0 353749 120004

35-37-49-12
(161.34)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

Бессонова Захара Андреевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

+1 лист

+1 лист

Дата

«13» апреля 2025 года

Подпись участника

65 (шестьдесят пять) ЧИСТОВИК Нег / Негаев
Нор / Орёл И.А.

Задача 1.

$$\sqrt{4x^2-12x+9}+\sqrt{x^2-6x+9}+\left(\sqrt{-(x-2)}\right)^2=\sqrt{3+\sqrt{8}}-$$
$$-\sqrt{3-\sqrt{8}}$$

Упростим для начала величину $t=\sqrt{3+\sqrt{8}}-\sqrt{3-\sqrt{8}}$; очевидно, что

$3+\sqrt{8}>3-\sqrt{8} \Rightarrow \sqrt{3+\sqrt{8}}>\sqrt{3-\sqrt{8}}$

$\Rightarrow \sqrt{3+\sqrt{8}}-\sqrt{3-\sqrt{8}}>0 \Rightarrow t>0$

$\Rightarrow$ Возведём обе части равенства $t=$ $=\sqrt{3+\sqrt{8}}-\sqrt{3-\sqrt{8}}$ в квадрат:

$t^2=3+\cancel{\sqrt{8}}-2\sqrt{(3+\sqrt{8})(3-\sqrt{8})}+3-\cancel{\sqrt{8}}$

$t^2=6-2\sqrt{9-8}=6-2=4 \Rightarrow t=2$

$\Rightarrow \sqrt{3+\sqrt{8}}-\sqrt{3-\sqrt{8}}=2$

$\Rightarrow \sqrt{4x^2-12x+9}+\sqrt{x^2-6x+9}+\left(\sqrt{-(x-2)}\right)^2=2$

$\sqrt{(2x-3)^2}+\sqrt{(x-3)^2}+\left(\sqrt{-(x-2)}\right)^2=2$

$|2x-3|+|x-3|+\left(\sqrt{-(x-2)}\right)^2=2$

Условие: $-(x-2)\geq 0$
$x-2\leq 0 \Rightarrow \underline{x\leq 2}$

$|2x-3|+|x-3|-x+\cancel{2}=\cancel{2}$

$|2x-3|+|x-3|-x=0$

По условию, $x\leq 2 \Rightarrow x-3\leq -1<0$

$\Rightarrow |x-3|=3-x$

ЧИСТОВИК

$\Rightarrow |2x-3|+3-x-x=0$

$|2x-3|+3-2x=0$

$\Rightarrow$ I-ый случай: $2x-3 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant \frac{3}{2}$

$\Rightarrow x \in [\frac{3}{2};2]$

$\Rightarrow \cancel{2x}-\cancel{3}+\cancel{3}-\cancel{2x}=0$

$0=0$ — истина

$\Rightarrow x \in [\frac{3}{2};2]$ — решение

II-ой случай: $2x-3<0 \Rightarrow x<\frac{3}{2}$

$\Rightarrow 3-2x+3-2x=0$

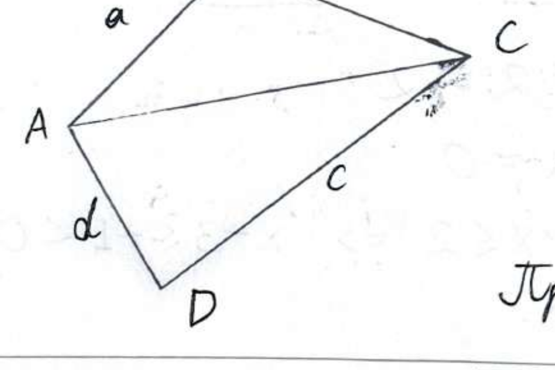
$6-4x=0$

$3-2x=0 \quad x=\frac{3}{2} \quad \varnothing$

$\Rightarrow$ Ответ: $x \in [\frac{3}{2};2]$

Задача 3.

Назовём наш четырёхугольник ABCD. Заметим, что площадь четырёхугольника не зависит от порядка расположения сторон. Докажем этом.



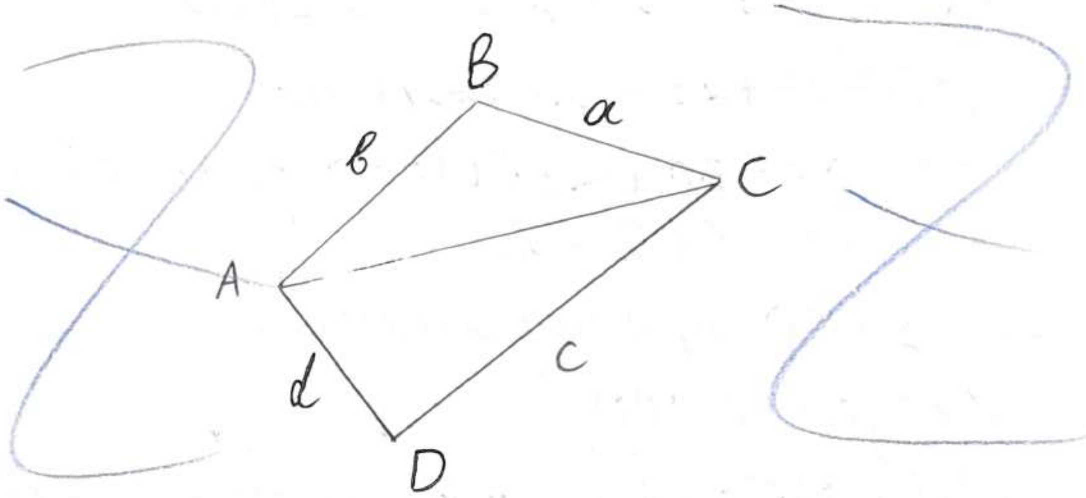
Пусть длины сторон четырёхугольника равны a, b, c, d ($AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $AD=d$)

Проведём в четырёх-

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
35-37-49-12		+	+	∓	+	+	−	0	0

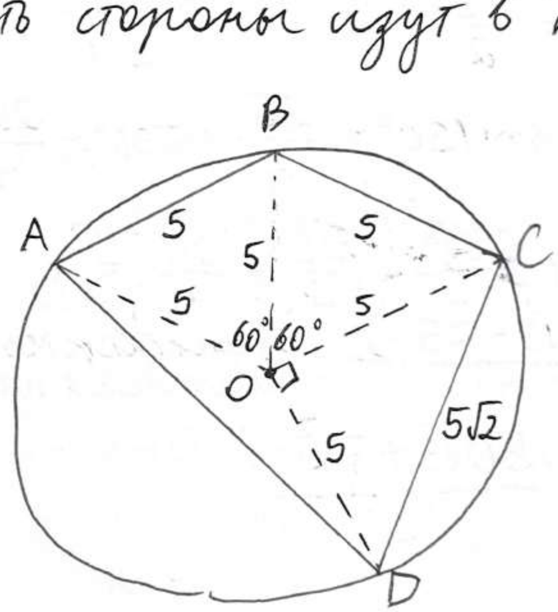
ЧИСТОВИК

угольнике диагональ AC и посмотрим, например, на $\triangle ABC$. „Перевернём" этот треугольник так, чтобы сторона a была в правой части рисунка, а сторона в — в левой части рисунка:



Площадь четырёхугольника при этом не изменится, т.к. сам треугольник ABC мы не меняли — мы его просто перевернули, а ~~до~~ порядок следования сторон поменяется.

Теперь возвращаемся к задаче. Пусть стороны идут в порядке $5, 5, 5\sqrt{2}$:



Обозначим т. O — центр описанной около ABCD окружности.

По условию, радиус окружности равен 5

$\Rightarrow AO = 5 \quad BO = 5$

$CO = 5 \quad OD = 5$

ЧИСТОВИК

$\Rightarrow \triangle AOB$ и $\triangle BOC$ — равносторонние

$\Rightarrow \angle AOB = \angle BOC = 60°$;

Из $\triangle COB$ по теореме косинусов:

$$CD^2 = CO^2 + OD^2 - 2\cdot CO\cdot OD\cdot \cos\angle COD$$

$$\Rightarrow (5\sqrt{2})^2 = 5^2 + 5^2 - 2\cdot 5\cdot 5\cdot \cos\angle COD$$

$$\cancel{50} = \cancel{25+25} - 50\cdot\cos\angle COD$$

$$\Rightarrow 0 = -50\cdot\cos\angle COD \Rightarrow \cos\angle COD = 0$$

$$\Rightarrow \angle COD = 90°$$

$\Rightarrow \triangle COD$ — прямоугольный;

Найдём $\angle AOD$:

$$\angle AOD = 360° - \angle AOB - \angle BOC - \angle COD = 360° - 60° - 60° - 90° = 150°;$$

$$S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{AOD}$$

$$S_{AOB} = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5\cdot \sin 60° = \frac{25}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}\cdot 25}{4}$$

$$S_{BOC} = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5 \sin 60° = \frac{25\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{COD} = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5 = \frac{25}{2}$$

$$S_{AOD} = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5\cdot \sin 150° = \frac{25}{2}\cdot \sin 30° = \frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{25\sqrt{3}}{4} + \frac{25\sqrt{3}}{4} + \frac{25}{2} + \frac{25}{4} =$$

$$= \frac{25\sqrt{3}}{2} + \frac{75}{4} = \frac{50\sqrt{3}+75}{4}$$ $\leftarrow$ единственно возможная площадь

<u>Ответ:</u> $S_{max} = \dfrac{50\sqrt{3}+75}{4}$

35-37-49-12 (161.34)

ЧИСТОВИК

Задача 4.

$\sin^3(\pi x) - \sin^3(2\pi x) + \sin^3(4\pi x) = (\sin(\pi x) - \sin(2\pi x) +$
$+ \sin(4\pi x))^3$

Замена: $a = \sin(\pi x)$ $\quad c = \sin(4\pi x)$
$b = \sin(2\pi x)$

$\Rightarrow a^3 - b^3 + c^3 = (a-b+c)^3$;

$a^3 - b^3 + c^3 = (a-b+c)(a^2+b^2+c^2+2ac-2ab-2bc)$;

$\cancel{a^3} \cancel{-b^3} \cancel{+c^3} = \cancel{a^3} + ab^2 + ac^2 + 2a^2c - 2a^2b - 2abc - ba^2 -$
$\cancel{-b^3} - bc^2 - 2abc + 2ab^2 + 2b^2c + a^2c + cb^2 \cancel{+c^3} +$
$+ 2ac^2 - 2abc - 2bc^2$;

$3ab^2 + 3ac^2 + 3a^2c - 3a^2b - 6abc - 3bc^2 + 3b^2c = 0$

$ab^2 + ac^2 + a^2c - a^2b - 2abc - bc^2 + b^2c = 0$

$ab^2 - a^2b + ac^2 - bc^2 + a^2c - abc - abc + b^2c = 0$

$ab(b-a) + c^2(a-b) + ac(a-b) - bc(a-b) = 0$

$(a-b)(c^2 + ac - bc - ab) = 0$

$(a-b)(c(a+c) - b(a+c)) = 0$

$(a-b)(a+c)(c-b) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a-b=0 \\ a+c=0 \\ c-b=0 \end{array}\right.$

1) $a - b = 0 \quad a = b \Rightarrow \sin(\pi x) = \sin(2\pi x)$

$\sin(2\pi x) - \sin\pi x = 0$

$2\sin(\pi x)\cdot\cos(\pi x) - \sin(\pi x) = 0$

$\sin(\pi x)(2\cos(\pi x) - 1) = 0$

$\Rightarrow \sin(\pi x) = 0$ или $\cos(\pi x) = \frac{1}{2}$

$\pi x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$ $\qquad \pi x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

$x = n$ $\qquad x = \pm\frac{1}{3} + 2n$

ЧИСТОВИК

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = n \\ x = \frac{1}{3} + 2n \\ x = -\frac{1}{3} + 2n \end{array}\right., n \in \mathbb{Z}$$

Отберём корни:

1. $0,3 \le n \le 1,6 \Rightarrow n = 1 \quad x = 1$

2. $0,3 \le \frac{1}{3} + 2n \le 1,6 \mid \cdot 3$

$0,9 \le 1 + 6n \le 4,8$

$-0,1 \le 6n \le 3,8$

$\frac{-0,1}{6} \le n \le \frac{3,8}{6} \Rightarrow n = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

3. $0,3 \le -\frac{1}{3} + 2n \le 1,6 \mid \cdot 3$

$0,9 \le -1 + 6n \le 4,8$

$1,9 \le 6n \le 5,8$

$\frac{1,9}{6} \le n \le \frac{5,8}{6} \Rightarrow n \in \varnothing$

2) $a + c = 0 \Rightarrow \sin(\pi x) + \sin(4\pi x) = 0$

$2\sin\left(\frac{\pi x + 4\pi x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{4\pi x - \pi x}{2}\right) = 0$

$2\sin\left(\frac{5\pi x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) = 0$

$\Rightarrow \sin\left(\frac{5\pi x}{2}\right) = 0$ или $\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) = 0$

$\frac{5\pi x}{2} = \pi n, n \in \mathbb{Z}$ $\qquad$ $\frac{3\pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$\frac{5x}{2} = n$ $\qquad$ $\frac{3x}{2} = \frac{1}{2} + n$

$x = \frac{2n}{5}$ $\qquad$ $3x = 1 + 2n$

$x = \frac{1 + 2n}{3}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{2n}{5} \\ x = \frac{2n+1}{3} \end{array}\right., n \in \mathbb{Z}$$

ЧИСТОВИК

Отберём корни:

1. $0{,}3 \le \frac{2n}{5} \le 1{,}6 \quad |\cdot 5$

$1{,}5 \le 2n \le 8$

$\frac{3}{4} \le n \le 4 \Rightarrow n = 1, 2, 3, 4$

$x = \frac{2}{5} \quad x = \frac{4}{5} \quad x = \frac{6}{5} \quad x = \frac{8}{5}$

3) $c - b = 0 \Rightarrow \sin(4\pi x) - \sin(2\pi x) = 0$

$2\sin\left(\frac{4\pi x - 2\pi x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{4\pi x + 2\pi x}{2}\right) = 0$

$2\sin(\pi x)\cdot\cos(3\pi x) = 0$

$\Rightarrow \sin(\pi x) = 0$ или $\cos(3\pi x) = 0$

уже рассматривали в случае 1)

$3\pi x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

$3x = \frac{1}{2} + n$

$x = \frac{1}{6} + \frac{n}{3}$

Отберём корни:

$0{,}3 \le \frac{1}{6} + \frac{n}{3} \le 1{,}6 \quad |\cdot 6$

$1{,}8 \le 1 + 2n \le 9{,}6$

$0{,}8 \le 2n \le 8{,}6$

$0{,}4 \le n \le 4{,}3 \Rightarrow n = 1, 2, 3, 4$

$\Rightarrow x = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$

$x = \frac{1}{6} + \frac{3}{3} = \frac{1}{6} + 1 = \frac{7}{6}$

$x = \frac{1}{6} + \frac{4}{3} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

Осталось перечислить все решения:

ЧИСТОВИК

Ответ: $1;\ \frac{1}{3};\ \frac{2}{5};\ \frac{4}{5};\ \frac{6}{5};\ \frac{8}{5};\ \frac{1}{2};\ \frac{5}{6};\ \frac{7}{6};\ \frac{3}{2}$

Задача 5.

$$f_1(x) = (x+a_1)(x^2+b_1x+6)$$
$$f_2(x) = (x+a_2)(x^2+b_2x+8)$$
$$f_3(x) = (x+a_3)(x^2+b_3x+12);$$

$$f_1(x) = x^3+b_1x^2+6x+a_1x^2+a_1b_1x+6a_1 = x^3+x^2(b_1+a_1)+x(6+a_1b_1)+6a_1;$$

$$f_2(x) = x^3+b_2x^2+8x+a_2x^2+a_2b_2x+8a_2 = x^3+x^2(b_2+a_2)+x(8+a_2b_2)+8a_2;$$

$$f_3(x) = x^3+b_3x^2+12x+a_3x^2+a_3b_3x+12a_3 = x^3+x^2(b_3+a_3)+x(12+a_3b_3)+12a_3$$

Чтобы равенство $f_1(x)=f_2(x)=f_3(x)$ выполнялось для любых $x \in R$, необходимо, чтобы функции f_1; f_2 и f_3 были одинаковыми.

$\Rightarrow$ Коэффициенты при x^2, x и свободные члены должны быть одинаковыми:

$$\begin{cases} 6a_1 = 8a_2 \\ 6a_1 = 12a_3 \\ 6+a_1b_1 = 8+a_2b_2 \\ 6+a_1b_1 = 12+a_3b_3 \\ a_1+b_1 = a_2+b_2 \\ a_1+b_1 = a_3+b_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a_1 = 4a_2 & (1) \\ a_1 = 2a_3 & (2) \\ a_1b_1 = 2+a_2b_2 & (3) \\ a_1b_1 = 6+a_3b_3 & (4) \\ a_1+b_1 = a_2+b_2 & (5) \\ a_1+b_1 = a_3+b_3 & (6) \end{cases}$$

ЧИСТОВИК

Нам нужно найти сумму $S = a_1+b_1+a_2+b_2+a_3+b_3$

Т.к $a_2+b_2 = a_1+b_1 = a_3+b_3$, то $S = 3(a_1+b_1)$

Из уравнений (1) и (2): $a_2 = \frac{3a_1}{4}$ $a_3 = \frac{a_1}{2}$

Подставим в уравнения (5) и (6):

$$a_1+b_1 = \frac{3a_1}{4}+b_2 \qquad a_1+b_1 = \frac{a_1}{2}+b_3$$

$$b_1+\frac{a_1}{4} = b_2 \ (7) \qquad b_1+\frac{a_1}{2} = b_3 \ (8)$$

Подставим в уравнения (3) и (4):

$$\begin{cases} a_1b_1 = 2+\frac{3a_1}{4}\left(b_1+\frac{a_1}{4}\right) \\ a_1b_1 = 6+\frac{a_1}{2}\left(b_1+\frac{a_1}{2}\right) \end{cases}; \begin{cases} a_1b_1 = 2+\frac{3a_1b_1}{4}+\frac{3a_1^2}{16} \\ a_1b_1 = 6+\frac{a_1b_1}{2}+\frac{a_1^2}{4} \end{cases},$$

$$\begin{cases} a_1b_1-\frac{3a_1b_1}{4} = 2+\frac{3a_1^2}{16} \\ a_1b_1-\frac{a_1b_1}{2} = 6+\frac{a_1^2}{4} \end{cases}; \begin{cases} \frac{a_1b_1}{4} = 2+\frac{3a_1^2}{16} \\ \frac{a_1b_1}{2} = 6+\frac{a_1^2}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow - \begin{cases} \frac{a_1b_1}{2} = 4+\frac{6a_1^2}{16} \\ \frac{a_1b_1}{2} = 6+\frac{a_1^2}{4} \end{cases}$$

$$0 = 2+\frac{a_1^2}{4}-\frac{6a_1^2}{16} \quad \Big| \cdot 16$$

$$0 = 32+4a_1^2-6a_1^2; \quad 0 = 32-2a_1^2$$

$2a_1^2 = 32 \quad a_1^2 = 16 \Rightarrow a_1 = 4$ (по условию, $a_1>0$)

$$\Rightarrow \frac{4b_1}{2} = 6+\frac{4^2}{4}$$

$$2b_1 = 6+4 \quad 2b_1 = 10 \quad b_1 = 5$$

$$\Rightarrow S = 3(a_1+b_1) = 3(4+5) = 3\cdot 9 = 27$$

Если посмотреть на формулы (1), (2), (7)

ЧИСТОВИК

и (8), то становится понятно, что при $a_1 = 4$ и $b_1 = 5$ числа a_2, a_3, b_2, b_3 также получаются положительными, так что противоречий условию нет

=> Ответ: 27

Задача 2.

$3^{5-\frac{1}{x}} \geq a + \sin 4^x$ - не имеет ни одного решения при $x > 0$

Проанализируем отдельно функции $f(x) = 3^{5-\frac{1}{x}}$ и $g(x) = \sin 4^x$

1) $f(x) = 3^{5-\frac{1}{x}}$

Функция $\frac{1}{x}$ при $x>0$ убывает от $+\infty$ до 0 (не достигая нуля)

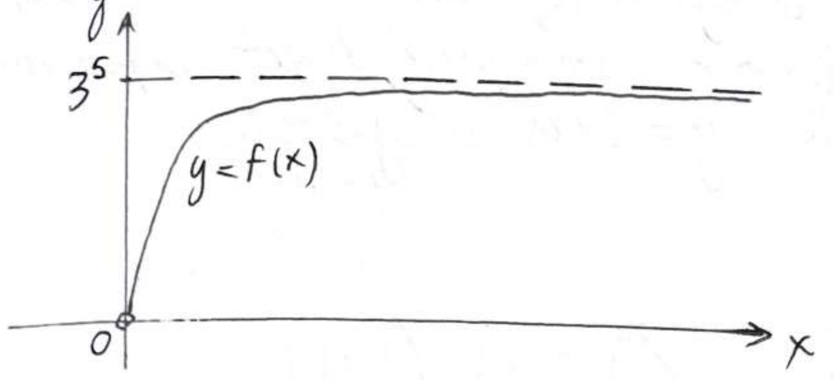
=> $-\frac{1}{x}$ возрастает от $-\infty$ до 0 (не достигая 0)

=> $5-\frac{1}{x}$ возрастает от $-\infty$ до 5 (не достигая 5)

=> $3^{5-\frac{1}{x}}$ возрастает от 0 (к нулю функция лишь стремится при $x \to 0$, но в точке 0 значение функции не определено) до 3^5 (не достигая 3^5, а лишь стремясь к этому значению при $x \to \infty$)

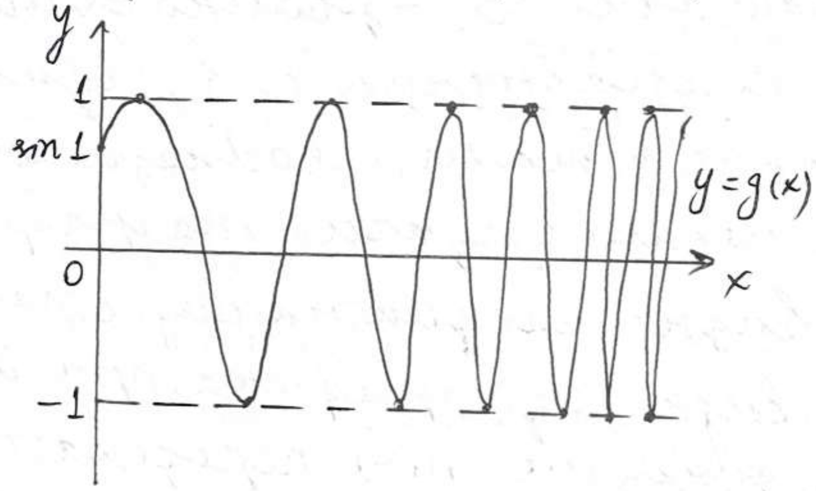
ЧИСТОВИК

=> График функции $f(x) = 3^{5-\frac{1}{x}}$ выглядит примерно следующим образом (при $x>0$)



2) $g(x) = \sin 4^x$

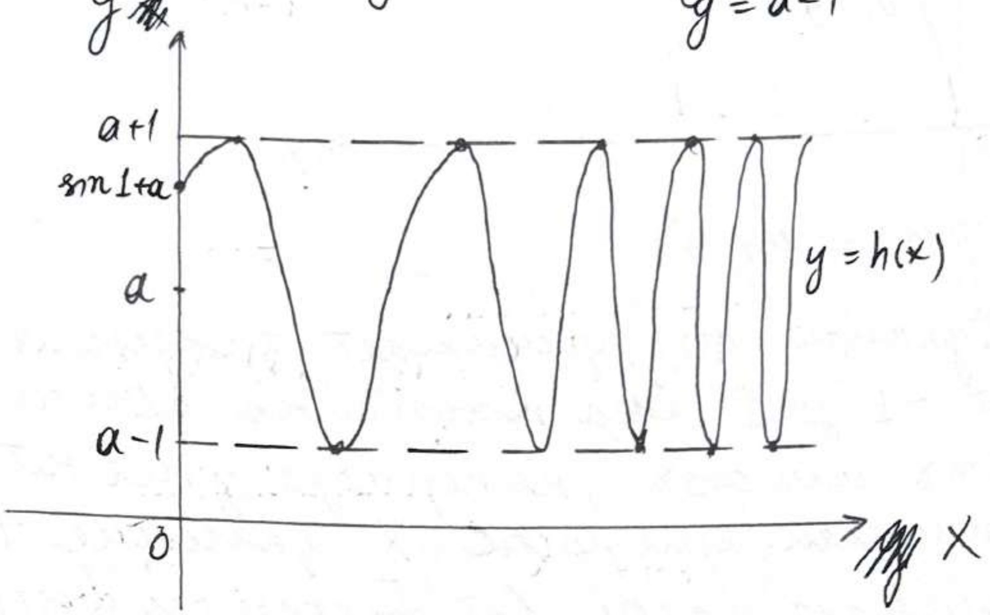
Функция $g(x)$ принимает значения от -1 до 1. Она похожа на обычный $\sin x$ или $\cos x$, но периода у неё нет — так как при росте X значение 4^x начинает расти всё быстрее и быстрее, функция $\sin 4^x$ при росте x начинает колебаться от -1 до 1 всё с большей частотой. График $g(x) = \sin 4^x$ выглядит примерно так (при $x>0$):



Если мы к функции $g(x)$ прибавляем некоторый положительный пара-

ЧИСТОВИК

метр a, получая функцию $h(x)=a+\sin 4^x$, то наша функция $g(x)$ просто сдвигается на a единиц масштаба вверх; после сдвига график будет ограничен прямыми $y = 1+a$ и ~~$y=1-a$~~ $y = a-1$:

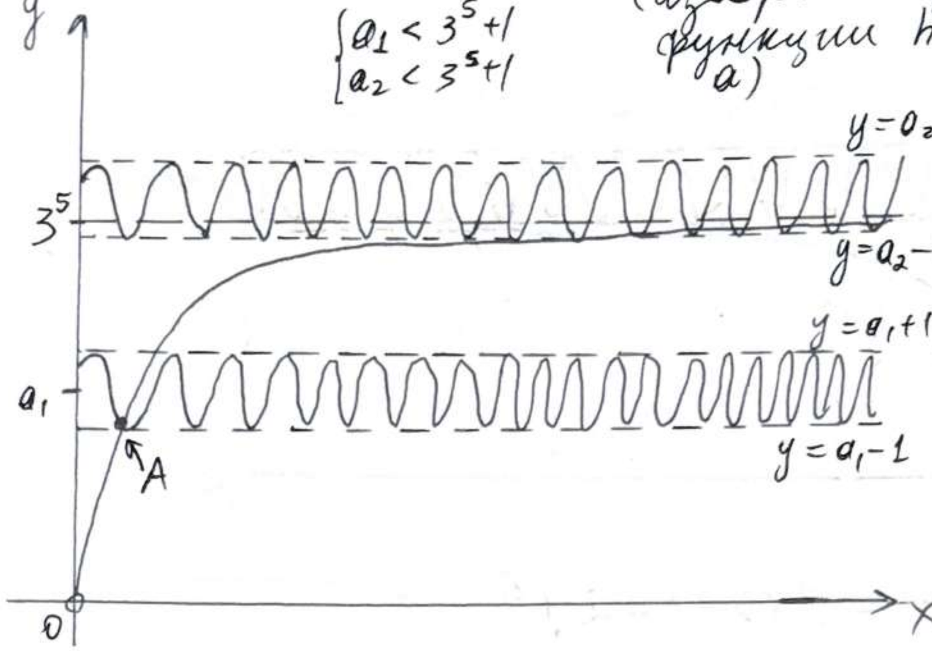


Теперь начертим графику функций $f(x)$ и $h(x)$ в одной системе координат. Масштаб при этом соблюдать не будем, так как 3^5 - довольно большое число по сравнению с 1, однако все важные детали, необходимые для решения задачи, на графике будут видны (график на след. странице)

Как видно из графика, при $a<3^5+1$ график функции $h(x)$ пересекает график функции $f(x)$ хотя бы в одной точке.

~~Минимальным значением для a при котором графики функций $f(x)$ и $h(x)$~~

ЧИСТОВИК
(изображено два варианта функции $h(x)$ при разных a)

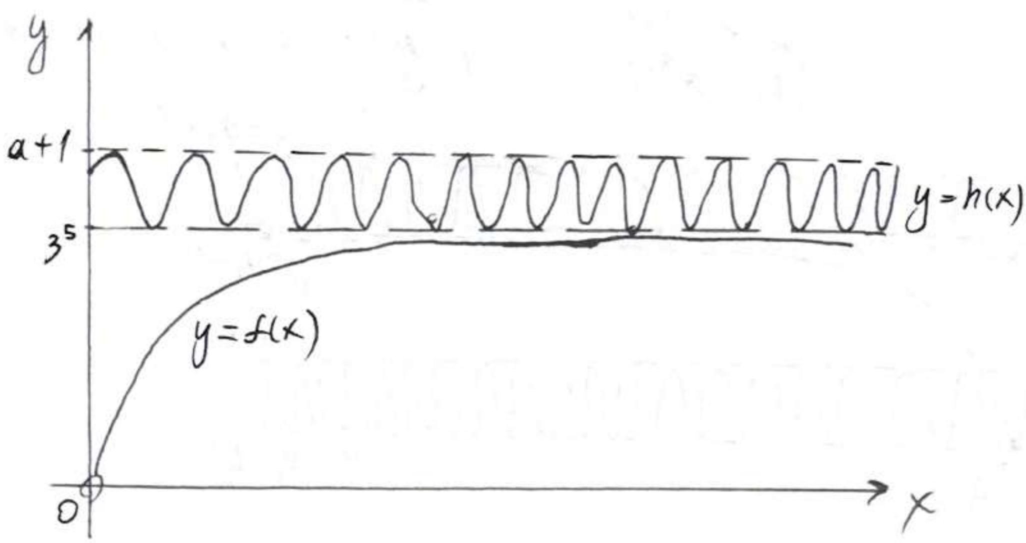


А если графики $f(x)$ и $h(x)$ пересекаются хотя бы в одной точке, то это означает, что неравенство $f(x) \geq h(x)$ имеет решение (по крайней мере, есть одно решения, при котором $f(x) = h(x)$)

Минимальным значением для a, при котором графики $f(x)$ и $h(x)$ не пересекаются, и при этом график $h(x)$ лежит выше графика $f(x)$, является значение $a = 3^5+1$. При таком a прямая $y = a-1$, которая снизу ограничивает график $y=h(x)$, совпадает с прямой $y=3^5$, к которой стремится, но никогда её не достигнет график функции $f(x)$.

Нарисуем графики $f(x)$ и $h(x)$ при $a = 3^5+1$:

ЧИСТОВИК

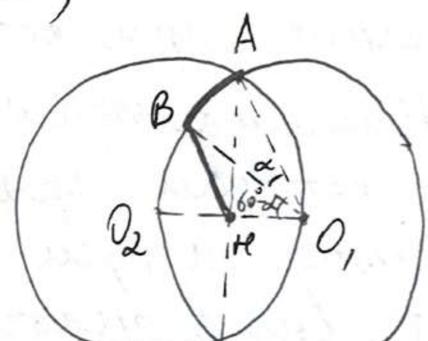


$3^5+1=243+1=244$

=> <u>Ответ:</u> $a=244$

<u>Задача 6.</u>

Мышке, очевидно, легче всего бежать либо по прямой от т. A до норы (т. H), либо сначала пробежать некоторое расстояние по окружности с центром O_1 (чтобы не попадать лишний раз под две поливалки), а затем по прямой от точки B до норы.



Пусть мышь пробежала дугу AB величиной α, а затем отрезок BH.

$\Rightarrow AB = \alpha \cdot R = \frac{\alpha}{2+\sqrt{2}}$

По теореме косинусов для $\triangle BHO_1$: ЧЕРНОВИК

$BH^2 = BO_1^2 + HO_1^2 - 2 \cdot BO_1 \cdot HO_1 \cdot \cos\angle BO_1H$;

$\angle BO_1H = 60^\circ - \alpha$

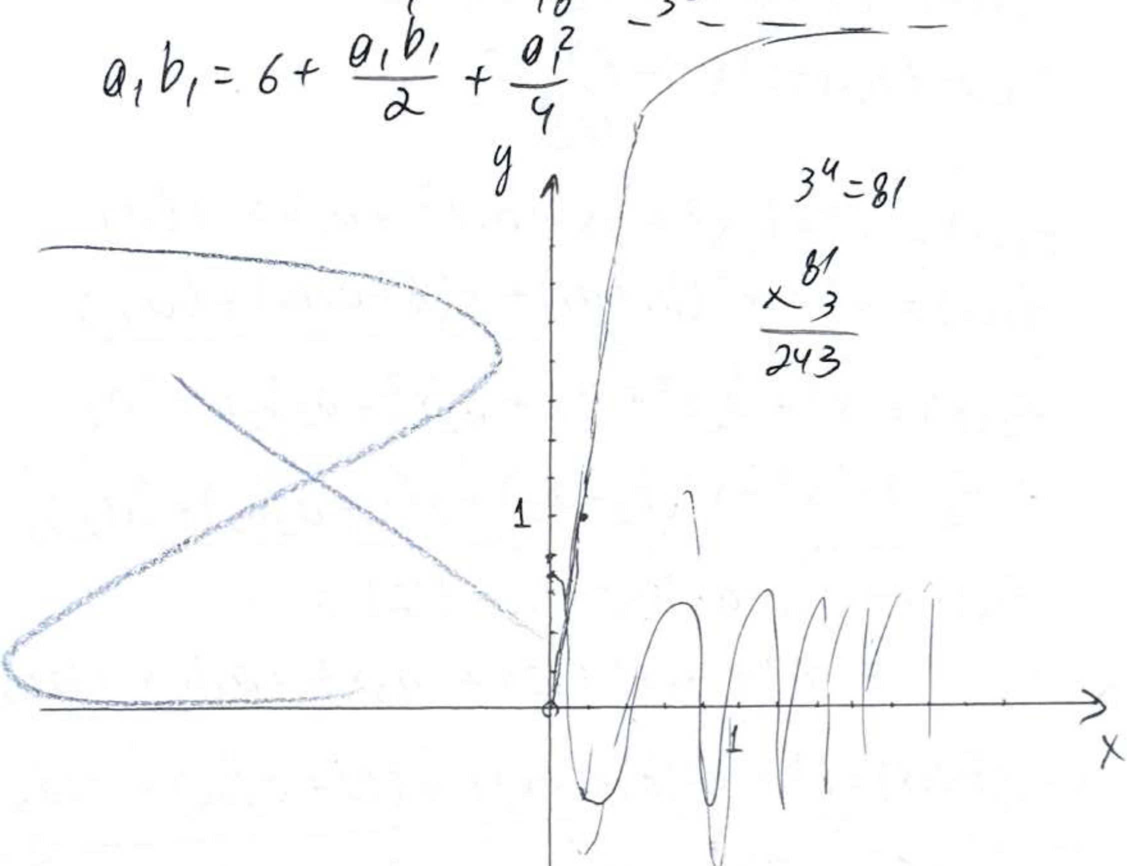
ЧЕРНОВИК

$\Rightarrow \quad b_2 = b_1 + \frac{a_1}{4} \quad b_3 = b_1 + \frac{a_1}{2}$

$$\begin{cases} a_1 b_1 = 2 + \frac{3a_1}{4}\left(b_1 + \frac{a_1}{4}\right) \\ a_1 b_1 = 6 + \frac{a_1}{2}\left(b_1 + \frac{a_1}{2}\right) \end{cases}$$

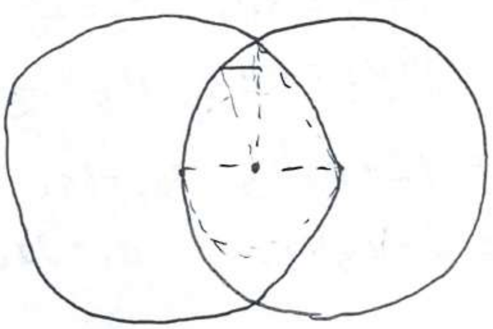
$$a_1 b_1 = 2 + \frac{3a_1 b_1}{4} + \frac{3a_1^2}{16}$$

$$a_1 b_1 = 6 + \frac{a_1 b_1}{2} + \frac{a_1^2}{4}$$



$3^4 = 81$

$$\begin{array}{r} \times\, 81 \\ 3 \\ \hline 243 \end{array}$$



ЧЕРНОВИК

$$ab^2-a^2b+ac^2-bc^2+a^2c-abc-abc+b^2c=0$$

$$ab(b-a)+c^2(a-b)+ac(a-b)-bc(a-b)=0$$

$$c^2(a-b)+ac(a-b)-bc(a-b)-ab(a-b)=0$$

$$(a-b)(c^2+ac-bc-ab)=0$$

$$(a-b)(c(a+c)-b(a+c))=0$$

$$(a-b)(a+c)(c-b)=0$$

NS

$$f_1(x)=x^3+b_1x^2+6x+a_1x^2+a_1b_1x+6a_1$$

$$f_1(x)=x^3+x^2(b_1+a_1)+x(6+a_1b_1)+6a_1;$$

$$f_2(x)=x^3+b_2x^2+8x+a_2x^2+a_2b_2x+8a_2$$

$$f_2(x)=x^3+x^2(b_2+a_2)+x(8+a_2b_2)+8a_2;$$

$$f_3(x)=(x+a_3)(x^2+b_3x+12)=$$

$$=x^3+b_3x^2+12x+a_3x^2+a_3b_3x+12a_3$$

$$f_3(x)=x^3+x^2(b_3+a_3)+x(12+a_3b_3)+12a_3$$

$$6a_1=8a_2=12a_3 \qquad \begin{cases}3a_1=4a_2\\4a_2=6a_3\end{cases} \qquad a_2=\frac{3a_1}{4}$$

$$3a_1=4a_2=6a_3 \qquad a_3=\frac{a_1}{2}$$

$$6+a_1b_1=8+a_2b_2=12+a_3b_3 \qquad 3a_1=6a_3$$

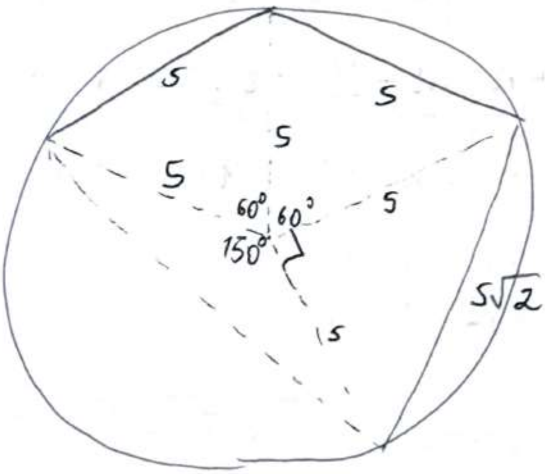
$$a_1b_1=2+a_2b_2=6+a_3b_3 \qquad a_1=2a_3$$

$$\begin{cases}a_1b_1=2+a_2b_2\\a_1b_1=6+a_3b_3\\a_1+b_1=a_2+b_2=a_3+b_3\end{cases}$$

$$\Rightarrow S=3(a_1+b_1)$$

$$a_1+b_1=\frac{3a_1}{4}+b_2 \qquad b_2=b_1+\frac{a_1}{4};\ b_3=b_1+\frac{a_1}{2}$$

ЧЕРНОВИК



$\alpha = 360^\circ - 60^\circ - 60^\circ - 90^\circ =$
$= 360^\circ - 120^\circ - 90^\circ =$
$= 240^\circ - 90^\circ = 150^\circ$

$\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) =$
$= \sin 30^\circ$

$$S = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5 +$$
$$+ \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5 \sin 150^\circ$$

№ 4

$$\sin^3(\pi x) - \sin^3(2\pi x) + \sin^3(4\pi x) = (\sin(\pi x) - \sin(2\pi x) + \sin(4\pi x))^3$$

Замена $a = \sin\pi x$ $b = \sin 2\pi x$ $c = \sin 4\pi x$

$$\Rightarrow a^3 - b^3 + c^3 = (a-b+c)^3 = (a-b+c)(a-b+c)^2$$
$$a^3 - b^3 + c^3 = (a^2+b^2+c^2+2ac-2ab-2bc)(a-b+c)$$
$$a^3 - b^3 + c^3 = (a-b+c)(a^2+b^2+c^2+2ac-2ab-2bc)$$
$$\cancel{a^3} - \cancel{b^3} + \cancel{c^3} = \cancel{a^3} + ab^2 + ac^2 + 2a^2c - 2a^2b - 2abc -$$
$$- ba^2 - \cancel{b^3} - bc^2 - 2abc + 2ab^2 + 2b^2c + a^2c +$$
$$+ cb^2 + \cancel{c^3} + 2ac^2 - 2abc - 2bc^2$$
$$3ab^2 + 3ac^2 + 3a^2c - 3a^2b - 6abc - 3bc^2 +$$
$$+ 3b^2c = 0$$
$$ab^2 + ac^2 + a^2c - a^2b - 2abc - bc^2 + b^2c = 0$$
$$ab^2 + ac^2 + a^2c - a^2b - abc - abc - bc^2 + b^2c = 0$$

ЧЕРНОВИК

$$\sqrt{4x^2-12x+9}+\sqrt{x^2-6x+9}+\left(\sqrt{-(x-2)}\right)^2=\sqrt{3+\sqrt{8}}-\sqrt{3-\sqrt{8}}$$

$$\sqrt{(2x-3)^2}+\sqrt{(x-3)^2}+\left(\sqrt{-(x-2)}\right)^2=\sqrt{3+\sqrt{8}}-\sqrt{3-\sqrt{8}}$$

Условие:

$-(x-2)\geq 0$

$x-2\leq 0$ $\qquad$ $x\leq 2$

$$|2x-3|+|x-3|+(-(x-2))=\sqrt{3+\sqrt{8}}-\sqrt{3-\sqrt{8}}$$

$$|2x-3|+|x-3|-x+2=\sqrt{3+\sqrt{8}}-\sqrt{3-\sqrt{8}}$$

$t=\sqrt{3+\sqrt{8}}-\sqrt{3-\sqrt{8}}$

$t^2=3+\cancel{\sqrt{8}}-2\sqrt{9-8}+3-\cancel{\sqrt{8}}$

$t^2=6-2\cdot 1=4 \quad => t=2$

№2

$a>0$

$3^{5-\frac{1}{x}}\geq a+\sin(4^x)$ – не имеет решений при $x>0$

$x>0$ $\qquad$ $\sin(4^x)$

$=> 0<\frac{1}{x}<+\infty$

$-\infty<-\frac{1}{x}<0$

$-\infty<5-\frac{1}{x}<5$

$0<3^{5-\frac{1}{x}}<3^5$