дипл II

06-06-34-35
(161.3)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Бездольной Ирины Юрьевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
06-06-34-35	80	+	+	+.	+	+	∓	−	−

(161.3)

80 (Косимедент)

Чистовик:

№1 $\sqrt{4x^2-12x+9}+\sqrt{9x^2-12x+4}-(\sqrt{x-1})^2=\sqrt{6+\sqrt{20}}-\sqrt{6-\sqrt{20}}$

$\sqrt{(2x-3)^2}+\sqrt{(3x-2)^2}-x+1=\sqrt{(\sqrt{5})^2+2\sqrt{5}+1}-\sqrt{(\sqrt{5})^2-2\sqrt{5}+1}$

$|2x-3|+|3x-2|-x+1=\sqrt{5}+1-(\sqrt{5}-1)$

Ограничение: $x-1\geq 0$, $x\geq 1$

$|2x-3|+|3x-2|-x+1=2$

$|2x-3|+|3x-2|=1+x$

Так как $1+x=3x-2-2x+3 \Rightarrow$

$\begin{cases}2x-3\leq 0\\ 3x-2\geq 0\end{cases}$; $\begin{cases}2x\leq 3\\ 3x\geq 2\end{cases}$; $\begin{cases}x\leq \frac{3}{2}\\ x\geq \frac{2}{3}\end{cases}$

$\Rightarrow$ $\frac{2}{3}$, 1, $\frac{3}{2}$, x; $x\in\left[1;\frac{3}{2}\right]$.

Ответ: $x\in\left[1;\frac{3}{2}\right]$

№3

3, $S_{A'B'C'D'}=S_{ABCD}$

Пусть т. О - центр окружности.
$AO=OB=OC$ - радиусы, $AO=3$
$AB=BC=3$ и $CD=3\sqrt{2}$
Так как $AO=OB=AB=BC=CO$
$\Rightarrow \triangle ABO$ и $\triangle BOC$ - равносторонние
$\angle ABC=60°\cdot 2=120° \Rightarrow \angle ADC=180°-120°=60°$
$\Rightarrow$ по теореме косинусов найдем AC.
$AC^2=AB^2+BC^2-2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos 120°$
$AC^2=9+9+\cancel{2}\cdot 3\cdot 3\cdot\frac{1}{\cancel{2}}=27 \Rightarrow AC=3\sqrt{3}$

По теореме синусов найдем $\angle CAD$

$\frac{3\sqrt{2}}{\sin\angle CAD}=\frac{3\sqrt{3}}{\sin 60°} \Rightarrow \sin\angle CAD=\frac{\frac{\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{2}}{2}}{3\sqrt{3}}=$

$=\frac{\cancel{\sqrt{3}}\cdot\cancel{3}\cdot\sqrt{2}}{2\cdot\cancel{3}\cancel{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \angle CAD=45° \Rightarrow \angle ACD=75°$

$\Rightarrow S_{ABCD\,max}=S_{ABC\,max}+S_{ACD\,max}=AB\cdot BC\cdot\frac{1}{2}\sin\angle ABC$
$+AC\cdot CD\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin\angle ACD=3\cdot 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+3\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{2}\cdot\sin 75°$

Чистовик

№3 (продолжение)

$\sin 75^\circ = \sin\frac{150^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 150^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-\cos(180^\circ-30^\circ)}{2}} =$

$= \sqrt{\frac{1+\cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} =$

$= \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

$\Rightarrow S_{ABCD\max} = S_{ABC\max} + S_{ACD\max} =$

$= 3\cdot 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 3\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin 75^\circ =$

$= \frac{9\sqrt{3}}{4} + \frac{9\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4}\left(1+\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2}\right)$

В обоих случаях (① и ②) ответ одинаковый

Ответ: $S_{ABCD\max} = \frac{9\sqrt{3}}{4}\left(1+\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2}\right)$

№2

~~$4^{5-\frac{1}{x}} \geq a + \sin 2^x$~~

~~$\frac{4^5}{4^{\frac{1}{x}}} \geq a + \sin 2^x$~~

~~$\frac{4^5\cdot 4^x}{4} \geq a + \sin 2^x$~~

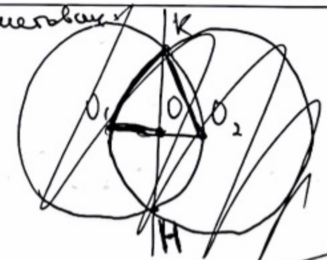
~~Пусть $2^x = t$, тогда~~

~~$4^4\cdot t^2 - a - \sin t \geq 0$~~

~~$4^{5-\frac{1}{x}} \geq 0 \Rightarrow a + \sin 2^x \geq 0$~~

06-06-34-35 (161.3)

№6 Чистовик



Точка O – домик мыши

O_1, O_2 – центры окружн.

O_1O_2 – радиус

$O_1O_2 = KO_2 = \frac{3}{2+\sqrt{2}} = R$

~~Чтобы мышь выполнила меньше всего ей нужно сначало пройти по дуге O_1K, где её будет задевать 1 поливалка, а потом O_1O – где будут задевать две, но O_1O – наименьшее необходимое расстояние которое нужно пройти мыши под поливалкой. Найдем длину пути ($\cap O_1K + O_1O$)~~

~~$O_1O = OO_2 = \frac{R}{2}$ т.к. домик мыши находится посередине.~~

~~$O_2K = R \Rightarrow \sin\angle O_1O_2K = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle O_1O_2K = 30^\circ$~~

~~$\Rightarrow$ дуга O_1K составляет $\frac{30}{360} = \frac{1}{12}$ часть от длины всей окружности~~

~~$l_{окр} = 2\pi R = \frac{2\pi\cdot 3}{2+\sqrt{2}}$~~

~~$\Rightarrow$ Путь равен $\cap O_1K + O_1O = \frac{2\pi\cdot 3}{12(2+\sqrt{2})} + \frac{3}{2(2+\sqrt{2})} =$~~

~~$= \frac{\pi+3}{2(2+\sqrt{2})} = \frac{(\pi+3)}{2(2+\sqrt{2})}$~~

~~Ответ: $\frac{\pi+3}{2(2+\sqrt{2})}$~~

№2 $4^{5-\frac{1}{x}} \geq a + \sin 2^x$ нет решений при $x > 0$

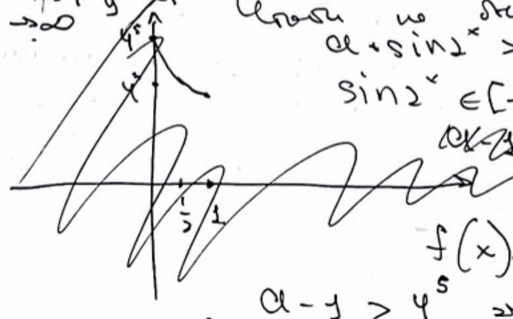
$4^{5-\frac{1}{x}} \to 4^5$ возрастающая

$x \to \infty$

Чтобы не было решений

$a + \sin 2^x > 4^{5-\frac{1}{x}}$

$\sin 2^x \in [-1; 1] \Rightarrow$



$f(x) = a + \sin 2^x$

$g(x) = 4^{5-\frac{1}{x}}$

$f(x)_{\min} > g(x)_{\max}$

$a - 1 > 4^5 \Rightarrow a > 4^5 + 1$

$\Rightarrow$ ~~$a = 4^5 + 2^{10} + 1024$~~ Ответ: $a = 1024 + 1 = 1025$

№5 $f_1(x)=f_2(x)=f_3(x)$ Чистовик:

$(x+a_1)(x^2+b_1x+12)=(x+a_2)(x^2+b_2x+18)$

$x^3+b_1x^2+12x+a_1x^2+a_1b_1x+12a_1=x^3+b_2x^2+18x$
$+a_2x^2+a_2b_2x+18a_2$

$x^3+(b_1+a_1)x^2+(12+a_1b_1)x+12a_1=x^3+(b_2+a_2)x^2$
$+(18+a_2b_2)x+18a_2 \Rightarrow$

$12a_1=18a_2=24a_3 \Rightarrow 2a_1=3a_2=4a_3$

$b_1+a_1=b_2+a_2=b_3+a_3 \Rightarrow b_1=18+2a_1$

$b_2=18+a_1$

$18+a_2b_2=12+a_1b_1=24+a_3b_3$ $b_3=18+\frac{5a_1}{2}$.

$3+a_2b_2=2+a_1b_1=4+a_3b_3$

$a_1+b_1+a_2+b_2+a_3+b_3=$

$=a_1+\frac{2a_1}{3}+\frac{a_1}{2}+b_2+b_1+b_3=$

$=$

$b_1=8=6\cdot 2$

$b_2=9$ $b_3=10$

$a_1=$ b_1-

$(\alpha+\beta+\gamma)^3-(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)=3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+3\alpha^2\gamma+3\beta^2\gamma+3\gamma^2\alpha+3\gamma^2\beta+6\alpha\beta\gamma=$
$=3(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\alpha+\gamma)$

№4 $\sin^3(\pi x)+\sin^3(2\pi x)-\sin^3(4\pi x)=$
$=(\sin(\pi x)+\sin(2\pi x)-\sin(4\pi x))^3$

~~Так как и слева, и справа - монотонно возрастающие функции значит у них одна единственная точка пересечения и один корень, который можно подобрать при $x=1$~~

~~Ответ: 1.~~

4

№4 (продолжение) Чистовик:

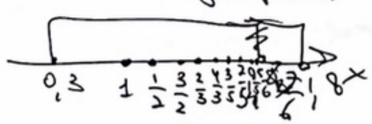
$(\sin\pi x+\sin 2\pi x-\sin 4\pi x)^3-\sin^3\pi x-\sin^3 2\pi x+\sin^3 4\pi x=0;\ 3\cdot(\sin\pi x+\sin 2\pi x)(\sin 2\pi x-\sin 4\pi x)(\sin\pi x-\sin 4\pi x)=0$

$\left[\begin{array}{l}\sin\pi x+\sin 2\pi x=0\\ \sin 2\pi x-\sin 4\pi x=0\\ \sin\pi x-\sin 4\pi x=0\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}\pi x=-2\pi x+2\pi n;\ n\in Z\\ \pi x=\pi-2\pi x+2\pi n;\ n\in Z\\ 2\pi x=4\pi x+2\pi n;\ n\in Z\\ 2\pi x=\pi-4\pi x+2\pi n;\ n\in Z\\ \pi x=4\pi x+2\pi n;\ n\in Z\\ \pi x=\pi-4\pi x+2\pi n;\ n\in Z\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}3x=2n\\ 3x=1+2n\\ 2x=-2n\\ 6x=1+2n\\ 3x=-2n\\ 5x=1+2n\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=\frac{2}{3}n\\ x=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}n\\ x=-n\\ x=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}n\\ x=-\frac{2}{3}n\\ x=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}n\end{array}\right.$

Найдем корни подбором:



Ответ: $1;\ \frac{1}{2};\ \frac{3}{2};\ \frac{2}{3};\ \frac{4}{3};\ \frac{3}{5};\ \frac{7}{5};\ \frac{9}{5};\ \frac{5}{6};\ \frac{7}{6}$

№5 (продолжение)

$f_1(x)=0\quad (x+a_1)(x^2+b_1x+12)=0$

$x_0=-a_1;\ x^2+b_1x+12=0$

$f_2(x)=0\quad \left|\begin{array}{l}x_1=-a_2\\ x_2=-a_3\end{array}\right|;\ x^2+b_2x+18=0$

$f_3(x)=0\quad ;\ x^2+b_3x+24=0$

$x_1=-a_2$ и $x_2=-a_3$ корни $x^2+b_1x+12=0$ т.к. $f_1(x)=f_2(x)=f_3(x)$ по теореме Виета:

$\left[\begin{array}{l}x_1+x_2=-b_1\\ x_1\cdot x_2=12\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}a_3\cdot a_2=12\\ -a_3-a_2=-b_1\end{array}\right.$

Аналогично: x_0 и x_2 корни $x^2+b_2x+18=0$ и x_0 и x_1 корни $x^2+b_3x+24=0$

$\left[\begin{array}{l}x_0+x_2=-b_2\\ x_0\cdot x_2=18\end{array}\right.$, $\left[\begin{array}{l}x_0+x_1=-b_3\\ x_0\cdot x_1=24\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}-a_1-a_3=-b_2\\ a_1\cdot a_3=18\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}-a_2-a_1=-b_3\\ a_2\cdot a_1=24\end{array}\right.$

$a_1=6\qquad a_1+a_3=b_2\ \Rightarrow b_2=9$

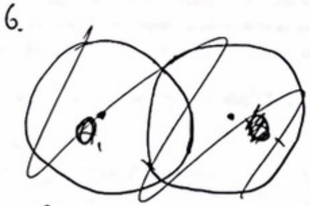
$a_2=4\qquad a_2+a_1=b_3\quad b_3=10$

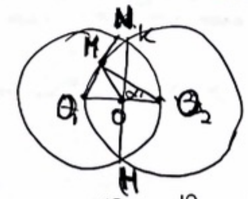
$a_3=3\qquad a_3+a_2=b_1\quad b_1=7$

$\Rightarrow a_1+a_2+a_3+b_1+b_2+b_3=6+4+3+9+10+7=13+19+7=32+7=39$

Ответ: 39

№6.





Пусть нора в точке O. Пусть мышь выбегает из точки O и бежит до точки M; потом бежит по MN. Пусть OM и MN-кратчайшие. Тогда путь по NM-O равен пути по OMN. Найдем сначало минимальное OM. Пусть $\angle O_1O_2M=\alpha$; $\alpha\in[0;60^\circ]$ т.к. максимальный угол когда MO_2 совпадает с KO_2, тогда т.к. $O_1O=OO_2=\frac{R}{2}$ и $MO_2=R$, то найдем в $\triangle O_2OM$ по теореме косинусов:

$MO^2=OO_2^2+MO_2^2-2\cdot MO_2\cdot OO_2\cdot\cos\alpha$,

$MO=\sqrt{R^2+\frac{R^2}{4}-\frac{2R\cdot R\cdot\cos\alpha}{2}}$

$MO=\sqrt{R^2(1+\frac{1}{4}-\cos\alpha)}=R\cdot\sqrt{\frac{5}{4}-\cos\alpha}$

$MN=NO_1-MO_1=R-MO_1$

Черновик:

$\cancel{a_1 + a_2}$

$(a_1+a_2)(a_1^2+b_2a_1+18)=2a_1\cdot(a_1^2+b_1a_1+12)$

$a_1^3+b_2a_1+18a_1+a_1^2\cdot a_2+b_2a_1a_2+18a_2=2a_1^3+2a_1^2b_1+$
$+24a_1$

$x_1+x_2=-b_1 \quad -b_1=8$

$x_1\cdot x_2=12$

$x_1^2+x_2^2+2x_1x_2=b_1^2$

$x_1^2+x_2^2+24=b_1^2$

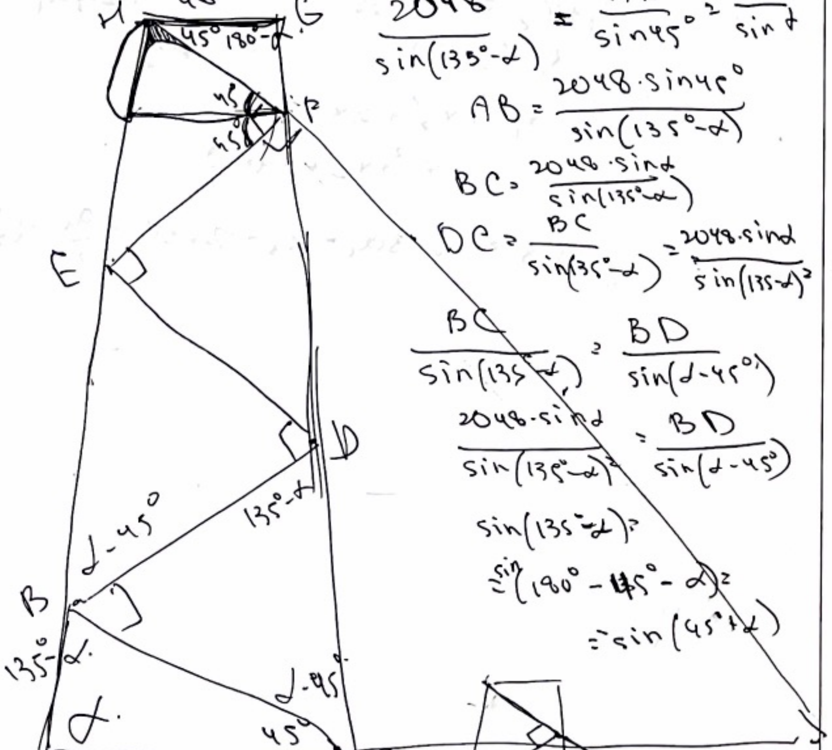
$b_3=18+3a_1-a_3=18+3a_1-\frac{a_1}{2}=18+\frac{5a_1}{2}$

Черновик:

$\triangle QMH \sim \triangle DBC$ $\quad 0 \; \frac{1}{2} \; \frac{1}{4} \; \frac{1}{4^4} \; \frac{2}{4^{2,5}}$

$\frac{QM}{DB} = \frac{QH}{DC}$

$180° -$



$\frac{2048}{\sin(135°-\alpha)} = \frac{AB}{\sin 45°} = \frac{BC}{\sin\alpha}$

$AB = \frac{2048 \cdot \sin 45°}{\sin(135°-\alpha)}$

$BC = \frac{2048 \cdot \sin\alpha}{\sin(135°-\alpha)}$

$DC = \frac{BC}{\sin(135°-\alpha)} = \frac{2048 \cdot \sin\alpha}{\sin(135-\alpha)^2}$

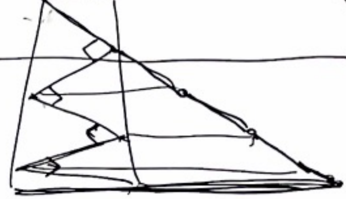
$\frac{BC}{\sin(135-\alpha)} = \frac{BD}{\sin(\alpha-45°)}$

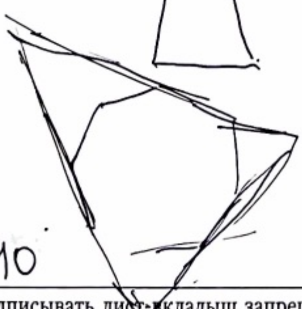
$\frac{2048 \cdot \sin\alpha}{\sin(135°-\alpha)^2} = \frac{BD}{\sin(\alpha-45°)}$

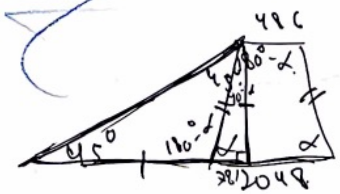
$\sin(135°-\alpha) =$

$= \sin(180° - 45° - \alpha) =$

$= \sin(45°+\alpha)$





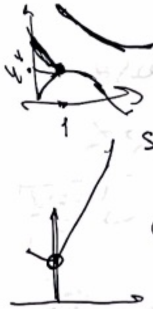


$\frac{781}{\cos\alpha}$

Черновик:

$b_1 + a_1 = b_2 + a_2 \qquad 2a_1 = 3a_2 \qquad \boxed{a_1 = \frac{3a_2}{2}}$

$12 + b_1 a_1 = 18 + a_2 b_2 \qquad \boxed{a_2 = \frac{2a_1}{3}}$



$b_1 a_1 = 6 + a_2 b_2$

$b_1 \cdot \cancel{a_1} = 6 + \frac{2 \cdot \cancel{a_1} \cdot b_2}{3}$

$\sin 2x$

$\sin 2x$

$b_1 = 6 + \frac{2b_2}{3} \qquad b_1 = 6 + \frac{2(18+a_1)}{3} =$

$= 6 + 12 + 2a_1 = 18 + a_1$

$= \boxed{18 + 2a_1}$

$6 + \frac{2b_2}{3} + a_1 = b_2 + \frac{2a_1}{3}$

$6 + \frac{a_1}{3} = \frac{b_2}{3} \Rightarrow \boxed{b_2 = 18 + a_1}$

$(x+a_1)(x^2+b_1 x+12) = (x+a_3)(x^2+b_2 x+1$

$b_2 + a_2 = a_2 + a_3 \qquad 12a_1 = 24a_3$

$18 + a_2 b_2 = 24 + a_3 b_3 \qquad 135° - \alpha$

$90 - 180° + \alpha =$

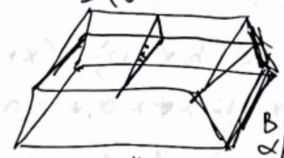
$\cos\alpha = \frac{\frac{R}{2}}{R} = \frac{1}{2} \quad \alpha = 30°$

α-угол
наклона
пир.

$\triangle BDC \sim \triangle$

$\alpha = 45°$

2048
$-\frac{486}{1562} \Big| 2$
$-\frac{14}{16}$
781



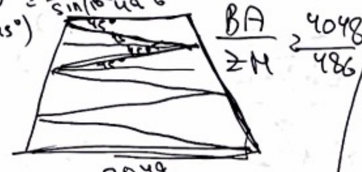
$180° - \alpha - 45° =$

$180° - \alpha -$

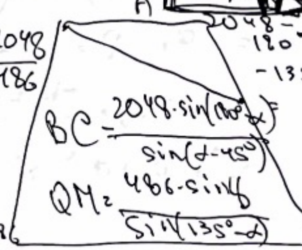
$-135° + \alpha$

$\frac{BA}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2048}{\sin(\alpha-45°)} = \frac{BC}{\sin(180°-\alpha)}$

$180° - \alpha -$



$\frac{BA}{ZM} = \frac{4048}{486}$



$BC = \frac{2048 \cdot \sin(180°-\alpha)}{\sin(\alpha-45°)}$

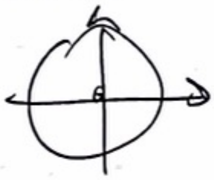
$QM = \frac{486 \cdot \sin\alpha}{\sin(135°-\alpha)}$

2048

$BA = \frac{2048 \cdot \sqrt{2}}{2\sin(\alpha-45°)}$

$\frac{\sqrt{2} \cdot 4048}{2\, BA} = \frac{\sqrt{2} \cdot 486}{2 \cdot ZM}$

Черновик:



$\cancel{\sin 2\alpha = 2\sin}$

$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} =$

$1-\sin^2\frac{\alpha}{2}$

$= 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \Rightarrow$

$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2} =$

$1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = \cos\alpha$

$\frac{1-\cos\alpha}{2} = \sin^2\frac{\alpha}{2}$

$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

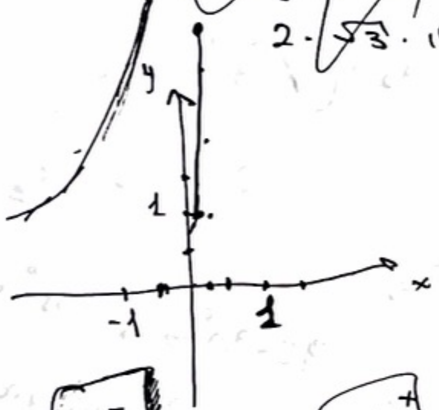
$= \sqrt{8+4\sqrt{3}}$

$2\cdot 2\cdot\sqrt{3}$

$3+4=7$

$2+9\cdot 4\cdot\sqrt{3}$

$2\cdot\sqrt{3}\cdot 18$

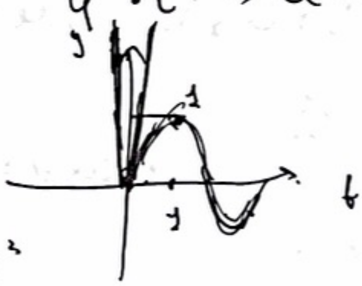


$4^5 = 2^{10} = 8^{\frac{5}{2}} =$

при x-min

$$\begin{array}{r} 256 \\ \times\ 4 \\ \hline 1024 \end{array} \qquad 4^{2.5} \qquad \begin{array}{r} 16 \\ \times\ 16 \\ \hline 96 \\ +\ 16 \\ \hline 256 \end{array}$$

$4^4\cdot t^2 \geq a+\sin t$



$\boxed{\frac{4^5}{4^{x}}} \geq a+\sin 2^{x}$ $\in[-1;1]$

$< 4^{a+1}$ $\quad 4^3$

$\sin^3(\pi x)+\sin^3(2\pi x)-\sin^3(4\pi x) = (\sin(\pi x)+\sin(2\pi x)-$
$-\sin(4\pi x))^3$

$(x+a_1)(x^2+b_1x+12) = (x+a_2)(x^2+b_2x+18)$

$\cancel{x^3}+b_1x^2+12x+x^2a_1+b_1a_1x+12a_1 = \cancel{x^3}+b_2x^2+18x+$
$+a_2x^2+a_2b_2x+18a_2$

$(b_1+a_1-b_2-a_2)x^2+(-6+b_1a_1-a_2b_2)x+12a_1-18a_2=0$

$x=-a_1$ $\quad D = b_1^2-4\cdot 12$ $\quad 12a_1 = 18a_2$

$x_{1/2} = \frac{-b_1\pm\sqrt{b_1^2-4\cdot 12}}{2}$ $\quad 2a_1 = 3a_2$

$x^3+(b_1+a_1)x^2+(12+b_1a_1)x+12a_1 = x^3+(b_2+a_2)x^2$
$+(18+a_2b_2)x+18a_2$

12