



87-00-51-92
(162.13)



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10

Место проведения Екатеринбург
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Блинова Тимофей Сергеевич
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«13» апреля 2025 года

Подпись участника

Чистовик

Задача 1

$$t = \log_2 x; \quad \sqrt{t^2 + 3t} - \sqrt{t^2 + 3t - 4} \geq t + 1$$



$$\begin{cases} t \geq -1 \\ \sqrt{t^2 + 3t} - \sqrt{t^2 + 3t - 4} \geq t^2 + 2t + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t \geq -1 \\ -\sqrt{t^2 + 3t - 4} \geq -t + 1; \quad \sqrt{t^2 + 3t - 4} \leq t - 1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} t \geq -1 \\ t \geq 1 \\ t^2 + 3t - 4 \leq t^2 + 2t + 1; \quad 5t \leq 5; \quad t \leq 1 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} t = 1 - \text{лг. корень} \end{array} \right.$$

$$\log_2 x_0 = 1; \quad x_0 = 2$$

$$f(x_0) = 16x_0 = 32$$

Ответ: 32Задача 3

$$\sqrt{\sqrt{\cos x} + 2\sqrt{-3\sin x}} > 2\sqrt{\sqrt{\cos x} - \sqrt{-3\sin x}}$$



$$\begin{cases} \sqrt{\cos x} + 2\sqrt{-3\sin x} > 4\sqrt{\cos x} - 4\sqrt{-3\sin x} \\ \sqrt{\cos x} \geq \sqrt{-3\sin x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{\cos x} \leq 2\sqrt{-3\sin x} & 0 \leq -3\sin x \leq \cos x < -12\sin x \\ \sqrt{\cos x} \geq \sqrt{-3\sin x} \geq 0 & 0 \leq 9\sin^2 x \leq \cos^2 x \leq 144\sin^2 x \quad | + \sin^2 x \\ & 10\sin^2 x \leq 1 \leq 145\sin^2 x \end{cases}$$

$$\frac{1}{145} < \sin^2 x \leq \frac{1}{10} \quad ; \quad \text{Ответ: } x \neq 2\pi k \in \left[-\arcsin \frac{1}{\sqrt{10}}; -\arcsin \frac{1}{\sqrt{145}} \right) \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} \leq \sin x < -\frac{1}{\sqrt{145}} \quad \text{при } k \in \mathbb{Z}$$

Задача 4Числовая

$$|x+1-a| + |4^x - a| = 4^x - x - 1$$

$$① \begin{cases} x \geq a-1 \\ 4^x \geq a \end{cases}$$

$$2x = 2a - 2; x = a - 1$$

$$4^x + x + 1 - 2a = 4^x - x - 1;$$

$$\begin{cases} x = a-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4^x \geq a; x \geq \log_4 a \end{cases}$$

$$a-1 \geq \log_4 a$$

$$② \begin{cases} x < a-1 \\ 4^x \geq a \end{cases}$$

$$4^x - x - 1 = 4^x - x - 1$$

$$\rightarrow \begin{cases} x \leq a-1 \\ 4^x \geq a \geq x+1 \end{cases}$$

$$③ \begin{cases} x \geq a-1 \\ 4^x < a \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4^x < x+1$$

решений нет

$$-4^x + x + 1 = 4^x - x - 1; 4^x = x + 1$$

$$④ \begin{cases} x < a-1 \\ 4^x < a \end{cases}$$

$$-4^x + x + 1 + 2a = 4^x - x - 1; 4^x = a \text{ решений нет}$$

$$\Downarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$\text{решения: } \begin{cases} x \leq a-1 \\ 4^x \geq a \end{cases} \mid \log_4 a \leq x \leq a-1$$

Решение на отрезке будет одно, если:

$$① \log_4 a = a - 1$$

Единственный корень: $a = 1$

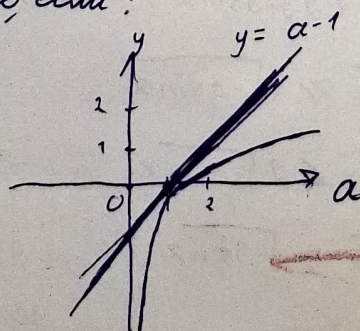
$$② \log_4 a = 1$$

$$a = 4$$

$$③ a - 1 = -1$$

$$a = 0$$

$$\text{Ответ: } a \in \{0; 4; 1\}$$



Задача 2Чистовик

$$\angle B = 2\alpha; \angle C = 2\beta$$

$$60^\circ + 2\alpha + 2\beta = 180^\circ \text{ в } \triangle ABC$$

$$\alpha + \beta = 60^\circ$$

$$\begin{aligned} \angle OBC &= \angle OMC \\ \angle OCB &= \angle BMO \end{aligned} \left| \begin{array}{l} \text{по св-ву} \\ \text{вписанного} \\ \text{угла} \end{array} \right.$$

$$\angle BMC = 2 + \beta = 60^\circ$$

$$2R_{OBC} = \frac{BC}{\sin 60^\circ}; R_{OBC} = \frac{BC}{2\sin 60^\circ} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

по Теореме синусов

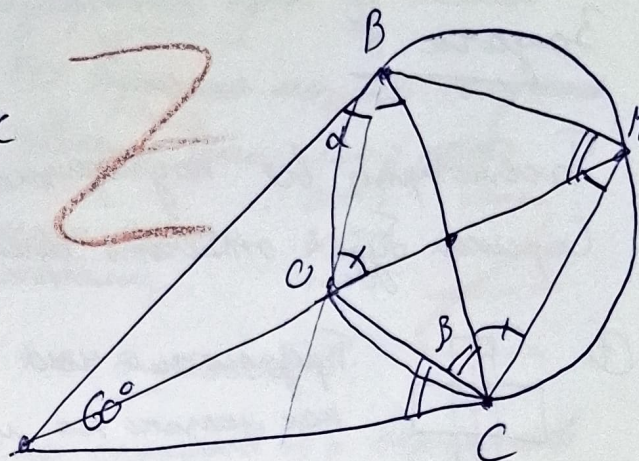
в $\triangle BMC$

$$\angle BCM = 30^\circ + \alpha$$

$$\angle CCM = 30^\circ + \beta$$

$$\angle BCM = \angle BCM \text{ по св-ву вписанного угла}$$

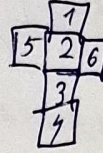
$$\angle OCM = \beta + \alpha + 30^\circ = 90^\circ \text{ и } OM = 2R_{OBC} = 4\sqrt{3}$$

Ответ: $4\sqrt{3}$ 

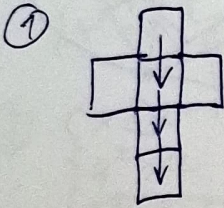
Чистовик

Задача 5

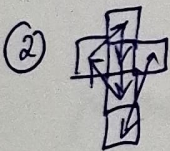
Нумерация
клеток:



Рассмотрим все подходящие варианты
Стрелкой будем отмечать перемещение 1 жука



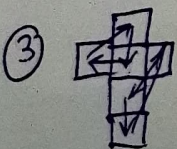
Предположим, что 3 жука переместились,
как указано на рисунке. Если жук
с клетки 4 переместится на 1,
жуки с клеток 5 и 6 не смогут
поменяться местами и будут
вынуждены встать на клетку к другому жуку.
Если жук с 4 переместится на 5 (для 6 аналогично),
то жук с 5 точно должен переместиться на 1,
но тогда жук на 6 клетке останется на месте.
Таким образом, куда бы в этом варианте не
переместился жук с клетки 4, будут клетки с
> 1 жуками и этот вариант нам не подходит



Пусть жуки с 4 и 6 поменяются местами,
а остальные циклически перебудутся
так: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 1$. ~~Выводимой получаем~~
~~в таком варианте жуки не могут~~
~~для фиксированной~~

~~1 клетки~~

~~В~~ В этом варианте нужно выбрать одно из
2 направлений цикла и 2 соседей, которые
поменяются местами, тогда способов $2 \cdot 2 \cdot \frac{6-4}{2} = 24$



2 цикла длиной 3. Выбрать один
такой цикл 4 способа, 2 способа задать его
направление и 2 способа задать направление
2 цикла. Тогда способов $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

④ 3 цикла длиной 2 Чистовик



На схеме изображен один из таких вариантов. Все варианты можно получить если ~~мы~~ двигать циклы $1 \leftrightarrow 2$ ~~и~~ $2 \leftrightarrow 3$

Остальные 2 цикла можно задать 2 способами,

$$2 \leftrightarrow 3$$

$$3 \leftrightarrow 4$$

$$4 \leftrightarrow 1$$

получаем $4 \cdot 2 = 8$ способов

Всего подходящих нам способов 48, а вариантов перемещений - 4^6

Тогда искомая вероятность $p = \frac{48}{4^6} = \frac{12}{4^5} = \frac{3}{4^4}$

Чистовик

Задача 7

Заметим, что если число x - счастливое и при прибавлении к нему единицы не происходит переноса разрядов, то сумма цифр увеличится на 1. В числе x , т.к. мы можем разбить эти цифры на 2 группы с одинаковой суммой, сумма всех цифр четна, тогда в $x+1$ - нечетна и $x+1$ не может быть счастливым числом.

Тогда суперсчастливые числа все оканчиваются на 9. Проверим все числа, заканчивающиеся на 0 и 9, на счастливость

400 X	530 X	679 X	830 X	990 V	1160 X	1320 V
409 X	539 X	680 X	839 X	999 X	1169 X	1329 X
	540 V	689 X	840 X	1000 X	1170 X	1330 X
410 X	549 V	690 X	849 X	1009 X	1179 V	1339 X
419 X	550 V	699 X	850 X	1010 V	1180 X	1339 X
420 X	559 X	700 X	859 X	1019 X	1189 X	1340 V
	559 X	709 X	860 X	1020 X	1190 X	1349 X
429 X	560 X	710 X	869 X	1029 X	1199 V	1350 X
430 X	569 X	719 X	870 X	1030 X	1200 X	1359 V
439 X	570 X	720 X	879 X	1039 X	1209 X	1360 X
440 V	579 X	729 V	880 V	1040 X	1210 V	1369 X
449 X	580 X	730 X	889 X	1049 X	1219 X	1370 X
	589 X	739 X	890 X	1050 X	1220 X	1379 V
450 X	590 X	740 X	899 X	1059 X	1229 X	1380 X
459 V	599 X	749 X	900 X	1060 X	1230 V	1389 X
460 X	600 X	750 X	909 V	1069 X	1239 X	1390 X
469 X	609 X	759 X	910 X	1070 X	1240 X	1399 X
470 X	610 X	760 X	919 X	1079 X	1249 X	1400 X
479 X	619 X	769 X	920 X	1080 X	1250 X	1409 X
	620 X	770 V	929 X	1089 V	1259 X	1410 X
480 X	629 X	779 X	930 X	1090 X	1260 X	1419 X
489 X	630 X	780 X	939 X	1099 X	1269 V	1420 X
490 X	639 V	789 X	940 X	1100 V	1270 X	1429 X
499 X	640 X	790 X	949 X	1109 X	1279 X	1430 V
	649 X	799 X	950 X	1110 X	1280 X	1439 X
500 X	650 X	800 X	959 X	1119 X	1289 V	1440 X
509 X	659 X	809 X	960 X	1120 V	1290 X	1449 V
510 X	660 V	810 X	969 X	1129 X	1299 X	1450 V
519 X	669 X	819 V	970 X	1130 X	1300 X	1459 X
520 X	670 X	820 X	979 X	1139 X	1309 X	1460 X
529 X		829 X	980 X	1140 X	1310 X	1469 V
			989 X	1149 X	1319 X	1470 X

Числовик

1449 X	1600 X	1749 X	1889 X	2019 X	2150 X	2289 X
1480 X	1609 X	1750 X	1890 ✓	2020 ✓	2159 X	2290 X
1489 X	1610 X	1759 X	1899 X	2029 X	2160 X	2299 ✓
1490 X	1619 X	1760 ✓	1900 X	2030 X	2169 ✓	2300 X
1499 X	1620 X	1769 X	1909 X	2039 X	2170 X	2309 X
1500 X	1629 ✓	1770 X	1910 X	2040 X	2179 X	2310 ✓
1509 X	1630 X	1779 X	1919 ✓	2049 X	2180 X	2319 X
1510 X	1639 X	1780 ✓	1920 X	2050 X	2189 ✓	2320 X
1519 X	1640 X	1789 X	1929 X	2059 X	2190 X	2329 X
1520 X	1649 ✓	1790 X	1930 X	2060 X	2199 X	2330 X
1529 X	1650 ✓	1799 X	1939 X	2069 X	2200 ✓	2339 X
1530 X	1659 X	1800 X	1940 X	2070 X	2209 ✓	2340 X
1539 ✓	1660 X	1809 ✓	1949 X	2079 ✓	2210 X	2349 ✓
1540 ✓	1669 X	1810 X	1950 X	2080 X	2219 X	2350 ✓
1549 X	1670 ✓	1819 X	1959 X	2089 X	2220 X	2359 X
1550 X	1679 X	1820 X	1960 X	2090 X	2229 X	2360 X
1559 ✓	1680 X	1829 ✓	1969 X	2099 X	2230 X	2369 X
1560 ✓	1689 X	1830 X	1970 X	2100 X	2239 X	2370 X
1569 X	1690 X	1839 X	1979 X	2109 X	2240 ✓	2379 X
1570 X	1699 X	1840 X	1980 ✓	2110 ✓	2249 X	2380 X
1579 X	1700 X	1849 X	1989 X	2119 X	2250 X	2389 ✓
1580 X	1709 X	1850 X	1990 X	2120 X	2259 ✓	2390 X
1589 X	1710 X	1859 X	1999 X	2129 X	2260 X	2399 X
1590 X	1719 ✓	1860 X	2000 X	2130 ✓	2269 X	2400 X
1599 X	1720 ✓	1869 X	2009 X	2139 X	2270 X	
	1729 X	1870 ✓	2010 X	2140 X	2279 X	
	1730 X	1879 X		2149 X	2280 X	
	1739 ✓	1880 X				
	1740 X					

Найти образы, найденные суперсоставные числа:
549, 1449, 1539, 1559, 1649, 1719, 2379

Ответ: 7

Чистовик

Задача 6

Построим оси координат x и y , центром в точке O , тогда парабола $-y = kx^2$

Касательная в точке

$$x_0 - y = (x - x_0) \cdot 2kx_0 \cdot kx_0^2 =$$

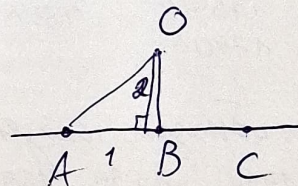
$$= k(2x^2 - 2x_0x + x_0^2) - k(x^2 + (x - x_0)^2) = k(2x \cdot x_0 - x_0^2) = 2x_0k \cdot x - kx_0^2$$

$$y = 2x_0k \cdot x - kx_0^2$$

По в-ву парабола все такие точки лежат на одной прямой

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$$

Ответ: 1



Задача 8

III. к $AD = BC$, радианная мера $AB = \alpha \Gamma_B$

$\Rightarrow$ 2π -радианная мера $CD = \alpha$

Пусть Γ_H - радиус меньшей дуги
 Γ_B - радиус большей дуги

$$x = \alpha \cdot \Gamma_B = (2\pi - \alpha) \Gamma_H$$

$$\Gamma_B = x + \Gamma_H$$

$$x = \alpha(x + \Gamma_H) = (2\pi - \alpha) \Gamma_H$$

$$2x + \alpha \Gamma_H = 2\pi \Gamma_H - \alpha \Gamma_H$$

$$2\alpha \Gamma_H - 2\pi \Gamma_H = -\alpha x, \quad \alpha(x + 2\Gamma_H) = 2\pi \Gamma_H$$

$$\alpha = \frac{2\pi \Gamma_H}{x + 2\Gamma_H}$$

$$\alpha = \frac{x}{x + \Gamma_H}$$

$$2\pi x \Gamma_H + 2\pi \Gamma_H^2 = x^2 + 2x \Gamma_H$$

$$x^2 + 2x(\Gamma_H - \pi \Gamma_H) - 2\pi \Gamma_H^2 = 0$$

$$D = \Gamma_H^2$$

Числовик

$$x^2 + x(2\Gamma_H - 2\pi\Gamma_H) - 2\pi\Gamma_H^2 = 0$$

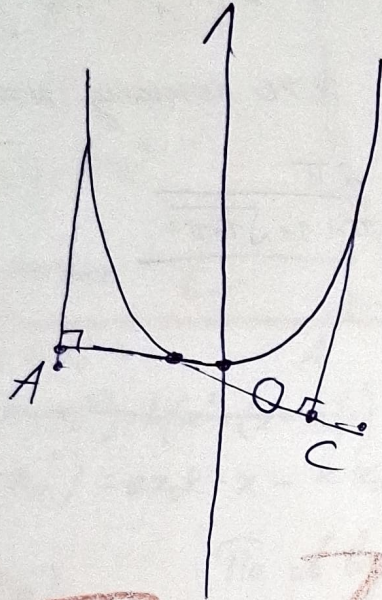
$$D = 4\Gamma_H^2 - 8\pi\Gamma_H^2 + 4\pi^2\Gamma_H^2 + 8\pi\Gamma_H^2 = 4(1+\pi^2)\Gamma_H^2$$

$$x_{1,2} = \frac{2\pi\Gamma_H - 2\Gamma_H \pm 2\Gamma_H \sqrt{1+\pi^2}}{2} = \pi\Gamma_H - \Gamma_H \pm \Gamma_H \sqrt{1+\pi^2} =$$

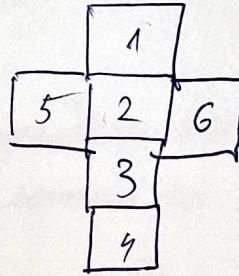
$$= \Gamma_H (\pi - 1 \pm \sqrt{1+\pi^2}), \quad x > 0, \text{ поэтому } x = \Gamma_H (\pi - 1 + \sqrt{1+\pi^2})$$

$$\alpha = \frac{2\pi\Gamma_H}{\Gamma_H (\pi - 1 + \sqrt{1+\pi^2} + 2)} = \frac{2\pi}{\pi + 1 + \sqrt{1+\pi^2}}$$

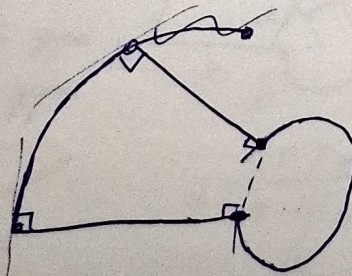
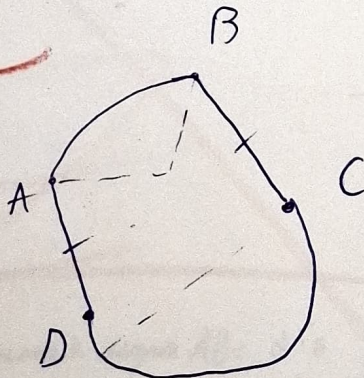
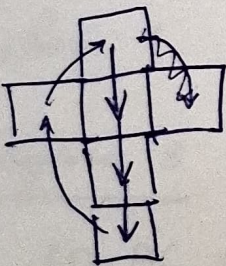
Черновик



$1 \rightarrow 2456$
 $2 \rightarrow 1356$
 $3 \rightarrow 2456$
 $4 \rightarrow 1356$
 $5 \rightarrow 1234$
 $6 \rightarrow 1234$
 123456



4.3.1



Черновик

$$|x+1-a| + |4^x - a| = 4^x - x - 1$$

$$\begin{cases} x \geq a-1 \\ 4^x \geq a \\ 4^x + x + 1 - 2a = 4^x - x - 1; \quad x = a-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < a-1 \\ 4^x \geq a \\ 4^x - x - 1 = 4^x - x - 1; \quad x \text{ любое} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq a-1 \\ 4^x < a \\ -4^x + x + 1 = 4^x - x - 1; \quad 2 \cdot 4^x = 2x + 2; \quad 4^x = x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < a-1 \\ 4^x < a \\ -4^x + x + 1 + 2a = 4^x - x - 1; \quad 2 \cdot 4^x = 2a; \quad a = 4^x \quad 4^x < 4^x \text{ кон} \end{cases}$$

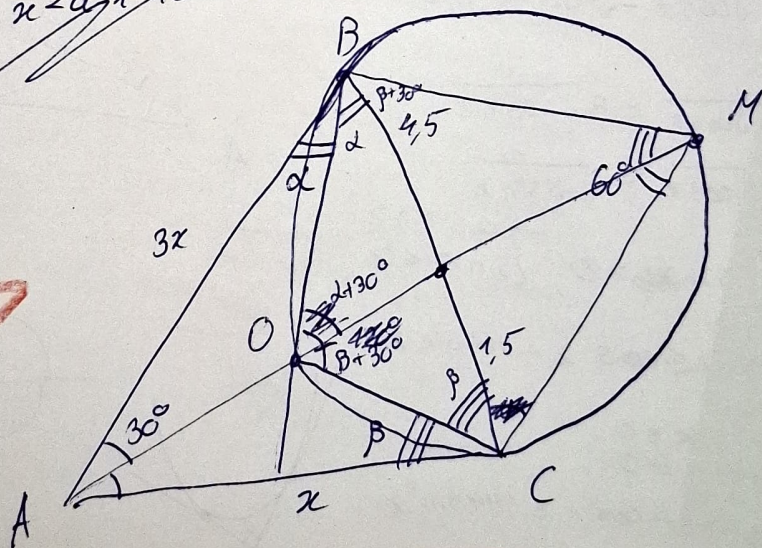
$$\begin{cases} x = a-1 \\ 4^x \geq a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < a-1 \\ 4^x \geq a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq a-1 \\ 4^x < a \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4^x = x+1; \quad x < a-1 \end{cases}$$

Реш



Черновик

1. $t = \log_2 x$

$$\sqrt{t^2 + 3t} - \sqrt{t^2 + 3t - 4} \geq t + 1$$



$$\begin{cases} t \geq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^2 + 3t - \sqrt{t^2 + 3t - 4} \geq t^2 + 2t + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t \geq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\sqrt{t^2 + 3t - 4} \geq -t + 1; \sqrt{t^2 + 3t - 4} \leq t - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t \geq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^2 + 3t - 4 \leq t^2 - 2t + 1; 5t \leq 5; t \leq 1 \end{cases} \quad t = 1$$

$$\begin{cases} \sqrt{\cos x} + 2\sqrt{-3\sin x} \geq 4\sqrt{\cos x} - 4\sqrt{-3\sin x} \\ \sqrt{\cos x} - \sqrt{-3\sin x} \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{\cos x} < 2\sqrt{-3\sin x} \\ \sqrt{\cos x} \geq \sqrt{-3\sin x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3\sin x \geq 0; \begin{cases} \cos x \geq 0 \\ \sin x \leq 0 \end{cases} \\ 0 \leq -3\sin x \leq \cos x \leq -12\sin x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ \sin x \leq 0 \\ 9\sin^2 x \leq \cos^2 x \leq 144\sin^2 x \end{cases}$$

$$105\sin^2 x \leq 1 \leq 145\sin^2 x$$

$$\frac{1}{145} \leq \sin^2 x \leq \frac{1}{10}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{10}} \leq \sin x \leq -\frac{1}{\sqrt{145}}$$

$$x = \pi k + t; t \in \left[\arcsin -\frac{1}{\sqrt{10}}; \arcsin -\frac{1}{\sqrt{145}} \right]$$

