0 374602 260002

37-46-02-26
(162.7)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11

Место проведения Санкт-Петербург
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Бойко Владислава Игоревича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Выход: 13:48
Вход: 13:50

Дата

«13» апреля 2025 года

Подпись участника

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
37-46-02-26	70	+	+	+	∓	+	∓	0	0

37-46-02-26 (162.7)

Черновик: ① ОДЗ: $x-2\le 0;\ x\le 2$

$|2x-3|+|x-3|+(-x+2)=\sqrt{3+\sqrt8}-\sqrt{3-\sqrt8}.$

$\sqrt{3+\sqrt8}=\dfrac{\sqrt{3+1}+\sqrt{3-1}}{\sqrt2}=\sqrt2+1.$

$|2x-3|+|x-3|+(-x+2)=(\sqrt2+1)-(-\sqrt2+1)=2\sqrt2.$

② $0\le 3^{5-\frac1x}-\sin 4^x.\ x>0.$

$4^x\in(1;+\infty)$, $\sin x\in[-1;1]$.

$\frac1x\in(0;+\infty)$, $5-\frac1x\in(-\infty;5)$, $3^{5-\frac1x}\in(0;243)$.

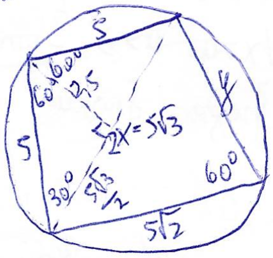
$3^{5-\frac1x}-\sin 4^x\in(-1;244)$. Все ли зн. прин.??

Прин. ли $\to -1$? Тогда $+\sin 4^x=1$, $x\to0$.

~~xxxxxxxx~~ ~~xx~~ $\to 244$ тоже ок.

$x\to+\infty$, $\sin 4^x=1$ имеем $\to 244$.

③ 1) 5 и 5 смежные.



$S=\frac12\cdot 2x\cdot\sqrt{25-x^2}.$

$R=5=\dfrac{50x}{4x\sqrt{25-x^2}}=\dfrac{12{,}5}{\sqrt{25-x^2}};\ 2{,}5=\sqrt{25-x^2};$

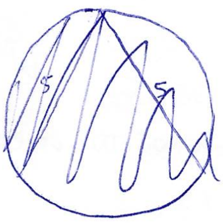
$6{,}25=25-x^2;\ x^2=18{,}75=\frac34\cdot25;\ x=\frac52\sqrt3.$

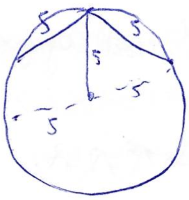
$2x=5\sqrt3.$

$75=50+y^2-10\sqrt2\cdot y\cdot\frac12$

$y^2-5\sqrt2y-25=0.$

$D=50+100=150.$ $\dfrac{5\sqrt2\pm5\sqrt6}{2}$; $\dfrac{5\sqrt2+5\sqrt6}{2}$.





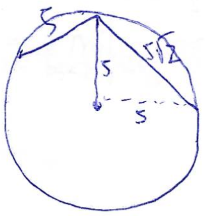
④ $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3.$

$x=1$ ✓

При $\sin(\pi x)>0$, $\sin(2\pi x)<0$, $\sin(4\pi x)>0$ — $\varnothing$

И наоб.

2) 5 и 5 противоп.



$\begin{cases}\cos(\pi x)<0\\ \sin(\pi x)>0\\ \cos(2\pi x)<0\end{cases}+\begin{cases}\cos(\pi x)<0\\ \sin(\pi x)<0\\ \cos(2\pi x)<0\end{cases}$

$\begin{cases}\cos(\pi x)<0,\\ (0{,}5;1{,}5)\\ \cos(2\pi x)<0\\ (0{,}3;0{,}75)\cup(1{,}25;1{,}6).\end{cases}$ $\Rightarrow$ реш. нет.

Не под: $(0{,}5;0{,}75)\cup(1{,}25;1{,}5)$.

⑤ $6a_1=8a_2=12a_3$

x^0: $a_1=4t\Rightarrow a_2=3t,\ a_3=2t.$

x^2: $a_1+b_1=a_2+b_2=a_3+b_3.$

$\exists\ b_1=\lambda t,\ b_2=(\lambda+1)t,\ b_3=(\lambda+2)t.$

x^3: 80. x^1: $a_1b_1+6=a_2b_2+8=a_3b_3+12.$

$4\lambda t^2+6=3(\lambda+1)t^2+8=2(\lambda+2)t^2+12.$

$t^2=v$ $\begin{cases}4\lambda v+6=3\lambda v+3v+8,\\ 3\lambda v+3v+8=2\lambda v+2v+12.\end{cases}$

Чистовик:

① $\sqrt{4x^2-12x+9}+\sqrt{x^2-6x+9}+\left(\sqrt{-(x-2)}\right)^2=\sqrt{3+\sqrt8}-\sqrt{3-\sqrt8}$. (*)

$\sqrt{3+\sqrt8}=\sqrt{3+2\sqrt2}=\sqrt{(1+\sqrt2)^2}=1+\sqrt2$, $\sqrt{3-\sqrt8}=\sqrt{3-2\sqrt2}=\sqrt{(\sqrt2-1)^2}=\sqrt2-1$.

(*): $\sqrt{(2x-3)^2}+\sqrt{(x-3)^2}+\left(\sqrt{-x+2}\right)^2=(\sqrt2+1)-(\sqrt2-1)$;

$\begin{cases}-x+2\ge0,\\ |2x-3|+|x-3|-x+2=2;\end{cases}$ $\begin{cases}x\le2,\\ |2x-3|+|x-3|=x;\end{cases}$ $x<3$ $\begin{cases}x\le2,\\ |2x-3|+3-x=x;\end{cases}$ $\begin{cases}x\le2,\\ |2x-3|=2x-3;\end{cases}$

$\begin{cases}x\le2,\\ 2x-3\ge0;\end{cases}$ $\begin{cases}x\le2,\\ x\ge1{,}5;\end{cases}$ $x\in[1{,}5;2]$.

Ответ: $[1{,}5;2]$.

② $3^{5-\frac1x}\ge a+\sin(4^x)$; $a\le3^{5-\frac1x}-\sin(4^x)$.

Пусть $f(x)=3^{5-\frac1x}-\sin(4^x)$, A — мн-во значений $f(x)$ при $x>0$.

По условию подходят те и только те a, для которых $\forall x>0$: $a>3^{5-\frac1x}-\sin(4^x)$.

Докажем, что $f(x)$ при $x>0$ может принимать сколь угодно близкие значения к 244 (слева), но 244 не принадл. A.

Т.к. $x>0$, $3^x\uparrow$ на $\mathbb{R}$, то $5-\frac1x<5 \Rightarrow 3^{5-\frac1x}<3^5=243$.

$-\sin(4^x)$ может принимать любые знач. от -1 до 1, так как 4^x при $x>0$ прин. значения $(1;+\infty)$, а $[2\pi;4\pi)\subset(1;+\infty)$.

Тогда $3^{5-\frac1x}-\sin(4^x)<3^5+1=243+1=244$.

Заметим, что $\forall k>0$ верно, что луч $(4^k;+\infty)$ содержит какой-то отрезок длины 2π, то есть $\forall k>0\ \exists m>k$: $\sin(4^m)=-1$.

~~Тогда устремив $x\to+\infty$ получим $3^{5-\frac1x}\to3^5=243$~~

Рассмотрим посл-ть: $a_n=\log_4\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$.

Для любого $i\in\mathbb{N}$: $\sin(4^{a_n})=-1$, при этом $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}3^{5-\frac{1}{a_n}}=$

$=3^{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(5-\frac{1}{a_n}\right)}=3^5=243$.

Значит $\lim\limits_{n\to+\infty}f(a_n)=244$.

Значит $\sup A=244 \Rightarrow a\ge244$ подходят.

Ответ: 244.

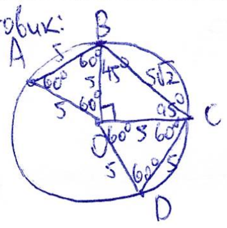
③ Имеем два случая: 1) стороны длины 5 лежат друг напротив друга;
2) стороны длины 5 смежные.

1) (рисунок см. след. стр.) Пусть дан 4-х угольник ABCD, $|AB|=|CD|=5$, $|BC|=5\sqrt2$, $R=5$, окружность — ω, O — её центр. $|OA|=|OB|=|OC|=|OD|=R=5$.

$\triangle OBA$ — равносторонний, $\triangle OBC$ — прямоугольный (т.к. $R^2+R^2=|BC|^2$) и р/б ($|OB|=|OC|=R$). $\Rightarrow$

$\Rightarrow \widehat{ABO}=\widehat{AOB}=\widehat{OAB}=60^\circ$, $\widehat{BOC}=90^\circ$, $\widehat{OBC}=\widehat{OCB}=45^\circ$.

Чистовик:



Аналогично $\triangle OCD$ – равност., углы тр-ка равны по 60°.
Существование такого четырехугольника очевидно, так как взяв произв. т. A на ω и отметив центр O, повернув A на $60^\circ, 90^\circ, 60^\circ$ послед., получим B, C, D. Т.к. суммарный угол поворота $>180^\circ$, O внутри $ABCD$.

$\overset{\frown}{AOD} = 360 - \overset{\frown}{AOB} - \overset{\frown}{BOC} - \overset{\frown}{COD} = 360^\circ - 120^\circ - 90^\circ = 150^\circ$.

По теореме косинусов в $\triangle AOD$: $|AD|^2 = 25 + 25 + 50 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50 + 25\sqrt{3}$.

$|AD| = 5\sqrt{2+\sqrt{3}} = 5 \cdot \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}} = 5 \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} = 5 \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

~~$P(ABCD) = 5 + \ldots$~~

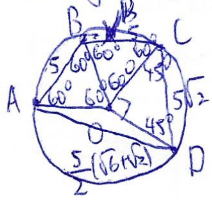
$\overset{\frown}{DAB} = 180^\circ - \overset{\frown}{BCD} = 75^\circ = 180^\circ - \overset{\frown}{ABC} \Rightarrow (AD) \parallel (BC) \Rightarrow ABCD$ – трапеция.

Пусть B' – проекция B на (AD). Т.к. $ABCD$ – р/б трап., $|AB'| = \frac{|AD| - |BC|}{2} = \frac{\frac{5\sqrt{6}+5\sqrt{2}}{2} - 5\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{6} - 5\sqrt{2}}{4}$.

По т. Пиф. в $\triangle ABB'$: $|BB'| = \sqrt{25 - 25 \cdot \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2} = 5\sqrt{1 - \frac{8 - 4\sqrt{3}}{16}} = 5\sqrt{\frac{8+4\sqrt{3}}{16}} = 5 \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = 5 \cdot \frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}{2} = 5 \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

$S(ABCD) = \frac{|AD| + |BC|}{2} \cdot |BB'| = \frac{5 \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + 5\sqrt{2}}{2} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = 25 \cdot \frac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{25}{8}(\sqrt{3}+3)(\sqrt{3}+1) = \frac{25}{8}(3+3+4\sqrt{3}) = \frac{25}{4}(3+2\sqrt{3})$.

2) Трап $ABCD$, $|AB| = 5$, $|BC| = 5$, $|CD| = 5\sqrt{2}$, $R = 5$, O – центр окр. ω.



$\triangle AOB$, $\triangle BOC$ – равност., все углы по 60°, $\triangle COD$ – прямоуг. (аналог.) и р/б, $\overset{\frown}{COD} = 90^\circ$, $\overset{\frown}{OCD} = \overset{\frown}{ODC} = 45^\circ$.
Существ. четырехугольника очевидно, здесь повороты на $60^\circ, 60^\circ, 90^\circ$. Аналог., O внутри $ABCD$.
$\overset{\frown}{AOD} = 360^\circ - 120^\circ - 90^\circ = 150^\circ \Rightarrow$ по т. косинусов: $|AD| = 5 \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

$S(ABCD) = S(AOB) + S(BOC) + S(COD) + S(AOD) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \sin(150^\circ) = \frac{25}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{25}{2} + \frac{25}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{25}{2}\left(\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right) = \frac{25}{4}(3 + 2\sqrt{3})$.

Ответ: $\frac{25}{4}(3+2\sqrt{3})$.

⑤ $f_1(x) \equiv f_2(x) \equiv f_3(x)$, значит по т. о тожд. р-ве многочленов коэф. при x^i для $\forall i \in \{0;1;2;3\}$ равны у $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$.

Коэф. $f_i(x)$ при x^j обозначим c_{ij}.

$c_{10} = c_{20} = c_{30} \Leftrightarrow 6a_1 = 8a_2 = 12a_3$.

Пусть $a_1 = 4t$, тогда $a_2 = 3t$, $a_3 = 2t$. $a_1 > 0 \Rightarrow t > 0$.

$c_{12} = c_{22} = c_{32} \Leftrightarrow a_1 + b_1 = a_2 + b_2 + a_3 + b_3$.

Пусть $b_1 = \lambda t$, тогда $b_2 = (\lambda+1)t$, $b_3 = (\lambda+2)t$.

$c_{11} = c_{21} = c_{31} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 b_1 + 6 = a_2 b_2 + 8, \\ a_2 b_2 + 8 = a_3 b_3 + 12; \end{cases} \begin{cases} 4t \cdot \lambda t + 6 = 3t \cdot (\lambda+1)t + 8, \\ 3t \cdot (\lambda+1)t + 8 = 2t \cdot (\lambda+2)t + 12; \end{cases} \begin{cases} 4\lambda t^2 + 6 = 3\lambda t^2 + 3t^2 + 8, \\ 3\lambda t^2 + 3t^2 + 8 = 2\lambda t^2 + 4t^2 + 12. \end{cases}$

Пусть $\lambda t^2 = \alpha$, $t^2 = \beta$. $\begin{cases} 4\alpha + 6 = 3\alpha + 3\beta + 8, \\ 3\alpha + 3\beta + 8 = 2\alpha + 4\beta + 12; \end{cases} \begin{cases} \alpha - 3\beta = 2, \\ \alpha - \beta = 4; \end{cases} \begin{cases} \alpha = 5, \\ \beta = 1. \end{cases}$

Чистовик: $\begin{cases} \lambda t^2=5, \\ t^2=1; \end{cases}$ $(t>0)$ $\begin{cases} \lambda=5, \\ t=1. \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} a_1=4, \\ a_2=3, \\ a_3=2, \\ b_1=5, \\ b_2=6, \\ b_3=7. \end{cases}$ Искомая сумма равна 27.

Ответ: 27.

⑥ Пусть S — ~~кандидат~~ путь, для которого мышь наименее сильно намокнет, $\frac{1}{2+\sqrt{2}}=R$.
Пусть A — последняя точка S, которая находится на пересечении двух кругов. Тогда весь оставшийся путь мышь бежит в зоне действия двух поливалок. Назовём часть пути до этого момента S_1, после — S_2.
Длина пути S равна сумме длин путей S_1 и S_2.
При заданном S_1, S мин. $\Leftrightarrow$ S_2 мин. S_2 минимально, когда от точки A к норе (т. O) мышь бежит напрямую.
Пусть M — точка, с которой мышь начинает S, то есть первая точка, находящаяся в зоне хотя бы одной из поливалок. Пусть O_1, O_2 — т., в которых поливалки, причём $|AO_1|\le|AO_2|$ $\Rightarrow$ A лежит на окр. с ц. в O_1. Круг с ц. в O_1 — ω_1, с ц. в O_2 — ω_2.
Так как O_2 и A лежат на круге, то если они различны, то (O_2A) пересекает окружность ω_1, в двух точках $\Rightarrow$ если $A\ne \underbrace{[O_2A)\cap\omega_2}_{T}$, то $[O_2A)\cap\omega_2$ лежит вне круга ω_1.

~~Точка Т такова, что для любой из~~
1) Пусть $A\ne T$, $A\ne O_2$. Тогда T такова, что для любой из точек ω_2 расстояние от неё до A минимально, причём ~~[AT]~~ $[AT]\setminus\{A\}$ находится в зоне только поливалки #2.
Значит из T можно добраться в A по прямой так, чтобы попадать в зону только одной поливалки (за искл. т. A), то есть возможный S_1 — $[TA]$.
Пусть есть путь, длина которого меньше ~~|TA|~~ $|TA|$, — S_1', и он начинается в M'. Тогда M' лежит внутри круга с ц. в A и рад. $|TA|$, но весь этот круг без границы лежит внутри ω_2, то есть M' не лежит на границе ω_1 или ω_2 — против.
Значит при заданном S_2 (т.е. при заданной из A) мин. S_1 — $[TA]$.
Так, S состоит из двух частей: $[TA]$ и $[AO]$. Найдём такую A, для которой $|TA|+2\cdot|AO|$ мин. $|TA|=R-|O_2A|$.
~~Пусть Пусть~~ Введём ДСК: $O_1(0;0)$, $O(0;\frac{R}{2})$, $O_2(0;R)$.
ω_1: $x^2+y^2\le R^2$. $\Rightarrow$ $x_A^2+y_A^2=R^2$. Пусть, н.у.о., $y_A\ge0$. ~~...~~ Обозначим $x_A=x$. Тогда $A(x;\sqrt{R^2-x^2})$.
$|TA|+2\cdot|AO|$ — min $\Leftrightarrow$ $2|AO|-|O_2A|$ min $\Leftrightarrow$ $\min\ 2\sqrt{x^2+(\sqrt{R^2-x^2}-\frac{R}{2})^2}-\sqrt{x^2+(\sqrt{R^2-x^2}-R)^2}=$
$=2\sqrt{\frac{5R^2}{4}-R\sqrt{R^2-x^2}}-\sqrt{2R^2-2R\sqrt{R^2-x^2}}$ $\underset{\frac{x}{R}=t}{\overset{:R}{\Leftrightarrow}}$ $\min\sqrt{5-4\sqrt{1-t^2}}-\sqrt{2-2\sqrt{1-t^2}}$. $\underset{\sqrt{1-t^2}=\alpha}{\Leftrightarrow}$ $\min\sqrt{5-4\alpha}-\sqrt{2-2\alpha}$.
$x\in(\frac{R}{2};R)\Rightarrow t\in(\frac{1}{2};1)$. $\Rightarrow 1-t^2\in(0;\frac{3}{4})\Rightarrow \sqrt{1-t^2}\in(0;\frac{\sqrt{3}}{2})$; $\alpha\in(0;\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Черновик: $\sin^3(\pi x) - 8\sin^3(\pi x)\cos^3(\pi x) + 64\sin^3(\pi x)\cos^3(\pi x)\cos^3(2\pi x) =$
$= (\sin(\pi x) - 2\sin(\pi x)\cos(\pi x) + 4\sin(\pi x)\cos(\pi x)\cos(2\pi x))^3$.

$x=1$: V

$x\neq 1$: $\cos(\pi x)=t$: $1 - 8t^3 + 64t^3(2t^2-1)^3 = (1 - 2t + 4t(2t^2-1))^3 =$

$(a+b+c)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3a^2c+6abc+3b^2c+3ac^2+3bc^2+c^3 =$
$= (a^3+b^3+c^3) + 3(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+cb^2)+6abc.$

$a=1,\ b=-2t,\ c=4t(2t^2-1).$

$-2t+4t^2+4t(2t^2-1)+(4t(2t^2-1))^2+16t^3(2t^2-1)-2t(4t(2t^2-1))^2-16t^2(2t^2-1)=0.$

$4t^2-2t+8t^3-4t+64t^6-2\cdot 8t^3\cdot 4t+16t^2+32t^5-16t^3-32t^3(4t^4-4t^2+1)-16t^4+16t^2=0$

$t=0$ ...

$t\neq 0$: $36t^2-6t-40t^3+64t^6-80t^4+160t^5-128t^7=0$;

$64t^7-32t^6-80t^5+40t^4+20t^3-18t^2+3t=0$

$64t^6-32t^5-80t^4+40t^3+20t^2-18t+3=0.$

$\frac{1}{2}$: $5-9+3\neq 0.$

$\cos(7x) = (8\cos^4x-8\cos^2x+1)(4\cos^3x-3) - (3\sin x-4\sin^3x)\cdot 4\sin x(2\cos^3x-\cos x)$

$4\sin^2x(3-4(1-\cos^2x))(2\cos^3x-\cos x)$

$(4\cos^2x-1)(2\cos^3x-\cos x)$

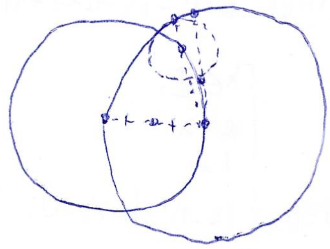
$8\cos^5x-6\cos^3x+\cos x.$

$(32\cos^7x-32\cos^5x-24\cos^4x+4\cos^3x+24\cos^2x-3)+4(\cos^2x-1)(8\cos^5x-6\cos^3x+6\cos x)$

$4\cos x(8\cos^6x-14\cos^4x-6)$

$64\cos^7x-78\cos^5x-24\cos^4x+4\cos^3x+24\cos^2x-24\cos x-3\cos x.$ $\varnothing$.

6



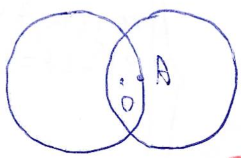
Конец пути — lost т. на гр. $\bigcirc$ $\perp$ 80 центру по прямой!

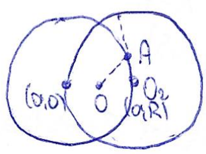
Путь для неакр. пути A — lost т. на $\bigcirc$.

Как быстрее всего добр.?

От тот. на окр., причём единично.

$|OA|\cdot 2+(R-|AO_2|)$ min.





$x^2+y^2=R^2.$ $O(0;\frac{R}{2}).$

$(x_0; \sqrt{R^2-x_0^2})$

$2\sqrt{x_0^2+(\sqrt{R^2-x_0^2}-\frac{R}{2})^2}+(R-\sqrt{x_0^2+(\sqrt{R^2-x_0^2}-R)^2})$ min.

$2\sqrt{\frac{5R^2}{4}-R\sqrt{R^2-x_0^2}}+(R-\sqrt{2R^2-2R\sqrt{R^2-x_0^2}})$ min $|:R$

$\frac{x_0}{R}=t$

$2\sqrt{\frac{5}{4}-\sqrt{1-t^2}}+1-\sqrt{2-2\sqrt{1-t^2}}.$

Чистовик: Пусть $f(\alpha)=\sqrt{5-4\alpha}-\sqrt{2-2\alpha}$.

$$f'(\alpha)=\frac{-4}{2\sqrt{5-4\alpha}}+\frac{+2}{2\sqrt{2-2\alpha}}=\frac{-2}{\sqrt{5-4\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{2-2\alpha}}$$

$$f'(\alpha)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2-2\alpha}}=\frac{2}{\sqrt{5-4\alpha}};\quad 2\sqrt{2-2\alpha}=\sqrt{5-4\alpha} \underset{\alpha\in(0;\frac{\sqrt3}{2})}{\Leftrightarrow} 4(2-2\alpha)=5-4\alpha;\quad 4\alpha=3;\ \alpha=\frac34<\frac{\sqrt3}{2}.$$

$\alpha>\frac34$: $f'(\alpha)>0$, $\alpha<\frac34$: $f'(\alpha)<0 \Rightarrow$ при $\alpha=\frac34$ достигается минимум.

$x=\frac34R$, $y=\frac{\sqrt7}{4}R$.

Длина пути S равна $R-\rho\left((0;R);\left(\frac34R;\frac{\sqrt7}{4}R\right)\right)+2\rho\left(\left(0;\frac R2\right);\left(\frac34R;\frac{\sqrt7}{4}R\right)\right)=$

$$=R-\sqrt{\frac{9}{16}R^2+\left(\frac{\sqrt7}{4}-1\right)^2R^2}+2\cdot\sqrt{\frac{9}{16}R^2+\left(\frac{\sqrt7}{4}-\frac12\right)^2R^2}=R-\frac R4\sqrt{9+(\sqrt7-4)^2}+\frac R2\sqrt{9+(\sqrt7-2)^2}=$$

$$=R-\frac R4\sqrt{32-8\sqrt7}+\frac R2\sqrt{20-4\sqrt7}=R-\frac R2\sqrt{8-2\sqrt7}+R\sqrt{5-\sqrt7}=R-\frac R2(\sqrt7-1)+R\sqrt{5-\sqrt7}=$$

$$=\frac{1^{(2-\sqrt2}}{2+\sqrt2}\left(1-\frac12\sqrt7+\frac12+\sqrt{5-\sqrt7}\right)=\frac{2-\sqrt2}{2}\left(\frac32-\frac12\sqrt7+\sqrt{5-\sqrt7}\right)=\frac{(2-\sqrt2)(3-\sqrt7+\sqrt{5-\sqrt7})}{4}=$$

$$=\frac{6-3\sqrt2-7\sqrt2+\sqrt{14}+2\sqrt{5-\sqrt7}-\sqrt{10-2\sqrt7}}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{6-3\sqrt2-7\sqrt2+\sqrt{14}+2\sqrt{5-\sqrt7}-\sqrt{10-2\sqrt7}}{4}$.

4) $\sin^3(\pi x)-\sin^3(2\pi x)+\sin^3(4\pi x)=(\sin(\pi x)-\sin(2\pi x)+\sin(4\pi x))^3$.

$$\sin^3(\pi x)-8\sin^3(\pi x)\cos^3(\pi x)+64\sin^3(\pi x)\cos^3(\pi x)\cos^3(2\pi x)=(\sin(\pi x)-2\sin(\pi x)\cos(\pi x)+4\sin(\pi x)\cos(\pi x)\cdot\cos(2\pi x))^3;$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin(\pi x)=0,\\ 1-(2\cos(\pi x))^3+(2\cos(\pi x))^3(2\cos(2\pi x))^3=(1-2\cos\pi x+(2\cos(\pi x))(2\cos(2\pi x)))^3;\end{array}\right.$$

(Пусть $2\cos(\pi x)=a$, $2\cos(2\pi x)=b$)

$$\left[\begin{array}{l}x\in\mathbb Z,\\ a^3b^3-a^3=(1-a+ab)^3-1^3;\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}x\in\mathbb Z,\\ a^3(b-1)(b^2+b+1)=(ab-a)((ab-a+1)^2+ab-a+1+1);\end{array}\right.$$

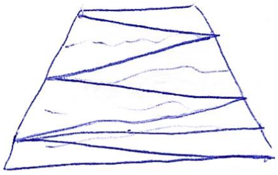
$$\left[\begin{array}{l}x\in\mathbb Z,\\ a=0,\\ b=1,\\ a^2b^2+a^2b+a^2=(a^2b^2+a^2+3-2a^2b+3ab-3a);\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}x\in\mathbb Z,\\ a=0,\\ b=1,\\ a^2b-ab+a-1=0;\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}x\in\mathbb Z,\\ a=0,\\ b=1,\\ (a-1)(ab-1)=0;\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x\in\mathbb Z,\\ 2\cos(\pi x)=0,\\ 2\cos(\pi x)=1,\\ 2\cos(2\pi x)=1,\\ 4\cos(\pi x)\cos(2\pi x)=1;\end{array}\right.\\ x\in[0{,}3;1{,}6]\ (\text{у }(x))\end{array}\right.\quad \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\cancel{x\in\mathbb Z}\ x=1,\\ x\in\{\frac12;1{,}5\},\\ x\in\{\frac13\},\\ 2\pi x\in\{\frac\pi3+2\pi k;\frac{5\pi}{3}+2\pi k\mid k\in\mathbb Z\},\\ 4\cos(\pi x)(2\cos^2(\pi x)-1)=1;\end{array}\right.\\ x\in[0{,}3;1{,}6].\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x\in\{\frac13;\frac12;1;1{,}5\},\\ x\in\{\frac16+k;\frac56+k\mid k\in\mathbb Z\},\\ 8t^3-4t=1.\ (*)\end{array}\right.\\ (\cos(\pi x)=t)\ x\in[0{,}3;1{,}6]\}.\end{array}\right.\quad (\star)$$

$(*)$: $8t^3-4t=1$; $8t^3-4t-1=0$; $(2t+1)(4t^2-2t-1)=0$; $\frac{D}{4}=5$; $\left[\begin{array}{l}t=-1/2,\\ t=\frac{1\pm\sqrt5}{4};\end{array}\right.$ $t\in\{-\frac12;\frac{1-\sqrt5}{4};\frac{1+\sqrt5}{4}\}$. $t\in[-1;1]$

Черновик: 7



4 ~~cos~~ $|:\sin^3(\pi x)$

$\cancel{1+8\cos^3(\pi x)+64\cos^3(\pi x)\cos^3(2\pi x)=(1-2\cos(\pi x)+4\cos(\pi x)\cos(2\pi x))^3}$.

$\cancel{8\cos^3(\pi x)(8\cos^3(2\pi x)-1)=(-2\cos}$

$2\cos(\pi x)=a,\ 2\cos(2\pi x)=b.$

$a^3(b^3-1)=(-a+ab)((1-a+ab)^2+1-a+ab+1)$

$a^3(b^3-1)=a(b-1)(a^2b^2+3ab+a^2-2a^2b-3a+3)$

$a^3(b-1)(b^2+b+1)=a(b-1)$

...

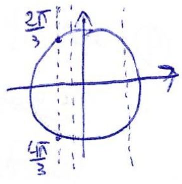
$$\left[\begin{array}{l} a=0, \\ b=1, \\ a^2b^2+a^2b+a^2=a^2b^2-2a^2b+a^2+3ab-3a+3 \end{array}\right.$$

$a^2b-ab+a-1=0$

$(a-1)(ab-1)=0.$

Чистовик: (☆): $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \in \left\{\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{5}{6}; 1; \frac{7}{6}; 1{,}5\right\}, \\ \cos(\pi x) \in \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{4}; \frac{1+\sqrt{5}}{4}\right\}, \end{array}\right. \\ x \in [0{,}3; 1{,}6] \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \pi x \in [0{,}3\pi; 1{,}6\pi]$.



$\frac{1+\sqrt{5}}{4} \textcircled{<} \frac{\sqrt{2}}{2}$; $1+\sqrt{5} \textcircled{<} 2\sqrt{2}$; $6+2\sqrt{5} \textcircled{>} 8$ (…).

Значит $\arccos\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right) < \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} < 0{,}3\pi \Rightarrow \cos(\pi x) \neq \frac{1-\sqrt{5}}{4}$. Остальные значения $\cos(\pi x)$ достигаются дважды.

(☆): $\left[\begin{array}{l} x \in \left\{\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{5}{6}; 1; \frac{7}{6}; 1{,}5\right\}, \\ x \in \left\{\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right\}, \\ x \in \left\{\frac{\arccos\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)}{\pi}; 2 - \frac{\arccos\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)}{\pi}\right\}; \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x \in \left\{\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{5}{6}; 1; \frac{7}{6}; \frac{4}{3}; 1{,}5\right\}, \\ x \in \left\{\frac{\arccos\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)}{\pi}; 2 - \frac{\arccos\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)}{\pi}\right\}; \end{array}\right.$ $x \in \left\{\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{\arccos\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)}{\pi}; \frac{2}{3}; \frac{5}{6}; 1; \frac{7}{6}; \frac{4}{3}; 2 - \frac{\arccos\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)}{\pi}; 1{,}5\right\}$.

<u>Ответ:</u> $\left\{\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{\arccos\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)}{\pi}; \frac{2}{3}; \frac{5}{6}; 1; 1\frac{1}{6}; 1\frac{1}{3}; 2 - \frac{\arccos\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)}{\pi}; 1{,}5\right\}$.