4}\cdot 2=18\sqrt{3}$

th cos в $\triangle BOC$: $\cos\alpha=\frac{2\cdot 6^2-(6\sqrt{2})^2}{2\cdot 6^2}=1-\frac{36\cdot 2}{36\cdot 2}=0 \Rightarrow$
$\alpha=90^\circ \Rightarrow S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}BO\cdot OC\cdot\sin\alpha=\frac{6\cdot 6}{2}=18$

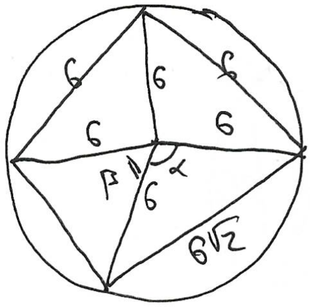
$\beta=360^\circ-2\cdot 60^\circ-90^\circ=150^\circ$

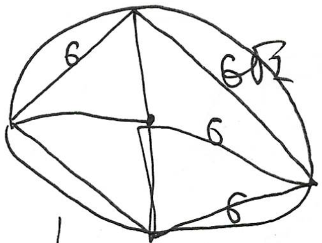
$S_{DOC}=\frac{1}{2}OC\cdot OD\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\cdot 36\cdot\sin 150^\circ=18\cdot\frac{1}{2}=9$

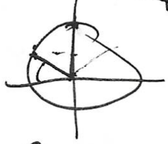
$S_{ABCD}=18\sqrt{3}+18+9=27+18\sqrt{3}$.

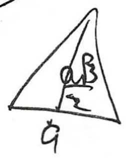
Ответ: $27+18\sqrt{3}$.

Черновик



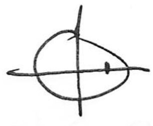






$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$\cos 5\pi x = a$ $\cos 6\pi x = c$



$\cos 5\pi x = b$

$a^3 + b^3 - c^3 = (a+b-c)^3 = (a+b-c)^2(a+b-c) =$ $\cos(\pi-\alpha) =$ $\cancel{b}$

$= (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc)(a+b-c) =$

$= \cancel{a^3} + \cancel{a^2b} - \cancel{a^2c} + \cancel{ab^2} + \cancel{b^3} - \cancel{b^2c} + \cancel{ac^2} + \cancel{bc^2} - \cancel{c^3} + \cancel{2a^2b} + \cancel{2ab^2}$

$- \cancel{2abc} - \cancel{2a^2c} - \cancel{2abc} + \cancel{2ac^2} - \cancel{2abc} - \cancel{2b^2c} + \cancel{2bc^2} =$

$= a^3 + b^3 - c^3 + \underline{3a^2b} + \underline{3ab^2} - \underline{3a^2c} - \underline{6abc} + \underline{3ac^2} -$

$- \underline{3b^2c} + \underline{3bc^2} \Rightarrow a^2b + ab^2 + ac^2 + bc^2 - a^2c - 2abc - b^2c = 0$

$ab(a+b) + c^2(a+b) = c(a^2 + 2ab + b^2)$

$(a+b)(ab+c^2) = c(a+b)^2 \Rightarrow (a+b)((a+b)c - ab - c^2) = 0$

$\Rightarrow (a+b)(ac+bc-ab-c^2) = 0$ $ac + bc = ab + c^2$

$c(a+b-c) = ab$ $ab + c^2 = (a+b)c$ $\cancel{c(c-a-b) = ab}$

$a^2 2\sqrt{2}$ $2\sqrt{2}a^2 \cdot 2\sqrt{2}$ $8t^2 - 8t + 1$

$ab + c^2 = (a+b)c$ $\cancel{(\pm 2\sqrt{2})^2 - 2 \cdot \pm 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2}$

$3x = 2t$ $6t = 2k$ $3t = k$

$ab - ac = bc - c^2$ $x = \frac{2}{3}t$

$a(b-c) = c(b-c)$

$0{,}3;\ 1{,}6$ $\frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ 1;\ \frac{4}{3};\ \frac{5}{3};\ 2$

$\frac{k}{3}$ $\frac{5}{3} = 1\frac{2}{3} = 1{,}66$ $\overset{4}{9}33$ $\frac{16}{10}$ $\frac{8}{5} = 1\frac{3}{5} = 1{,}6$

Чистовик

Задача 4

$\cos^3(\pi x)+\cos^3(2\pi x)-\cos^3(4\pi x)=(\cos(\pi x)+\cos(2\pi x)-\cos(4\pi x))^3$

$\cos(\pi x)=a,\quad \cos(2\pi x)=b,\quad \cos(4\pi x)=c$

$a^3+b^3-c^3=(a+b-c)^3 \Leftrightarrow a^3+b^3-c^3=(a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc)\cdot$

$\cdot(a+b-c) \Leftrightarrow a^3+b^3-c^3=a^3+a^2b-a^2c+ab^2+b^3-b^2c+ac^2+$

$+bc^2-c^3+2a^2b+2ab^2-2abc-2a^2c-2abc+2ac^2-2abc-$

$-2b^2c+2bc^2 \Leftrightarrow a^3+b^3-c^3=a^3+b^3-c^3+3a^2b-3a^2c+3ab^2-$

$-3b^2c+3ac^2+3bc^2-6abc \Leftrightarrow a^2b-a^2c+ab^2-b^2c+$

$+ac^2+bc^2-2abc=0 \Leftrightarrow (a+b)ab+c^2(a+b)=c(a^2+b^2+2ab) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a+b)(ab+c^2)=(a+b)^2\cdot c \Leftrightarrow (a+b)((a+b)c-ab-c^2)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} a+b=0 & (1) \\ ab+c^2=\cancel{ab}\,ac+bc & (2) \end{array}\right.$

(1): $a+b=0 \Leftrightarrow \cos(\pi x)+\cos(2\pi x)=0 \Leftrightarrow \cancel{2\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)=0 \Leftrightarrow}$

$\cancel{\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right)=0 \\ \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{3\pi x}{2}=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ \frac{3\pi x}{2}=-\frac{\pi}{2}+2\pi k \\ \frac{\pi x}{2} \end{array}\right.}$

$\Leftrightarrow \cos(\pi x)=-\cos(2\pi x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \pi x=\pi-2\pi x+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ \pi x=\pi+2\pi x+2\pi k \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1-2x+2k \\ x=1+2x+2k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x=2k+1 \\ x=-2k-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{2k+1}{3},\ k\in\mathbb{Z} \\ x=2t-1,\ t\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$

(2) $ab+c^2=(a+b)c \Leftrightarrow \cos(\pi x)\cos(2\pi x)+\cos^2(4\pi x)=$

$=(\cos(\pi x)+\cos(2\pi x))\cos(4\pi x)$ (*)

$\cos 2\pi x=2\cos^2\pi x-1=2a^2-1=b$

$\cos 4\pi x=2\cos^2 2\pi x-1=2b^2-1=2(2a^2-1)^2-1=2(4a^4-4a^2+1)-1=$

$=8a^4-8a^2+2-1=8a^4-8a^2+1=c$

(*) $\Leftrightarrow a(2a^2-1)+(8a^4-8a^2+1)^2=(a+2a^2-1)(8a^4-8a^2+1) \Leftrightarrow$

чистовик

~~$\Leftrightarrow 2a^3 - a + (8a^4 - 8a^2 + 1)^2$~~

$(2)\ ab + c^2 = ca + cb \Leftrightarrow a(b-c) = c(b-c) \Leftrightarrow (b-c)(a-c) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = c \\ a = c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos(2\pi x) = \cos(4\pi x) \\ \cos(\pi x) = \cos(4\pi x) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\pi x = 4\pi x + 2\pi k \\ 2\pi x = -4\pi x + 2\pi k \\ \pi x = 4\pi x + 2\pi k \\ \pi x = -4\pi x + 2\pi k \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = 4x + 2k \\ 2x = -4x + 2k \\ x = 4x + 2k \\ x = -4x + 2k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = t \\ x = \frac{k}{3} \\ x = \frac{2t}{3} \\ x = \frac{2k}{5} \end{array}\right., \begin{array}{l} t \in \mathbb{Z} \\ k \in \mathbb{Z} \end{array}$

Итого решение: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{2k+1}{3} \text{ — есть в } x = \frac{k}{3} \\ x = 2t - 1 \text{ — нечет числа, есть в } x = t \\ x = t \\ x = \frac{k}{3} \\ x = \frac{2t}{3} \text{ — есть в } x = \frac{k}{3} \\ x = \frac{2k}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = t & (1) \\ x = \frac{k}{3} & (2) \\ \cancel{x = \frac{2t}{3}} & \cancel{(3)} \\ x = \frac{2k}{5} & (3) \end{array}\right.$

$x \in [0{,}3; 1{,}6]$

$(1)\ x \in \{1\}$; $(2)\ x \in \{\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1; \frac{4}{3}\}$;

$(3)\ x \in \{\frac{2}{5}; \frac{4}{5}; \frac{6}{5}; \frac{8}{5}\}$.

Ответ: $\{\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1; \frac{4}{3}; 0{,}4; 0{,}8; 1{,}2; 1{,}6\}$.

Черновик

$f_1(x)=(x+a_1)(x^2+b_1x+6)$ $\qquad a_i, b_i>0$

$f_2(x)=(x+a_2)(x^2+b_2x+14)$

$f_3(x)=(x+a_3)(x^2+b_3x+21)$

$f_1(x)=f_2(x)=f_3(x)$

$f_1(x)=x^3+b_1x^2+6x+a_1x^2+a_1b_1x+a_16=$

$=x^3+(a_1+b_1)x^2+(6+a_1b_1)x+a_16$

$$\begin{cases}\alpha\beta\gamma=-6a_1\\ \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=a_1b_1+6\\ \alpha+\beta+\gamma=-a_1-b_1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha\beta\gamma=-6a_1\\ \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=a_1b_1+6\\ a_1+b_1=-(\alpha+\beta+\gamma)\end{cases}$$

$f_2(x)=x^3+b_2x^2+14x+a_2x^2+a_2b_2x+a_214=$

$x^3+(a_2+b_2)x^2+(14+a_2b_2)x+14a_2$

$$\begin{cases}\alpha\beta\gamma=-14a_2\\ \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=14+a_2b_2\\ \alpha+\beta+\gamma=-a_2-b_2\end{cases}$$

$f_3(x)=x^3+b_3x^2+21x+a_3x^2+a_3b_3x+21a_3=$

$=x^3+(a_3+b_3)x^2+(21+a_3b_3)x+21a_3$

$$\begin{cases}-6a_1=-14a_2=-21a_3\\ 6+a_1b_1=14+a_2b_2=21+a_3b_3\\ a_1+b_1=a_2+b_2=a_3+b_3\end{cases}$$

$\Sigma=3(a_1+b_1)$

$-6a_1=-14a_2\Rightarrow$

$a_2=\frac{6}{14}a_1=\frac{3}{7}a_1$

~~$-14a_2=-21a_3\Rightarrow$~~

$-6a_1=-21a_3\Rightarrow a_3=\frac{2}{7}a_1$

$6+a_1b_1=14+\frac{3}{7}a_1b_2=21+\frac{2}{7}a_1b_3$

$a_1b_1-\frac{3}{7}a_1b_2=8\Rightarrow a_1(b_1-\frac{3}{7}b_2)=8$

$14+\frac{3}{7}a_1b_2=21+\frac{2}{7}a_1b_3\Rightarrow 7=a_1(\frac{3}{7}b_2-\frac{2}{7}b_3)$

корни $-a_1, -a_2, -a_3$

Чистовик

Задача 5

$f_1(x)=(x+a_1)(x^2+b_1x+6)=x^3+b_1x^2+6x+a_1x^2+a_1b_1x+6a_1=$
$=x^3+(a_1+b_1)x^2+(6+a_1b_1)x+6a_1$

$f_2(x)=(x+a_2)(x^2+b_2x+14)=x^3+b_2x^2+14x+a_2x^2+a_2b_2x+a_2 14=$
$=x^3+(a_2+b_2)x^2+(14+a_2b_2)x+14a_2$

$f_3(x)=(x+a_3)(x^2+b_3x+21)=x^3+b_3x^2+21x+x^2a_3+a_3b_3x+$
$+21a_3=x^3+(a_3+b_3)x^2+(21+a_3b_3)x+21a_3$

$\forall x\ f_1(x)=f_2(x)=f_3(x) \Rightarrow$ если x_0 — корень $f_1(x)$, то $f_1(x_0)=0=f_2(x_0)=f_3(x_0) \Rightarrow$ корни $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ совпадают и равны $-a_1; -a_2; -a_3$.

$$\begin{cases} 6a_1=14a_2=21a_3=a_1a_2a_3 \\ 6+a_1b_1=14+a_2b_2=21+a_3b_3=a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3 \\ a_1+b_1=a_2+b_2=a_3+b_3=a_1+a_2+a_3 \end{cases} \Rightarrow \cancel{a_1+b_1+a_2+b_2+a_3+b_3} = \cancel{3(a_1+b_1)}$$

$6a_1=a_1a_2a_3 \Rightarrow a_2a_3=6$
$14a_2=a_1a_2a_3 \Rightarrow a_1a_3=14$
$21a_3=a_1a_2a_3 \Rightarrow a_1a_2=21$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a_2}{a_3}=\frac{21}{14}=\frac{3}{2} \\ \frac{a_2}{a_1}=\frac{6}{14}=\frac{3}{7} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_3=\frac{2}{3}a_2 \\ \cancel{a_1=\frac{7}{3}a_2} \\ \cancel{a_2=\frac{3}{7}a_1} \\ a_1=\frac{7}{3}a_2 \end{cases} \Rightarrow a_1a_3=\frac{2}{3}a_2\cdot\frac{7}{3}a_2=14 \Rightarrow \frac{14}{9}a_2^2=14 \Rightarrow$$

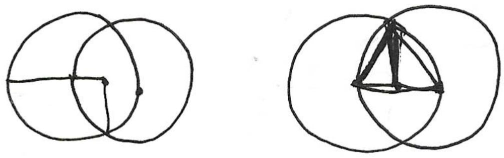
$\overset{a_2>0}{\Rightarrow} \underline{a_2=3} \Rightarrow \underline{a_1}=\frac{7}{3}\cdot 3=\underline{7}$

$\underline{a_3}=\frac{2}{3}\cdot 3=\underline{2}$

$$\begin{cases} b_1=a_2+a_3 \\ b_2=a_1+a_3 \\ b_3=a_1+a_2 \end{cases} \Rightarrow a_1+b_1+a_2+b_2+a_3+b_3=a_1+a_2+a_3+$$
$$+2(a_1+a_2+a_3)=3(a_1+a_2+a_3)=3(3+7+2)=$$
$$=36$$

Ответ: 36.

Черновик



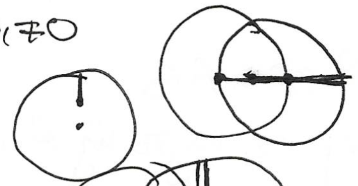
$\cancel{8 \neq n S_1 + 8x}$

$\cancel{\exists S_2 \neq 0}$

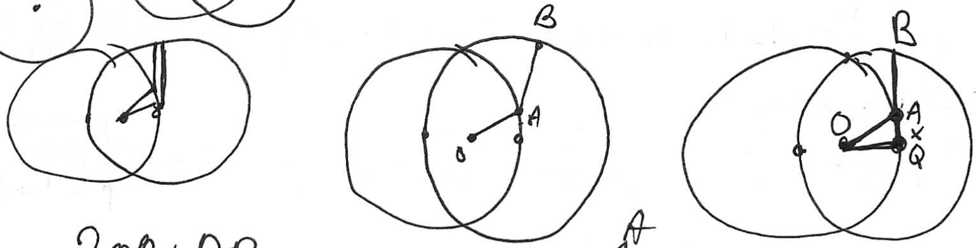
$S = 2S_2 + 1S_1$

$\exists S_1 = 0$ $S_2 = \frac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S = 2S_2 = R\sqrt{3}$

$S_1 \neq 0$

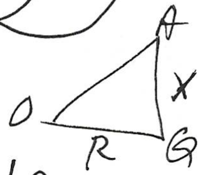


$S = 2 \cdot \frac{R}{2} + R = 2R >$



$S_{np} = 2OA + AB =$

$= 2\sqrt{R^2 + x^2} +$



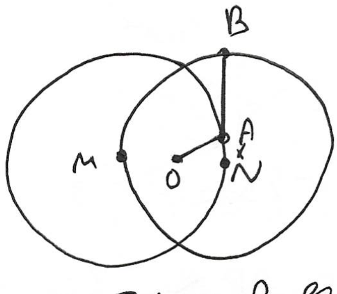
$AO = \sqrt{R^2 + x^2}$

$\frac{4}{\sqrt{5}} > 1$

$16 > 5$

Чистовик

Задача 6



$R=\frac{2-\sqrt{2}}{5}$

назовем $S_{прив.}$ хар-ку пути с учетом намокания.

~~Sт дорога намокания~~ $S_{прив}=2\cdot OA+AB$,

где $|AB|=|BN|-|AN|=R-AN$ (кратч. путь из A на грань круга).

$\exists\, AN=x$. $S_{прив}(x)=2\sqrt{ON^2+x^2}+AB=2\sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2+x^2}+R-x$

$$S'_{прив}(x)=\left(2\sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2+x^2}+R-x\right)'=$$

$$=2\frac{2x}{\cancel{2}\sqrt{\frac{R^2}{4}+x^2}}-1=\frac{2x}{\sqrt{\frac{R^2}{4}+x^2}}-1=0\Rightarrow$$

$$\frac{2x}{\underbrace{\sqrt{\frac{R^2}{4}+x^2}}_{>0}}=1\Rightarrow \underset{>0}{2x}=\sqrt{\frac{R^2}{4}+x^2}\Rightarrow 4x^2=\frac{R^2}{4}+x^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2=\frac{R^2}{4}\Rightarrow x=\sqrt{\frac{R^2}{12}}=\frac{R}{2\sqrt{3}}$$

$$*\ x=R:\ S'_{прив}(R)=\frac{2R}{\sqrt{\frac{R^2}{4}+R^2}}-1=\frac{2R\cdot2}{\sqrt{5R^2}}-1=\frac{4R}{R\sqrt{5}}-1=$$

$$=\frac{4}{\sqrt{5}}-1>0\Rightarrow x=\frac{R}{2\sqrt{3}}$$ — точка минимума $S_{прив}(x)$ (не просто экстремум)

$$S=OA+AB=\sqrt{\frac{R^2}{4}+x^2}+R-x=\sqrt{\frac{R^2}{4}+\frac{R^2}{12}}+R-\frac{R}{2\sqrt{3}}=$$

$$\cancel{=\sqrt{\frac{4R^2}{12}}+\frac{2\sqrt{3}R-R}{2\sqrt{3}}=\frac{2R+2\sqrt{3}R-R}{2\sqrt{3}}=R+2\sqrt{3}R}$$

$$=\frac{R}{\sqrt{3}}+R-\frac{R}{2\sqrt{3}}=\frac{R}{2\sqrt{3}}+R=\cancel{\frac{2-\sqrt{2}}{5\cdot2\sqrt{3}}}\,R\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}+1\right)=$$

$$=\frac{2-\sqrt{2}}{5}\cdot\frac{1+2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{2+4\sqrt{3}-\sqrt{2}-2\sqrt{6}}{10\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}+12-\sqrt{6}-6\sqrt{2}}{30}$$

Ответ: $\frac{12+2\sqrt{3}-\sqrt{6}-6\sqrt{2}}{30}\ \left(=\frac{2-\sqrt{2}}{5}\cdot\frac{1+2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right)$.