



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов“
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Богкарева Вислента Владимировна
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

вход: 13:29 – 13:51

+1 лист Лидер
Дата +1 лист Лидер

«13» апреля 2025 года

Подпись участника

Богкарева

N1

$$\sqrt{t^2 + 3t - 2} \geq t + 1$$

$$\cancel{t^2} + 3t - \sqrt{t^2 + 3t - 4} > \cancel{t^2} + 2t + 1$$

$$t-1 \geq \sqrt{t^2+3t-4}$$

$$t^2 + 3t - 4 \geq 0$$

$$(t+4)(t-1) \geq 0.$$

$$(t^2 + 3t)^2 \geq t^2 + 3t - 4$$

$f \leq -4$

$$(t^2+3t)^2 - (t^2+3t) \geq -4$$

$$(t^2 + 3t)(t^2 + 3t - 1) \geq -4.$$

$$(t^2 + 3t)^2 \geq t^2 + 3t - 4$$

~~$$t^4 + 9t^2 + 6t^3 \geq t^2 + 3t - 4$$~~

$$t^4 + 6t^3 + 9t^2 \geq t^2 + 3t - 4$$

$$t^4 + 6t^3 + 8t^2 - 3t + 4 \geq 0$$

~~1+6+8-3+4~~

~~$1 - 6 + 8 + 3 + 4$~~

$$36 = 10x^2 - 2 \cdot 3x^2 \cdot \frac{1}{2} = 7x^2$$

$$x = \frac{6}{\sqrt{2}}$$

$$t^2 + 3t - 1 \quad t^2 + 3t = t(t+3)$$

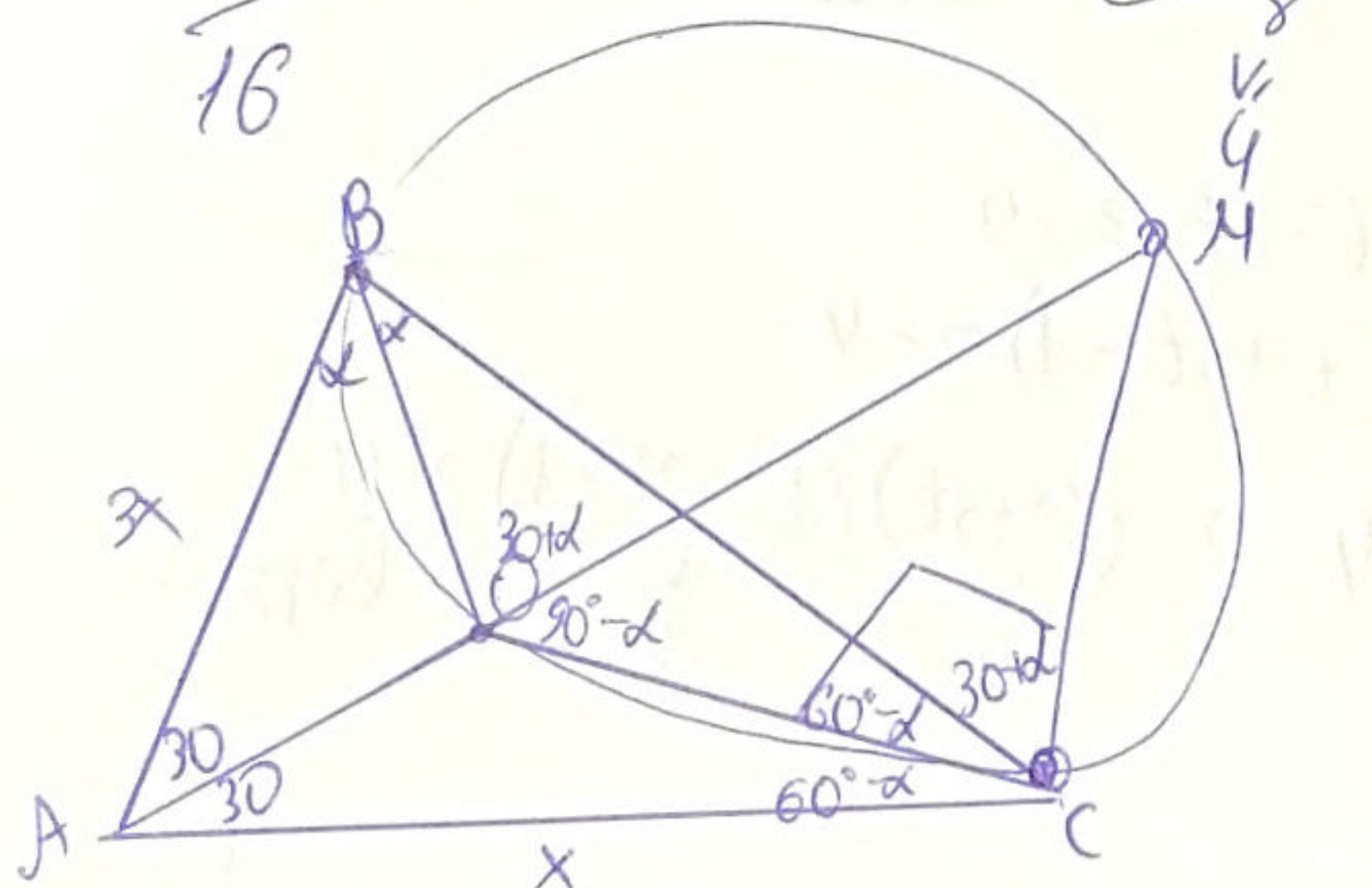
OM-?

$$BC = 6$$

$$\alpha + 30 + \beta = 90^\circ$$

$$\beta = 60^\circ - \alpha$$

~~120~~



$$\sqrt{\log_2^2 x + 3 \log_2 x - 4} \geq \log_2 x + 1$$

$$x > 0. \log_2 x = t$$

$$\sqrt{t^2 + 3t - 4} \geq t + 1$$

$$t^2 + 3t - 4 \geq 0 \Rightarrow (t+4)(t-1) \geq 0 \Rightarrow t \leq -4 \text{ или } t \geq 1$$

$$t^2 + 3t \geq \sqrt{t^2 + 3t - 4} \Rightarrow t^2 + 3t \geq 0 \quad (t^2 + 3t)^2 \geq t^2 + 3t - 4$$

$$t(t+3) \geq 0$$

$$t \leq -3 \text{ или } t \geq 0$$

$$1) t \leq -1 \text{ - верно} \Rightarrow t \leq -4$$

$$2) t \geq -1$$

$$t^2 + 3t - \sqrt{t^2 + 3t - 4} \geq (t+1)^2$$

$$t^2 + 3t - \sqrt{t^2 + 3t - 4} \geq t^2 + 2t + 1$$

$$t - 1 \geq \sqrt{t^2 + 3t - 4}$$

$$\Rightarrow t \geq 1$$

$$t^2 - 2t + 1 \geq t^2 + 3t - 4$$

$$5 \geq 5t$$

$$1 \leq t \leq 1. \Rightarrow t = 1$$

$$\sqrt{1+3-\sqrt{1+3-4}} \geq 1+1$$

$$\sqrt{4} \geq 2$$

$$2 \geq 2$$

$$1) t \leq -4:$$

$$(t^2 + 3t)^2 - t^2 - 3t \geq -4$$

$$(t^2 + 3t)(t^2 + 3t - 1) \geq -4$$

$$t(t+3) \geq 4 \Rightarrow \underbrace{(t^2 + 3t)}_{\substack{\text{''} \\ -4}} \underbrace{(t^2 + 3t - 1)}_{\substack{\text{''} \\ -1}} \geq -4 - \text{верно.}$$

$$\log_2 x \leq -4 = \log_2 \frac{1}{16} \quad \text{и} \quad 0 < x \leq \frac{1}{16}$$

Чистовик

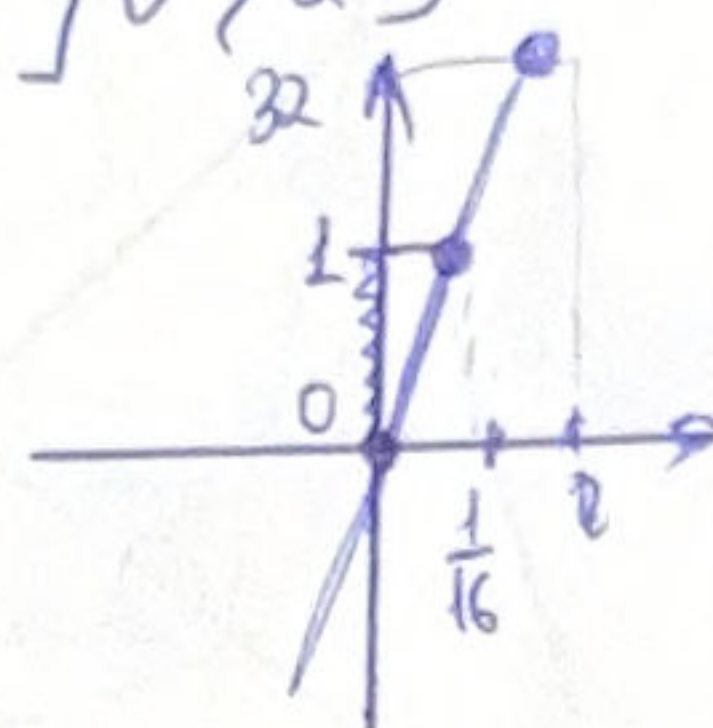
$$\log_2 x = 1 \quad x \neq 0 \quad x = 2$$

$$\Rightarrow x \in (0; \frac{1}{16}] \cup \{2\}$$

~~Ответ: $(0; \frac{1}{16}]$~~

$$f(x_0) = 16x_0$$

x_0 - решение.



$$f(2) = 32$$

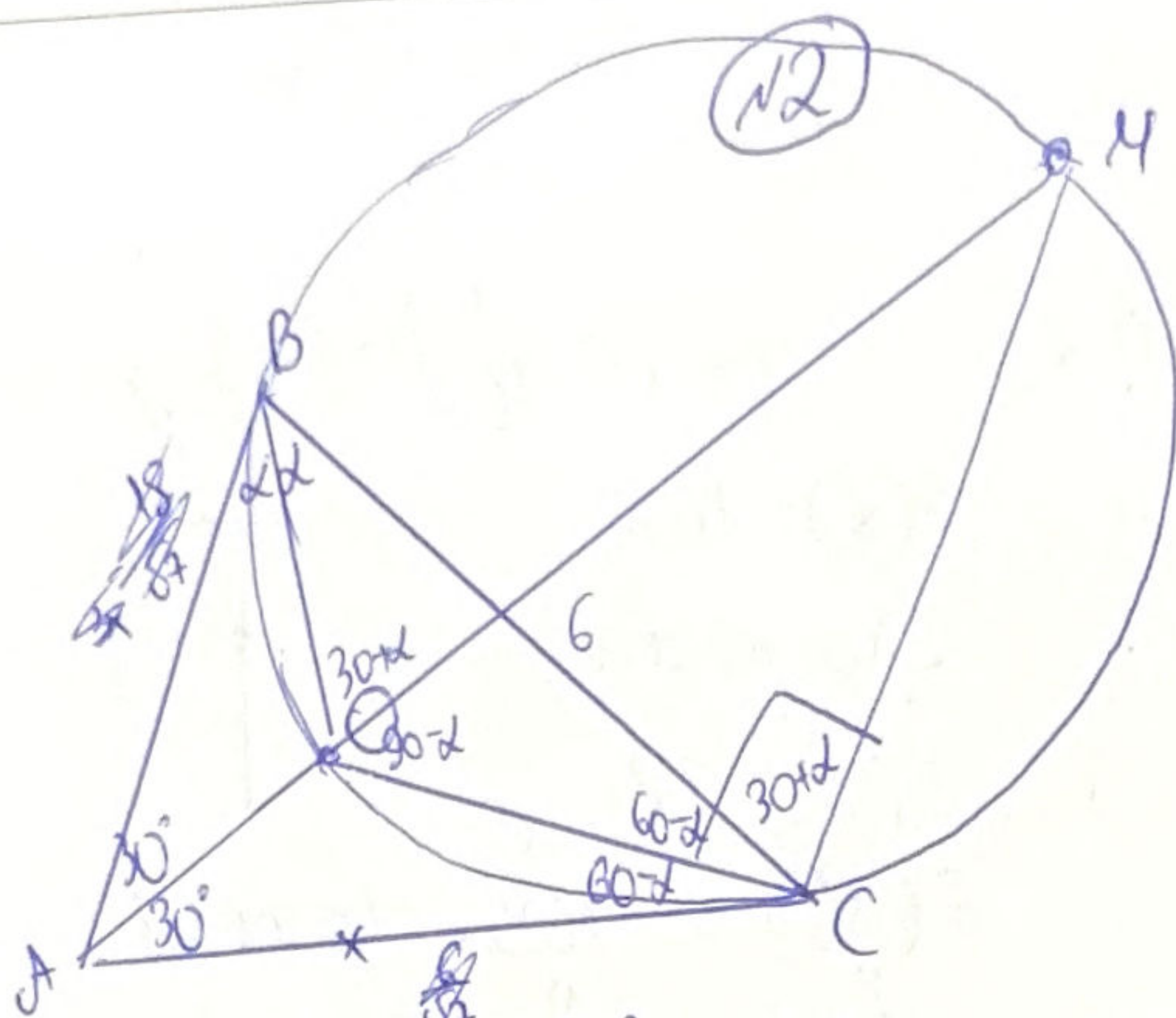
$$f\left(\frac{1}{16}\right) = 16 \cdot \frac{1}{16} = 1$$

$$\text{значение} = 1$$

$$32 + 1 = 33$$

Ответ: 33

Чистовик



$$BC = 6$$

$$6^2 = (3x)^2 + x^2 - 2 \cdot 3x \cdot x \cdot \cos 60^\circ$$

$$36 = 10x^2 - 3x^2 = 7x^2 \quad x = \frac{6}{\sqrt{7}}$$

$$\left(\frac{6}{\sqrt{7}}\right)^2 = \left(\frac{18}{\sqrt{7}}\right)^2 \cdot \sin^2 60^\circ$$

$$\angle BAC = 60^\circ \Rightarrow \angle BAO = \angle OAC = 30^\circ$$

$$\text{Пусть } \angle ABO = \angle OBC = \alpha \Rightarrow \angle OCB = \angle OCA = 60^\circ - \alpha$$

$$\angle BOM = \angle ABO + \angle BAO = 30^\circ + \alpha = \angle BCM \quad (\text{вписанность})$$

$$\angle MOC = 30^\circ + 60^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha$$

$$\angle OCB + \angle BCM = 60^\circ - \alpha + 30^\circ - \alpha = 90^\circ \Rightarrow OM - \text{диаметр}$$

$$OM = 2R \quad \text{По т. синусов:}$$

$$\frac{BC}{\sin(\angle BOC)} = 2R$$

$$\frac{6}{\sin(30^\circ + \alpha + 90^\circ - \alpha)} = 2R$$

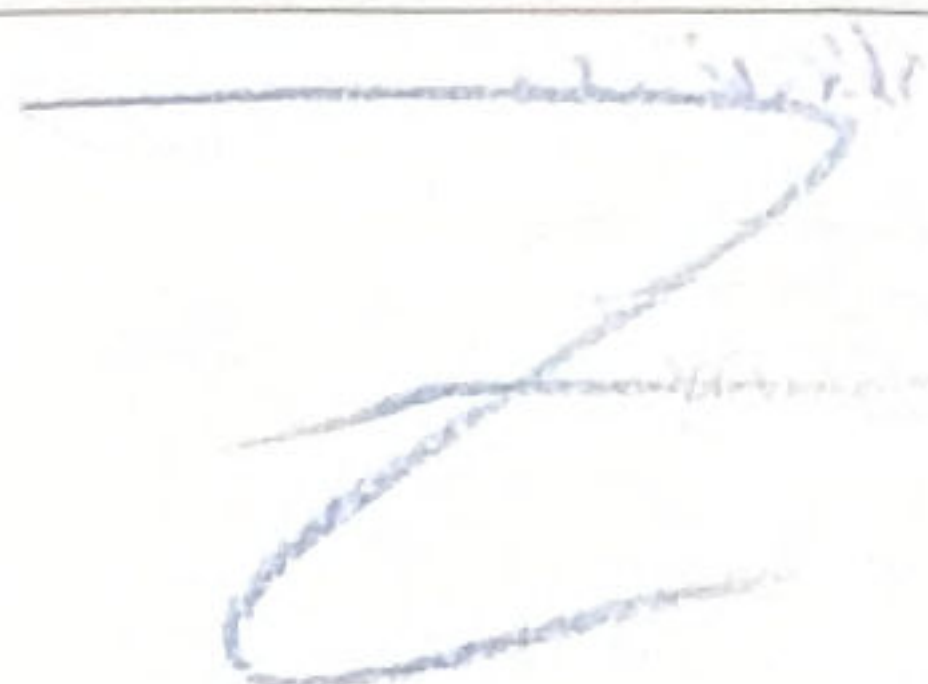
$$\frac{6}{\sin 120^\circ} = 2R$$

$$\frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R = OM = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$$

$$\text{Ответ: } 4\sqrt{3}$$

97-81-54-07

(160,7)

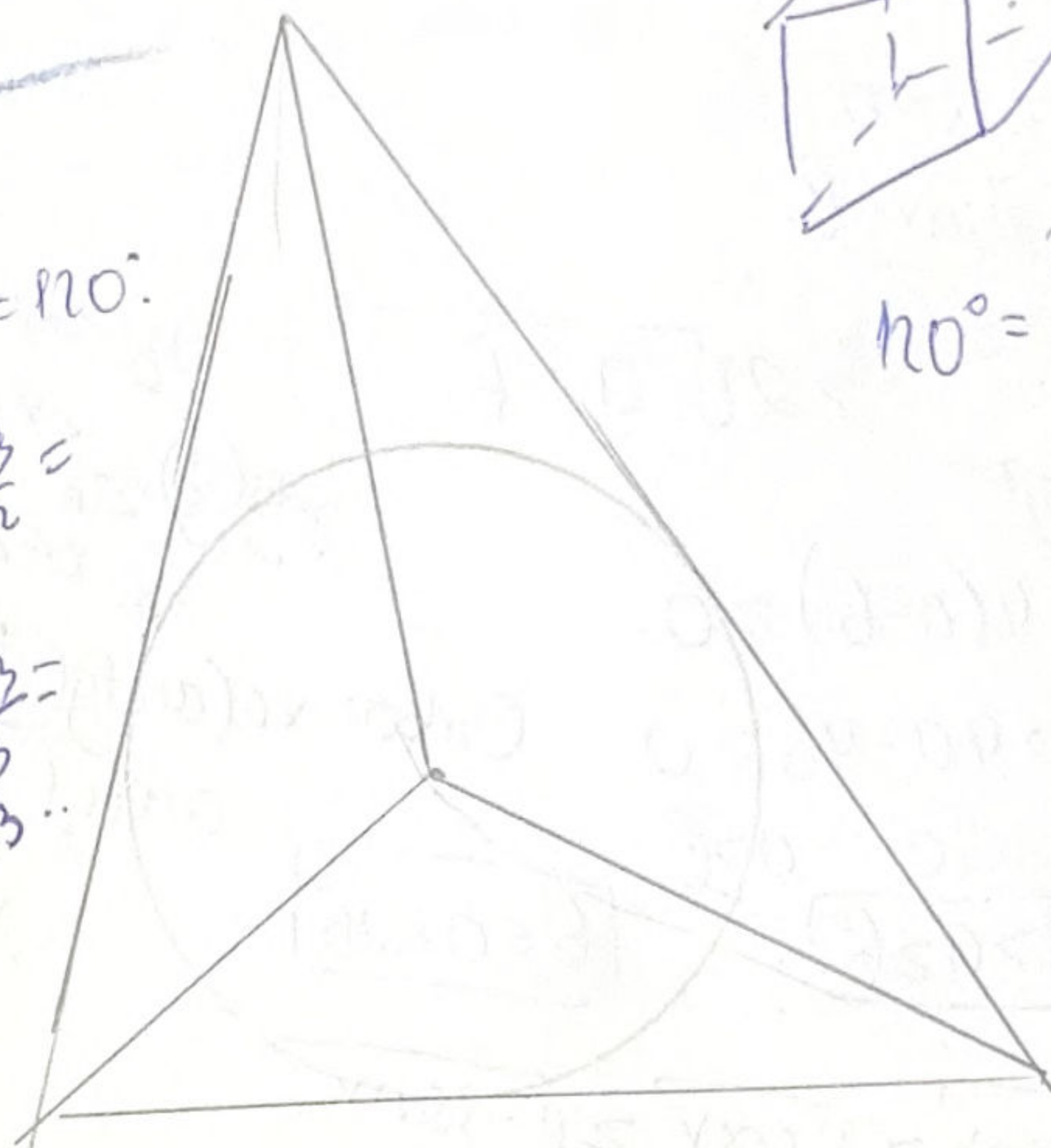


$$60^\circ + 90^\circ$$

$$\frac{60^\circ}{2} + 90^\circ = 120^\circ$$

$$\frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$$



$$120^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2 \cdot \frac{12}{3}}{3} = 120^\circ$$



$$\sqrt{\sqrt{\cos x} + 2\sqrt{-3\sin x}} > 2\sqrt{\sqrt{\cos x} - \sqrt{-3\sin x}}$$

$$\sqrt{a + 2b} > 2\sqrt{a - b}$$

при $a \geq b \geq 0$.

$$a + 2b > 4(a - b) \geq 0, 0 \leq b \leq a < 2b$$

$$a + 2b > 4a - 4b$$

$$6b > 3a \quad | :3$$

$$2b > a$$

$$\sqrt{-3\sin x} \leq \sqrt{\cos x} < 2\sqrt{-3\sin x}$$

$$-3\sin x \leq \cos x \leq -6\sin x$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow \cos x = 0$$

$$\sin x \neq 0$$

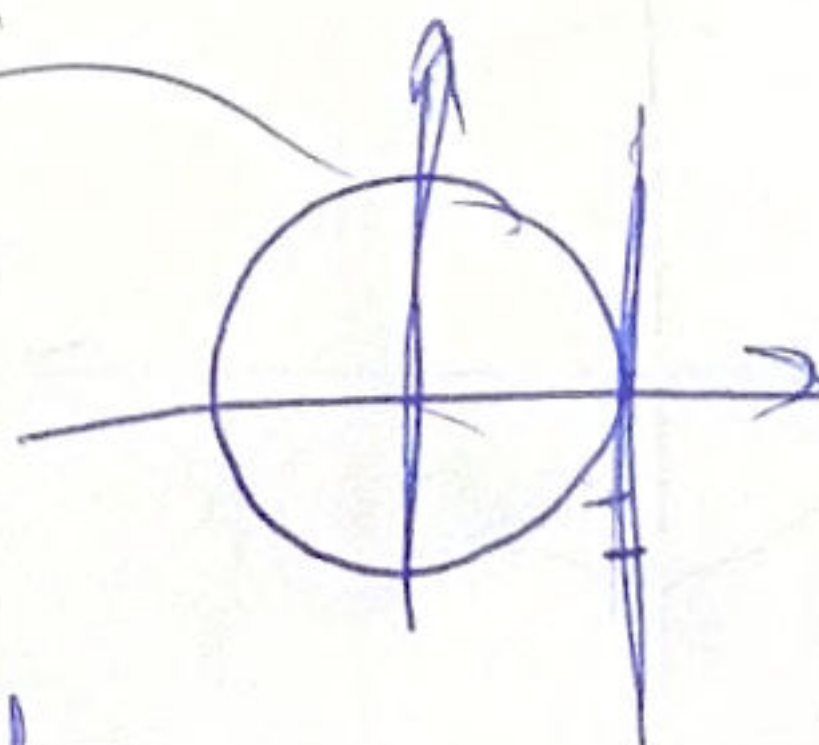
$$-3 \leq \cot x \leq -6$$

$$-\cot x \leq 1$$

$$\cot x \leq -\frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{6} \leq \tan x \leq -\frac{1}{3}$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow \sin x = 1$$



(13)

Числовый

$$\sqrt{\cos x + 2\sqrt{-3\sin x}} > 2\sqrt{\cos x - \sqrt{-3\sin x}}$$

Пусть $\sqrt{\cos x} = a$
 $\sqrt{-3\sin x} = b$

$$\sqrt{a+2b} > 2\sqrt{a-b}$$

$$\Downarrow$$

$$a+2b > 4(a-b) \geq 0$$

$$a+2b > 4a-4b \geq 0$$

$$6b > 3a \quad a > 2b$$

$$\boxed{2b > a \geq b}$$

$$\boxed{b \leq a < 2b}$$

$$2. \sqrt{-3\sin x} > \sqrt{\cos x} \geq \sqrt{-3\sin x}$$

$$\cos x \geq 0 \quad \Downarrow$$

$$0 \leq -3\sin x < \cos x < -12\sin x$$

Если $\cos x \neq 0$ $-3\sin x < 0 < -12\sin x$
 $\sin x > 0$ $\sin x < 0$ — противоречие.

$$\Rightarrow \sin x < 0$$

и $\cos x > 0$ (из условия неравенств)

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x < 0 \\ \cos x > 0 \end{cases}$$

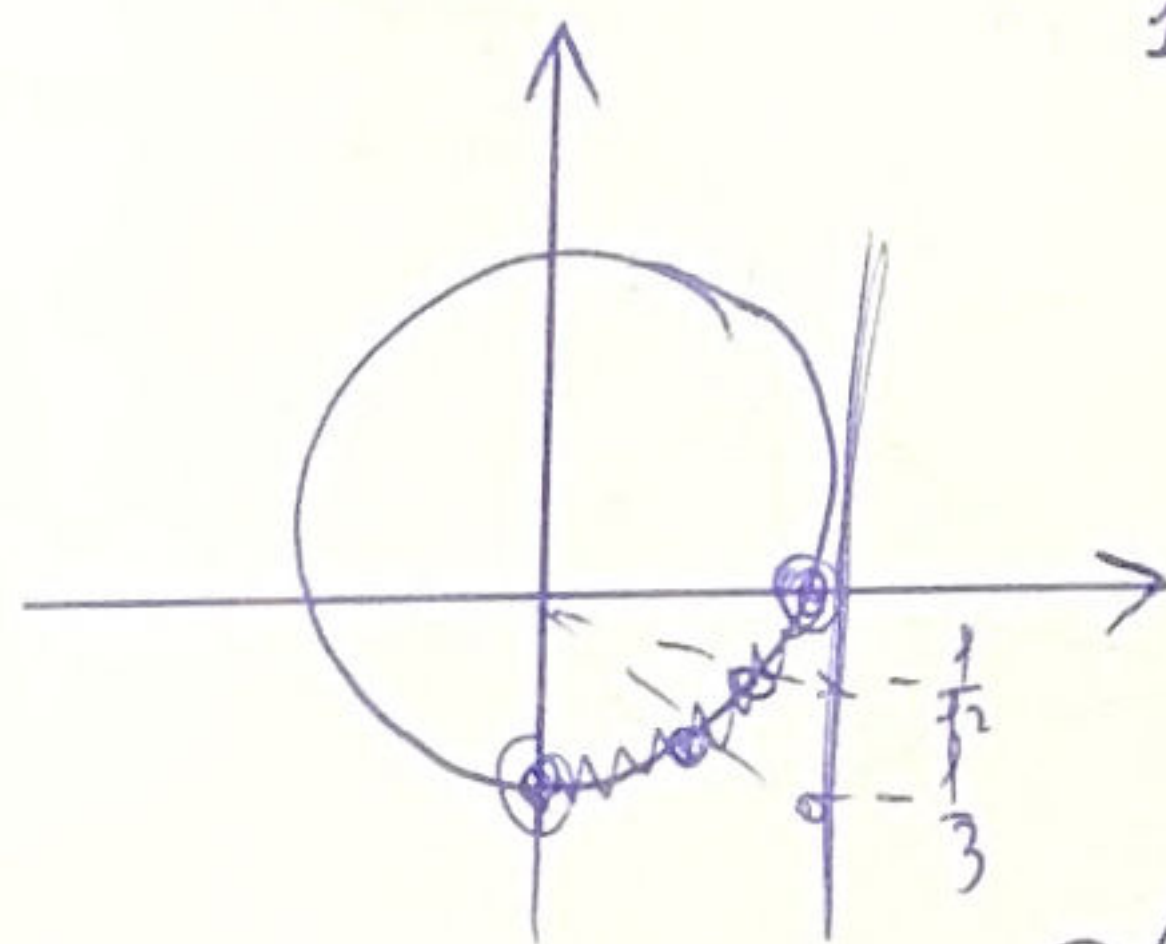
$$-3\sin x < \cos x \quad | : \cos x > 0 \quad \cos x < -12\sin x \quad | : \cos x > 0$$

$$-3 \cdot \operatorname{tg} x < 1 \quad 3 \operatorname{tg} x > -1$$

$$1 < -12 \cdot \operatorname{tg} x \quad 12 \operatorname{tg} x < -1$$

$$\operatorname{tg} x > -\frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{3} < \operatorname{tg} x < -\frac{1}{12}$$



Ответ: $x \in (\arctg(-\frac{1}{3}) + 2\pi k; \arctg(-\frac{1}{12}) + 2\pi k)$ где $k \in \mathbb{Z}$

из окружности
 $\arctg(-\frac{1}{3}) + 2\pi k < x < \arctg(-\frac{1}{12}) + 2\pi k$
 где $k \in \mathbb{Z}$.

$$|x+1-a| + |4^x-a| = 4^x - x - 1$$

$[-1; 1]_{\forall}$ - одно реш-е.

$$4^x - a + a - x - 1 \Rightarrow 4^x \geq a$$

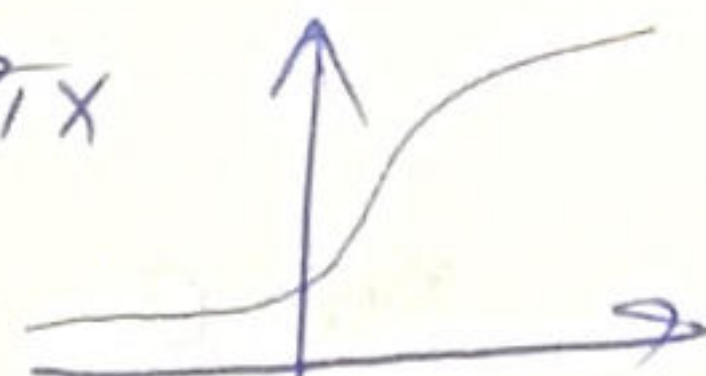
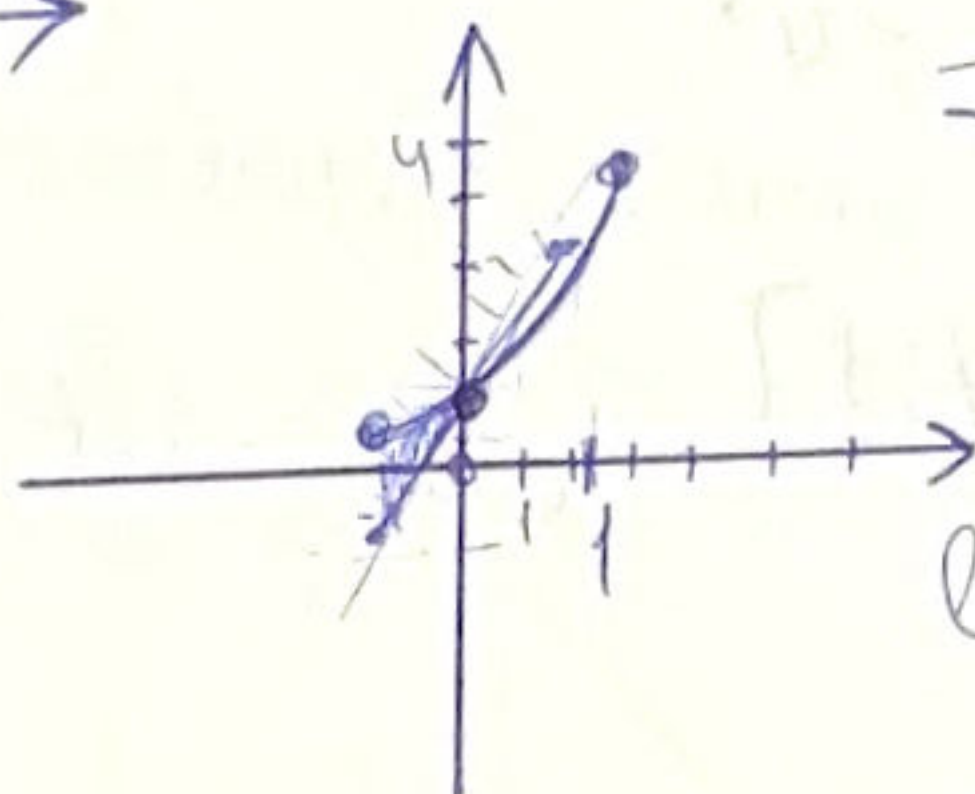
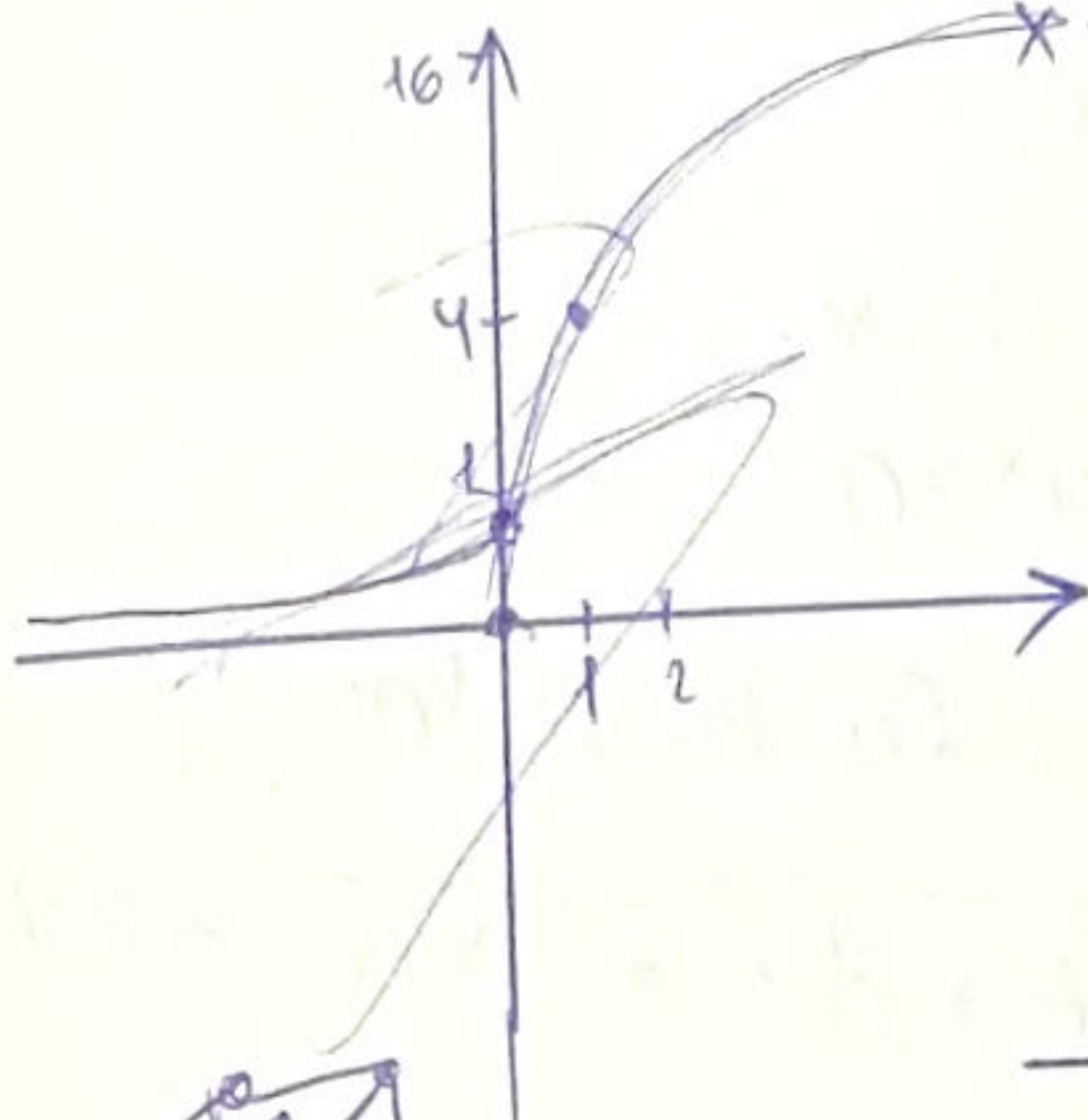
$$x+1-a \leq 0.$$

$$a \leq 4^x$$

$$a \geq x+1.$$

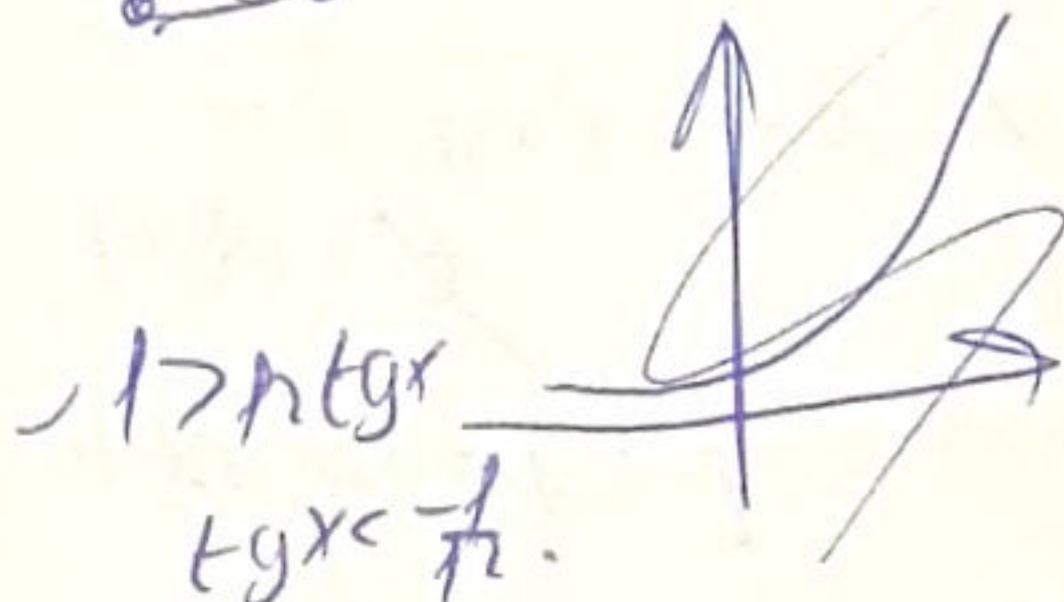
$$x+1 \leq a \leq 4^x.$$

$$a-1 \rightarrow x$$



$$4^x \geq \frac{1}{\ln 4}$$

$$x > 0. y = 2^x \ln 4 \geq \frac{1}{2^x} \Rightarrow \ln 4 \geq \frac{1}{2^{2x}}$$



$$x+1 \leq a \leq 4^x.$$

$$0 \leq x \leq a-1$$

$$a > 0$$

$$a = 0 \quad -1 \leq 0 \leq 4^x$$

$$\log_4 a \leq 4^x \quad a > 0$$

$$4^{\log_4 a} \leq 4^x$$

$$\log_4 a \leq x$$

$$\log_4 a \leq x \leq a-1.$$

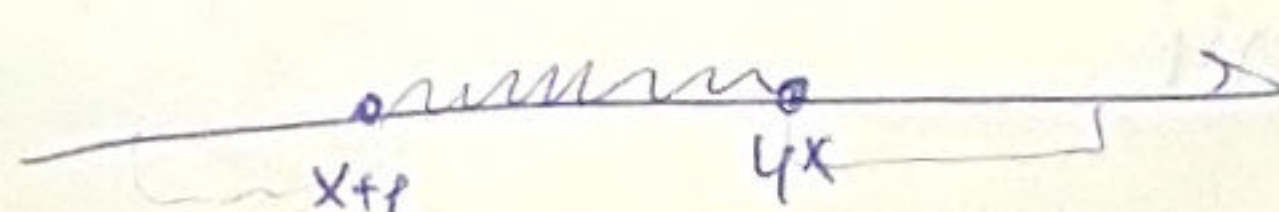
$$(x+1=4^x) \quad (x=0)$$

$$4^x - x = 1. \quad 4^x = x+1.$$

$$0 \leq x+1 \leq a \leq 4^x \leq 4.$$

$$x+1=4^x.$$

$$x > 0. \quad x=0.$$



$$\begin{aligned} x_1+1 &= 4^{x_1} \\ x_2+1 &= 4^{x_2} \\ x_3+1 &= 4^{x_3} \end{aligned}$$

(УЧ)

Частовик

$$|x+1-a| + |4^x-a| = 4^x - x - 1$$

$$|a-x-1| + |4^x-a| = 4^x - x - 1$$

Знаем, что: $|b|+|c| \geq b+c$, т.к. $|b| \geq b$ и $|c| \geq c$

$$\Downarrow$$

$$4^x - x - 1 \geq a - x - 1 + 4^x - a = 4^x - x - 1.$$

Рав-во достигается при

$$a - x - 1 \geq 0$$

$$a \geq x + 1$$

$$4^x - a \geq 0$$

$$4^x \geq a$$

$$x+1 \leq a \leq 4^x.$$

Начертим реш-е неравенства в xOa ,

где $x \in [-1; 1]$

$$\sqrt{t^2+3t} - \sqrt{t^2+x-4} \geq t+1$$

$$t \geq -1$$

$$t \leq -1$$

$$t \geq 1$$

$$\sqrt{t^2+3t} - \sqrt{t^2+x-4} \geq t+1$$

$$t-1 \geq \sqrt{t^2+x-4}$$

$$t \geq 1$$

$$t^2-2t+1 \geq t^2+3t-4$$

$$5 \geq 5t$$

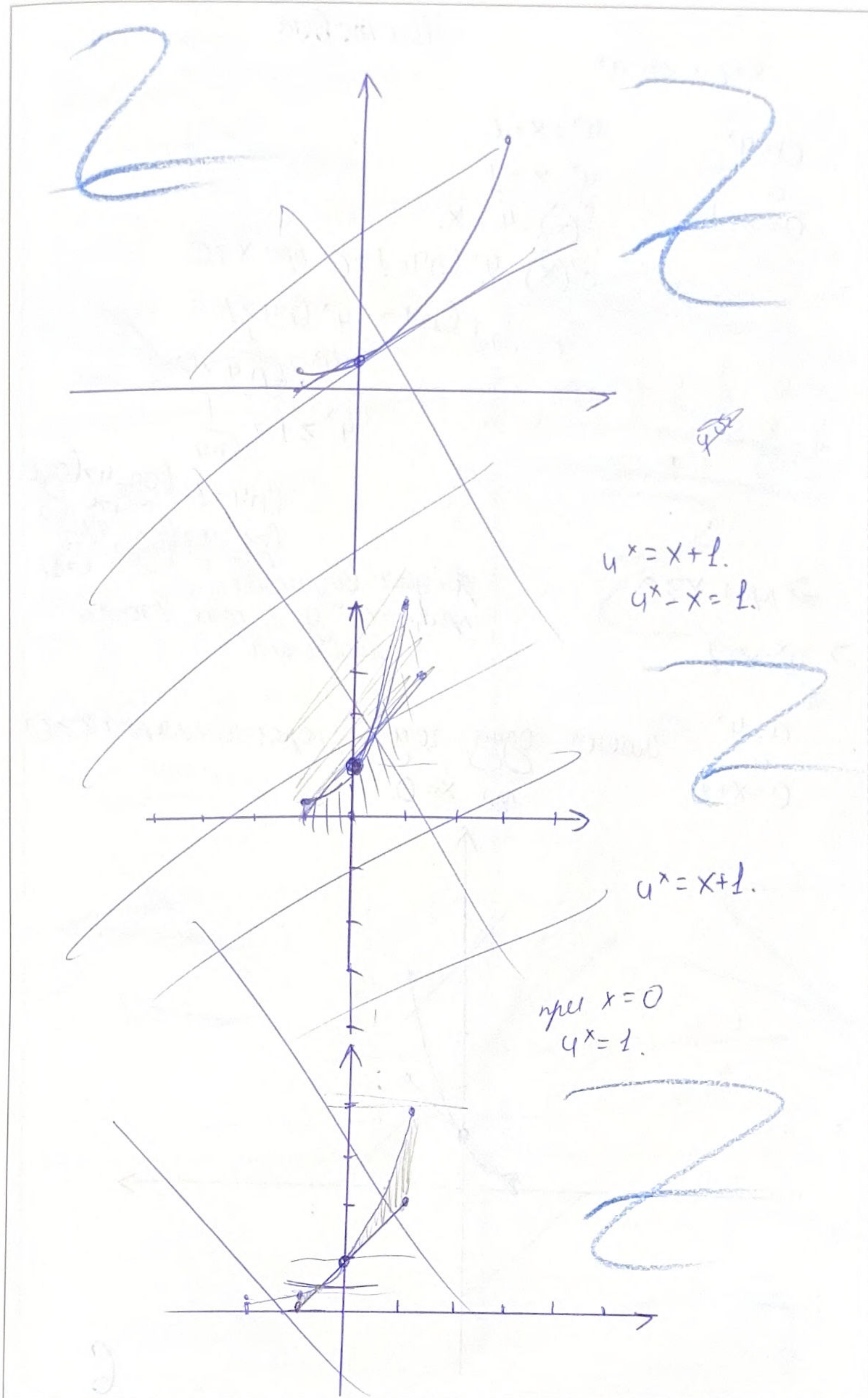
$$1 \leq t \leq 1$$

Графики касаются,

т.к.

$$f(x) = 4^x$$

$$f'(x) = 4^x \cdot \ln 4$$



Задачник

$$x+1 \leq a \leq 4^x$$

$$a=4^x$$

$$a=x+1$$

$$4^x = x+1$$

$$4^x - x = 1$$

$$f(x) = 4^x - x$$

$$f'(x) = 4^x \cdot \ln 4 - 1 > 0 \text{ при } x \geq 0$$

$$\ln 4 > 4^x \cdot \ln 4 > 1$$

$$4^x > \frac{1}{\ln 4} > 0$$

$$4^x \geq 1 > \frac{1}{\ln 4}$$

$$\ln 4 > 1 \quad \log_e 4 > \log_e e$$

$$\log_{10} 4 > \log_{10} 10$$

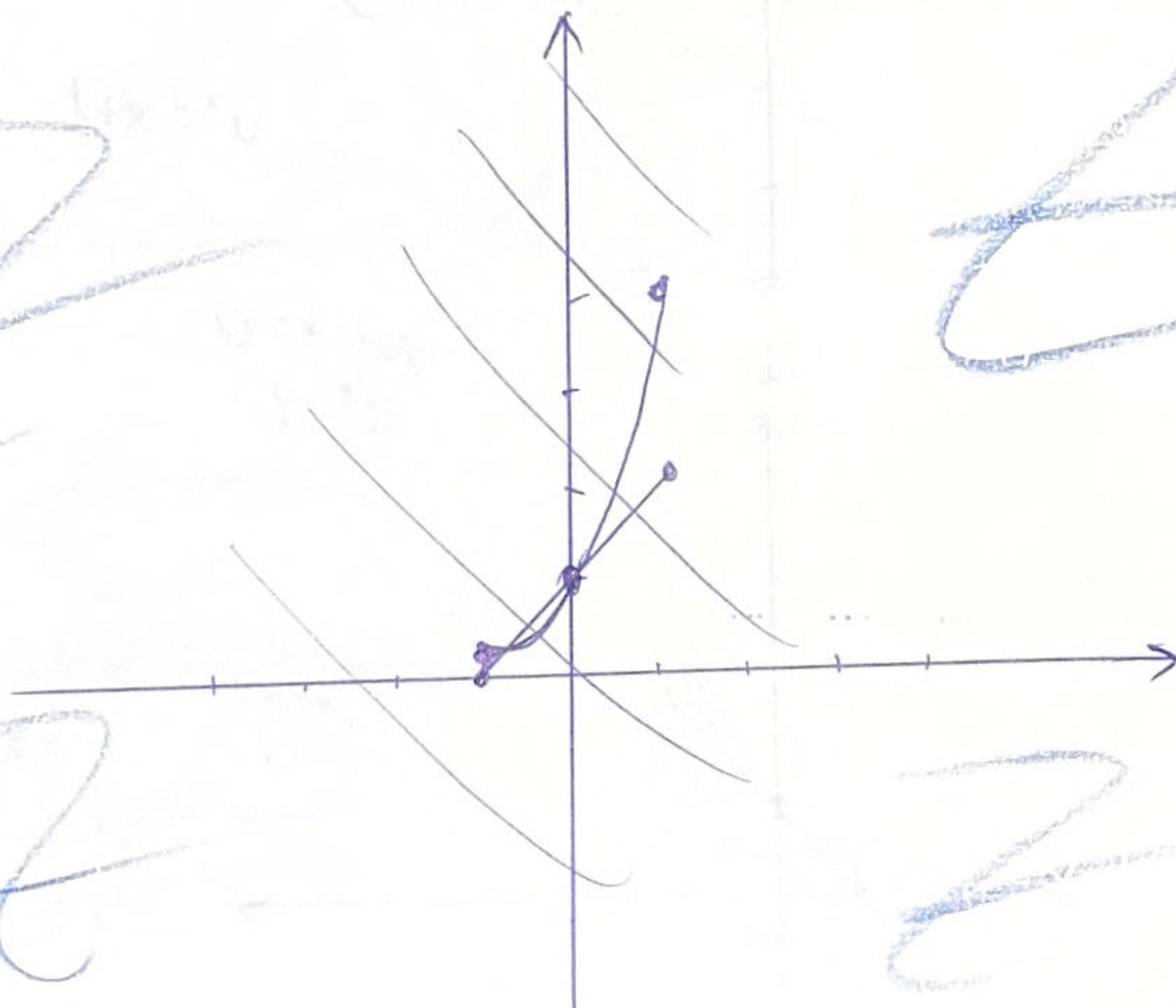
→ при $x \geq 0$

$$\Rightarrow 4^x = x+1$$

$$a=4^x$$

$$a=x+1$$

имеют одну точку пересечения при $x=0$



~~при $x < 0$ будет 1 точка~~

Чистовик

~~Графики не касаются, т.к.~~

$$y = 4^x$$

$$y' = 4^x \cdot \ln 4$$

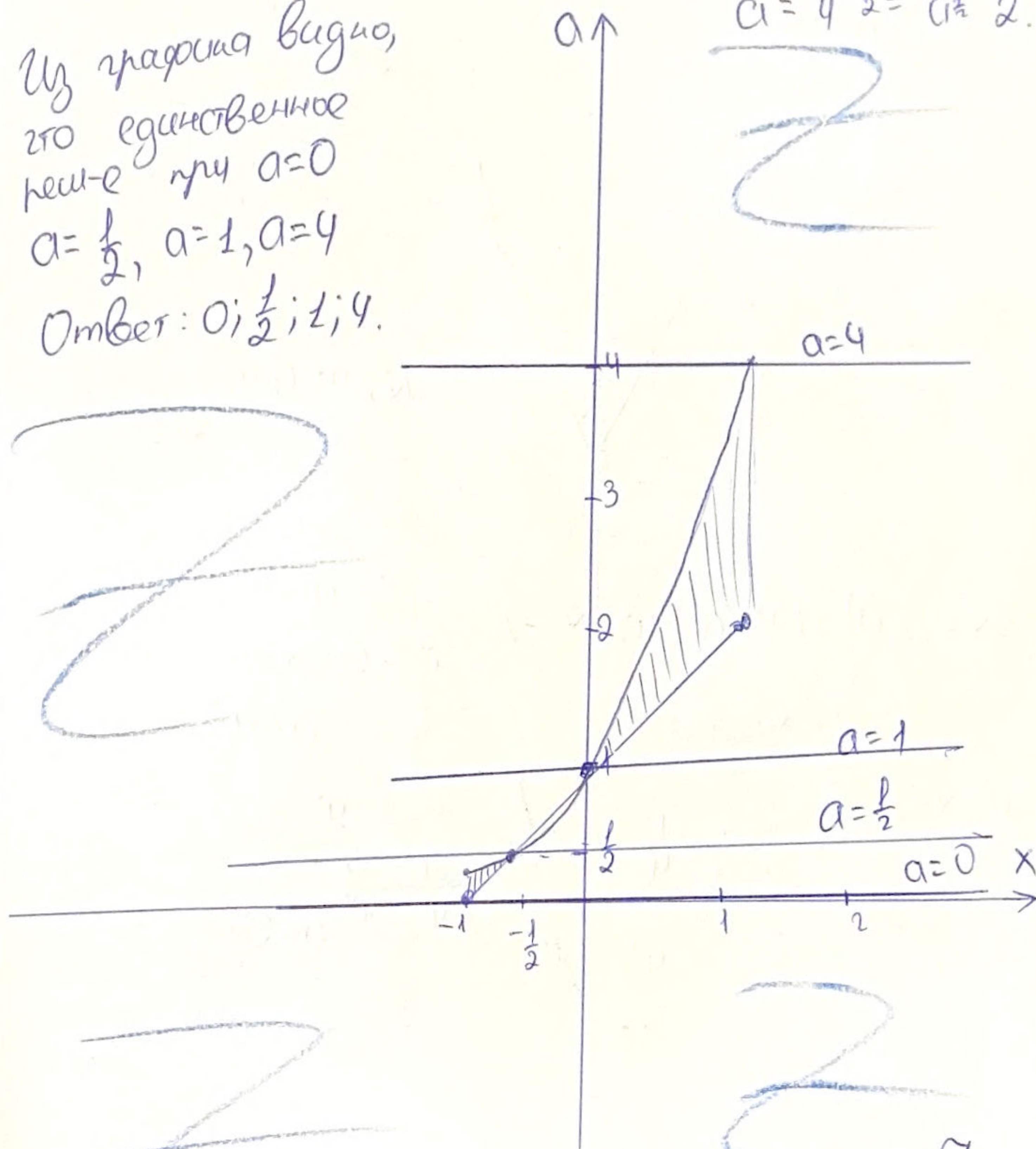
$$y'(0) = \ln 4 \neq k = 1 \quad (y = x + 1)$$

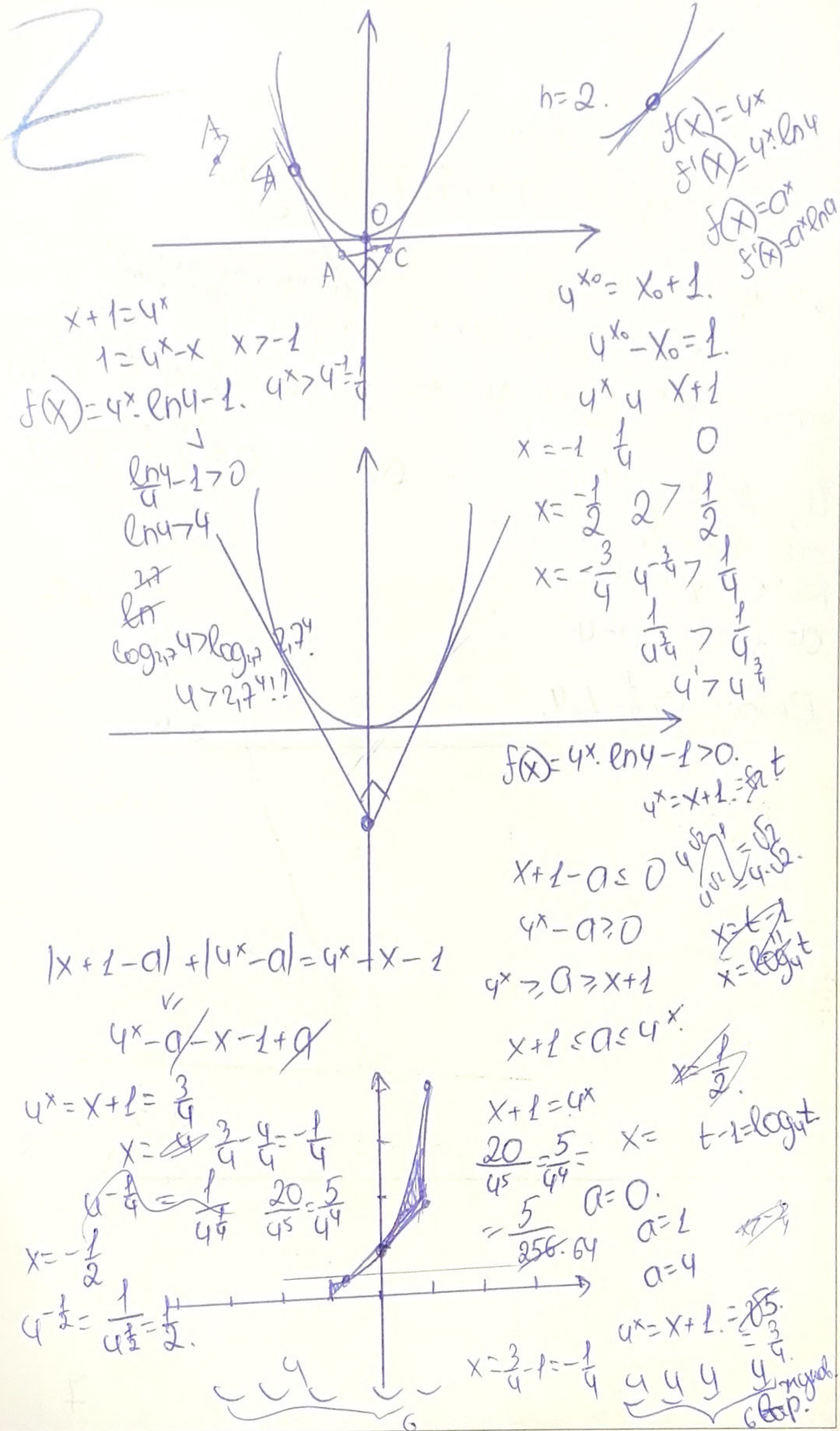
будет ещё одна точка пересечения (так как мы знаем, как выглядит график $y = 4^x$ и знаем, как выглядит график $y = x + 1$), что точка пересечения - одна: при $x = -\frac{1}{2}$: $a = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$ (св-ва)

Из графика видно, что единственное реш-е при $a = 0$

$$a = \frac{1}{2}, a = 1, a = 4$$

Ответ: $0; \frac{1}{2}; 1; 4$.





$$\sqrt{t^2+3t} - \sqrt{t^2+3t-4} \geq t+1$$

$$t^2+3t-4 \geq 0 \quad \text{и} \quad t^2+3t \geq \sqrt{t^2+3t-4}$$

$$t^2+3t - \sqrt{t^2+3t-4} \geq t+2t+1 \quad t \leq -1$$

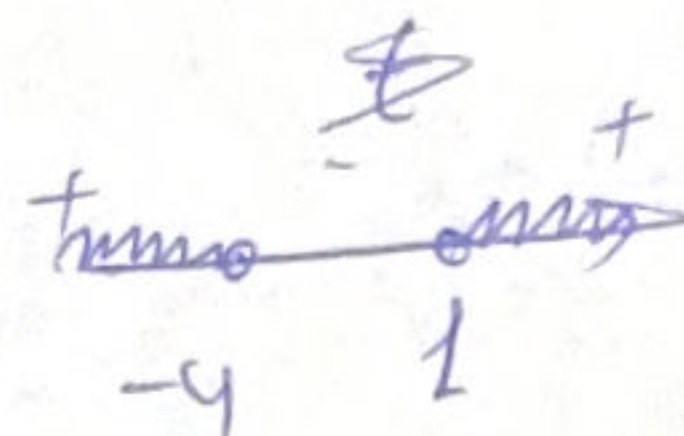
$$t-1 \geq \sqrt{t^2+3t-4}$$

$$t^2-2t+1 \geq t^2+3t-4$$

$$5 \geq 5t$$

$$1 \geq t$$

$$t=1$$



$$t \leq -4 \quad \text{и} \quad t \geq 1$$

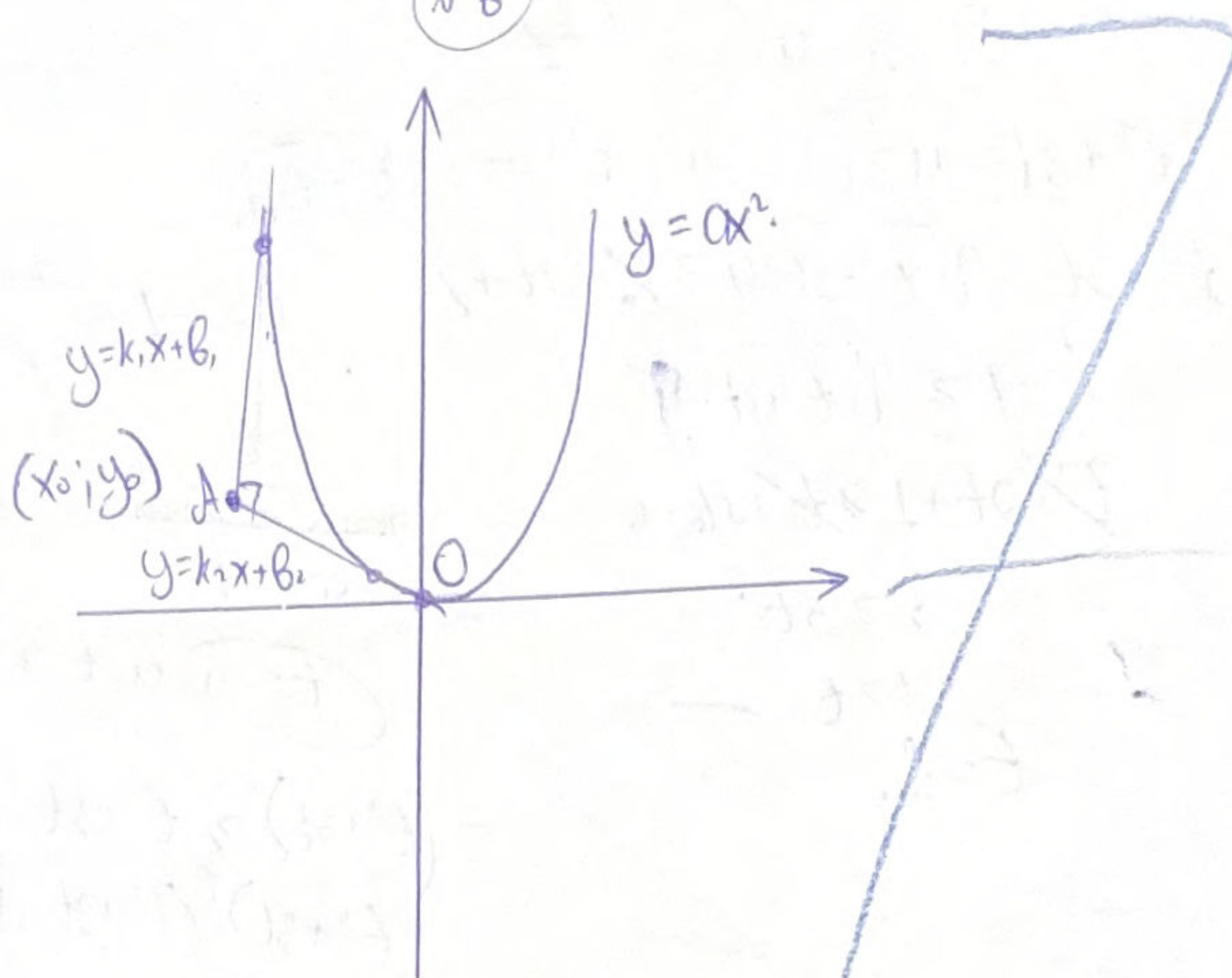
$$(t^2+3t)^2 \geq t^2+3t-4$$

$$(t^2+3t)^2 (t^2+3t-1) \geq -4$$

$$t(t+3)$$

Чистовик

№ 6



$y = kx + b$ кас. $y = ax^2$, когда

$$ax^2 = kx + b$$

$$ax^2 - kx - b = 0$$

$$D = k^2 + 4ab = 0.$$

$$4ab = -k^2.$$

$$b = -\frac{k^2}{4a} \quad (a \neq 0, \text{ т.е. это параболы})$$

$$y = k_1x + b_1, \quad y = k_2x + b_2 \quad \perp \Rightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$$

$$y = k_1x + b_1 \quad \text{и} \quad y = -\frac{1}{k_1}x + b_2 \quad k_2 = -\frac{1}{k_1}$$

$$y = k_1x - \frac{k_1^2}{4a} \quad \text{и} \quad y = -\frac{1}{k_1}x - \frac{k_1^2}{4a}.$$

они проходят 2/3 $A(x_0, y_0) \Rightarrow$

$$k_1 x_0 = -\frac{1}{k_1} x_0$$

$$x_0 \left(k_1 + \frac{1}{k_1} \right) = 0.$$

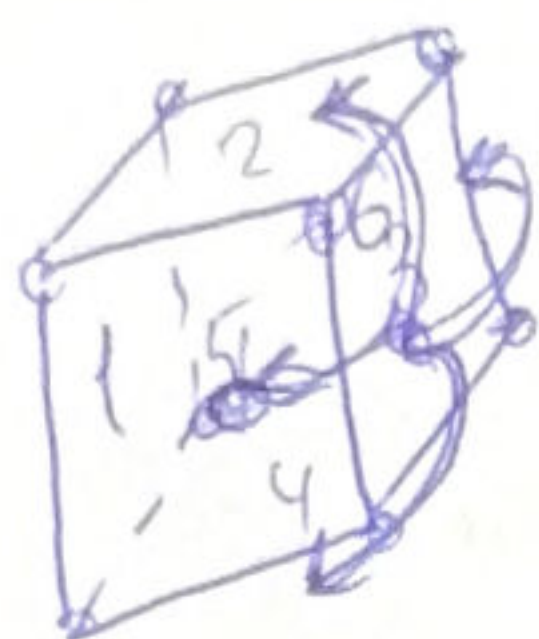
$$k_1 + \frac{1}{k_1} = 0$$

$$k_1^2 + 1 = 0 \quad \text{— не может быть}$$

$\Rightarrow x_0 = 0$, значит, А, В и С имеют по х координату = 0.

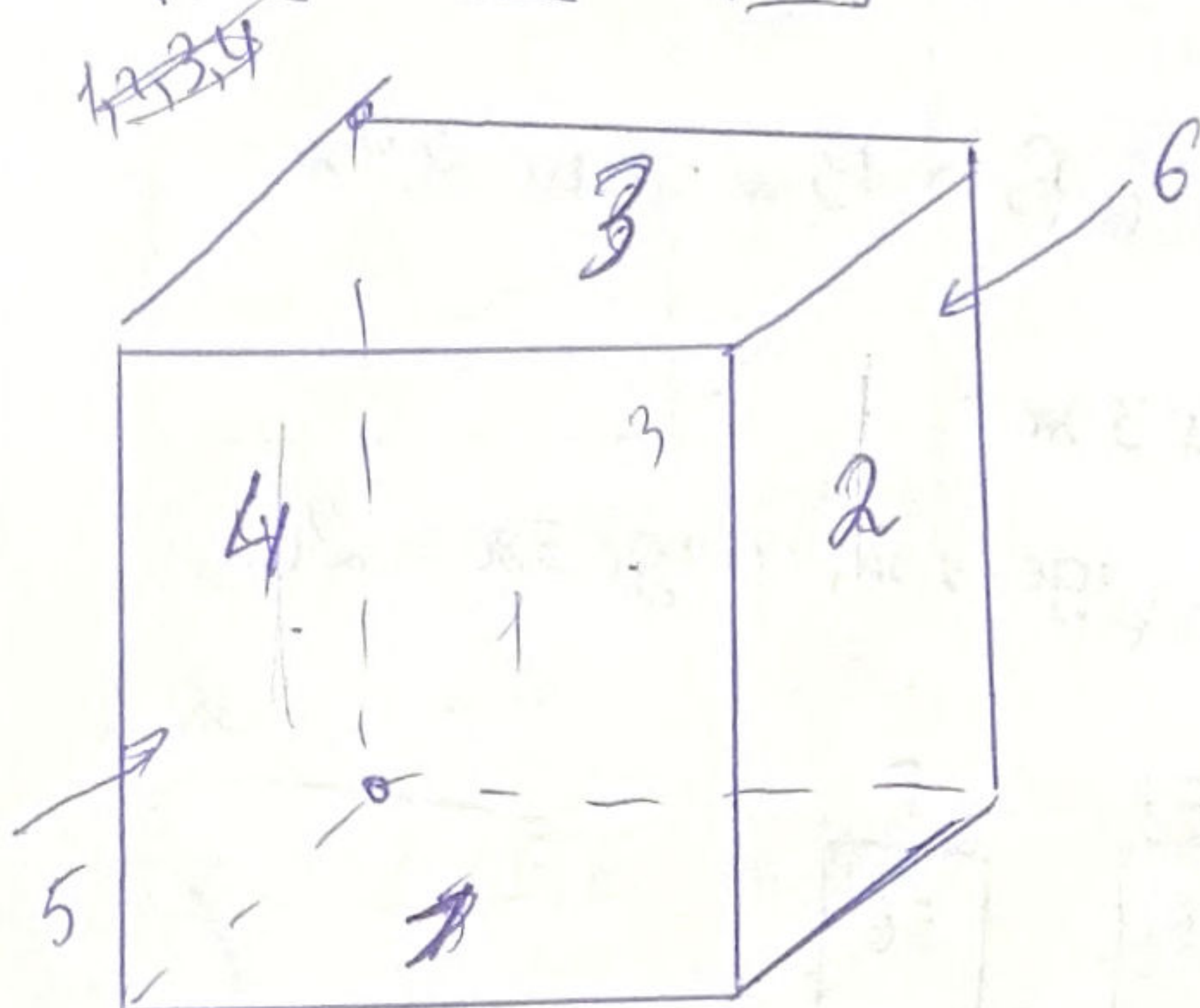
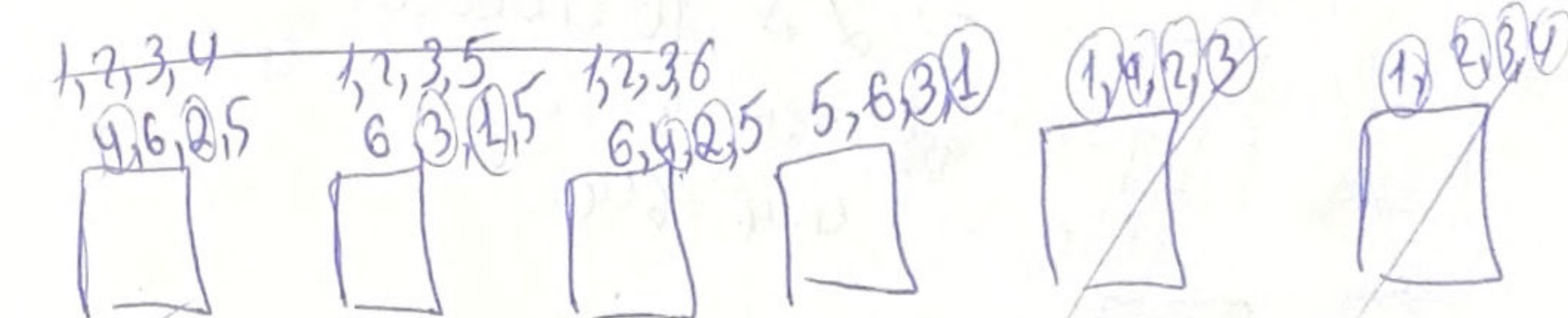
11

97-81-54-07
(160.7)

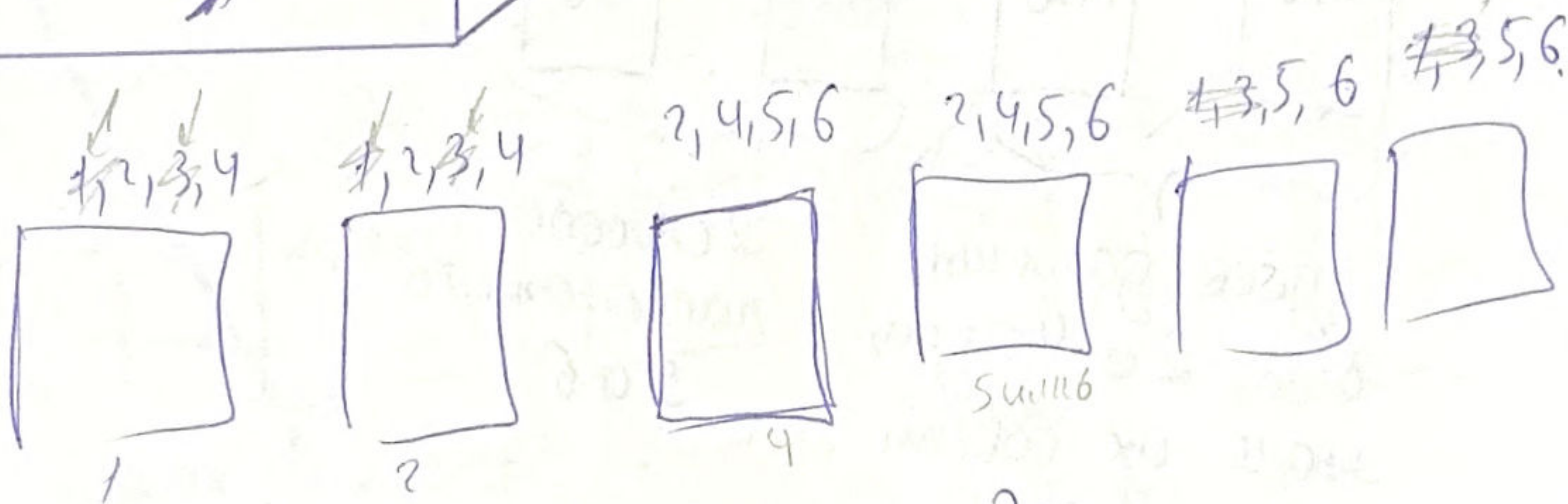


4
4 4 4 4 4 4
6 жупов

4⁶ вариантов.



1,2
3,4
2

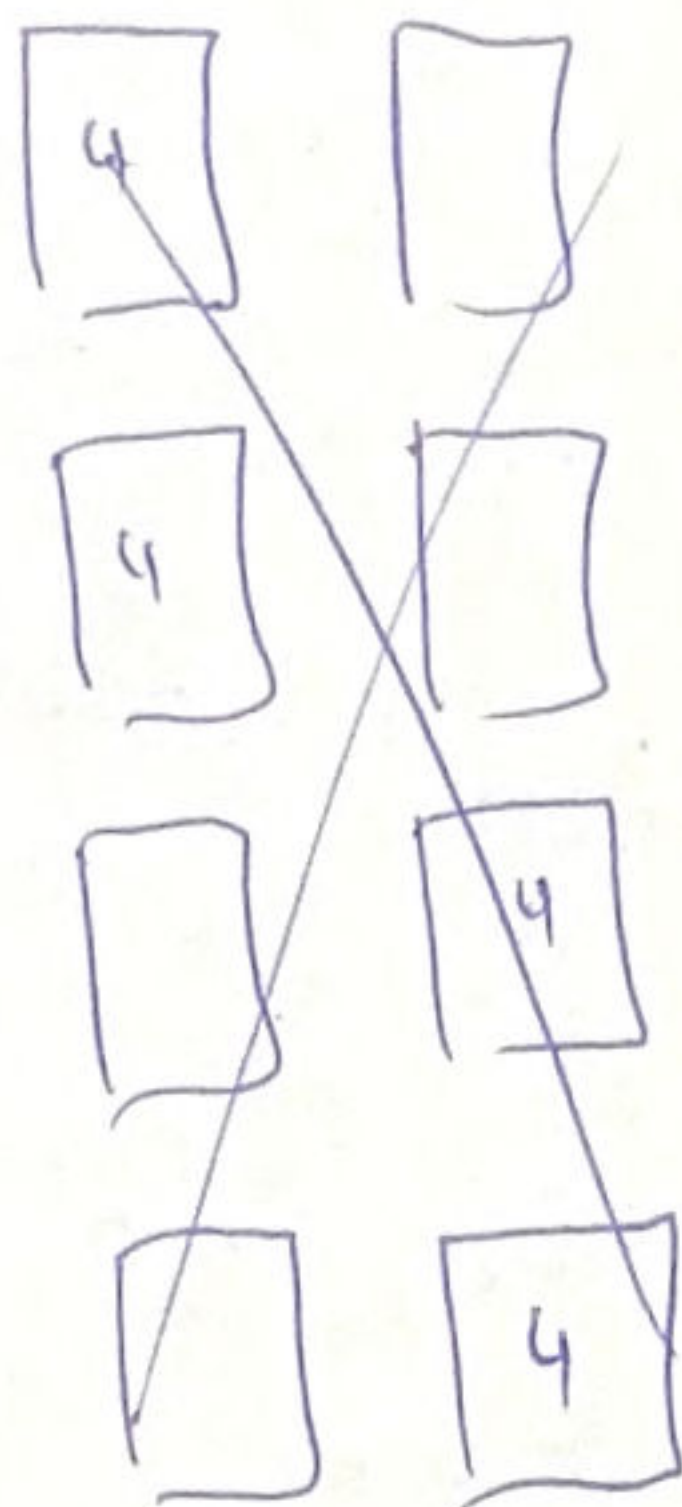


4 ж. 3 ж. 2 ж. 2 ж.
2.2.2

- 1) 2 - 1 - 4 - 2 } 4
- 2) 2 - 1 - 4 - 2
- 3) 2

12
13
14
23
24
34

Истович



$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \text{ способов}$$

опр. где 4 ж. опр. где 3 ж. опр. где 5 ж. и где 6 ж.

$$\Rightarrow 2 \cdot 8 = 16 \text{ способов.}$$

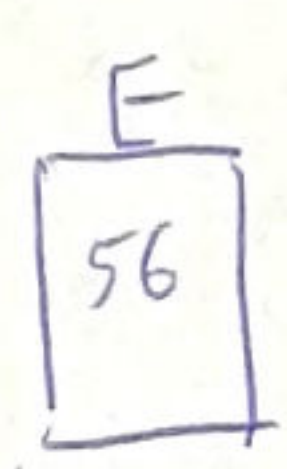
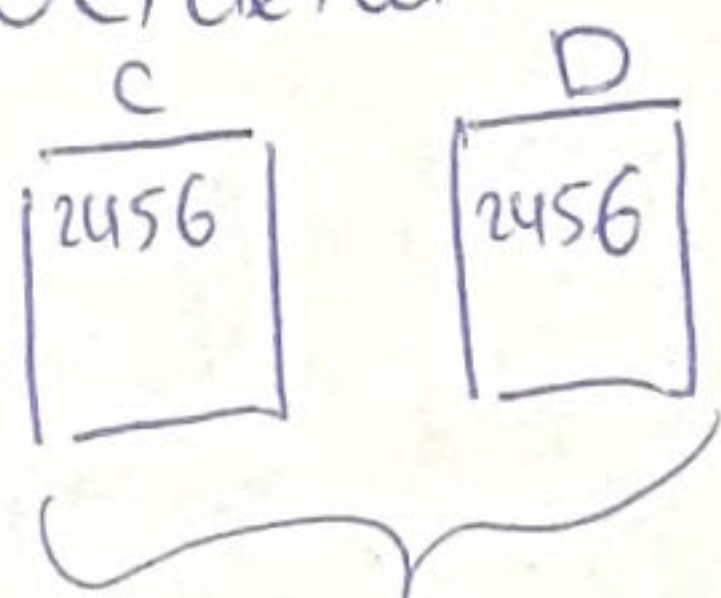
таких ситуаций 4 $\Rightarrow$ $4 \cdot 16 = 64 \text{ сл.}$

2) На гранях А и В 13 ж. или 24 ж.

Рассмотрим с 1 и 3 ж.:

выбираем на А и В где 1 ж, а где 3 ж: 2 сл.

Остается:



здесь должны быть 2 и 4 жужки, иначе их совсем не будет

2 способа расположить 5 и 6

2 сл. их расположить

$$\Rightarrow 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \text{ сл.}$$

Таких ситуаций 2 штуки $\Rightarrow$ $2 \cdot 8 = 16 \text{ сл.}$

Вероятность $\frac{64+16}{46} = \frac{80}{46} = \frac{20}{11.5} = \frac{5}{2.875} = \frac{5}{23.75} = \frac{5}{95} = \frac{1}{19}$

Ответ: $\frac{5}{64}$ Ответ: $\frac{5}{64}$ 9

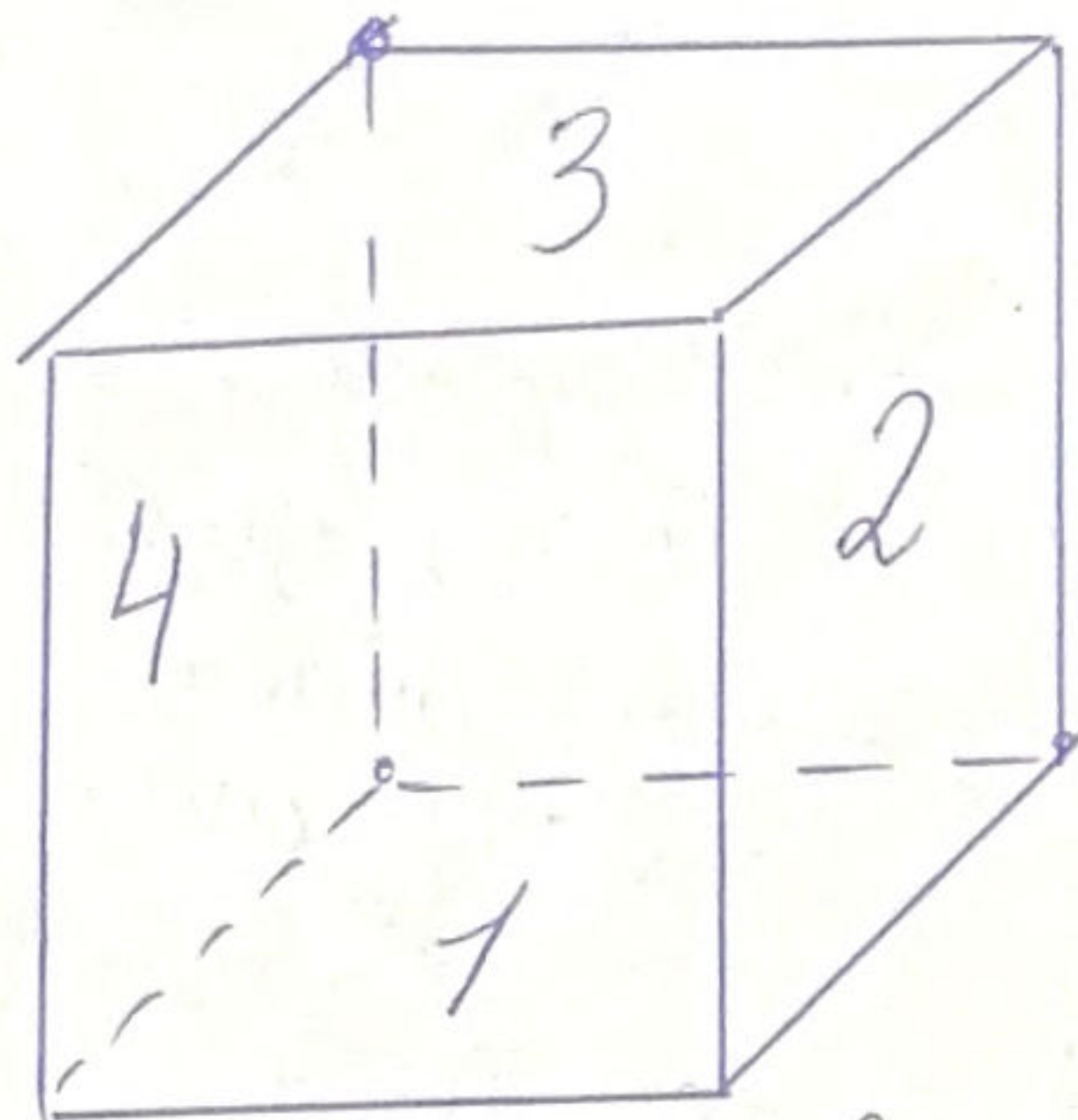
15

Чистовик

Посчитаем, сколько способов всего:

У каждого жука есть 4 ВАР: 5, 4, 6

Посчитаем кол-во нужных нам:



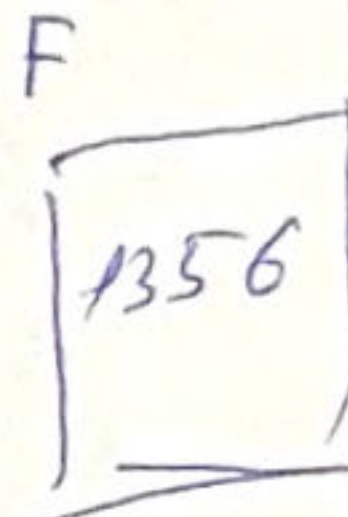
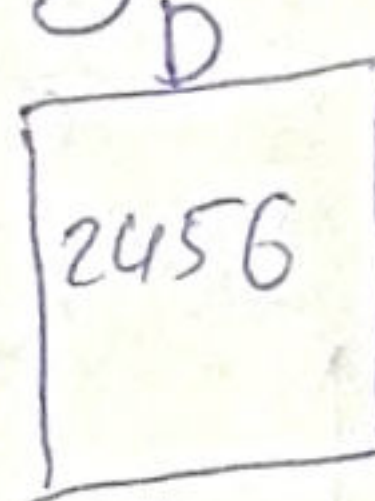
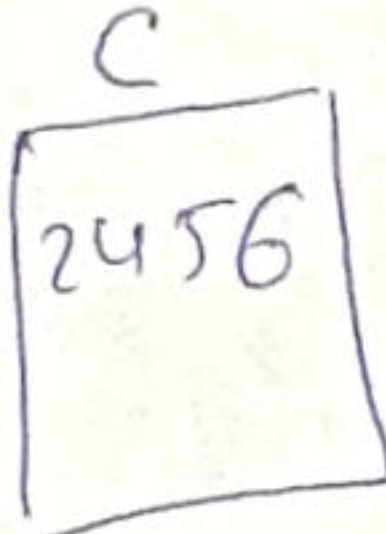
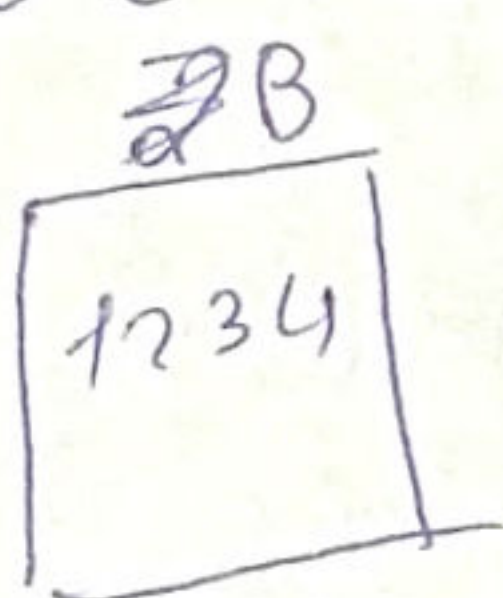
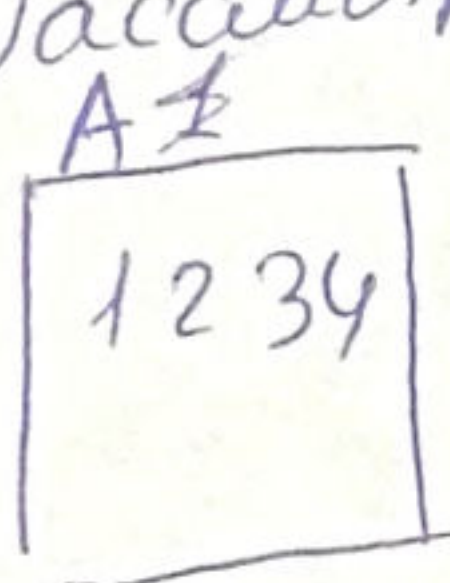
5-передняя грань
3-задняя грань.
Посмотри, какие жуки могут оказаться на гранях:

Где раньше были:
1 ж 2 ж 3 ж

4 ж 5 ж 6 ж

2, 4, 5, 6 1, 3, 5, 6 2, 4, 5, 6 1, 3, 5, 6 1, 2, 3, 4 1, 2, 3, 4.

Посмотри в таком порядке:



1) На гранях A и B $\neq$ 1 и 2 ж, 1 и 4 ж, 2 и 3 ж, 3 и 4 ж.
Все эти ситуации одинаковы, с точки зрения, кол-ва способов.

Посмотри с 1 и 2 ж: 2 способа $\rightarrow$
Остается



Здесь должен быть 1 жук (иначе его вообще не будет)

Здесь должен быть 3 жука.

8

(17) Чистовик

Если нет перехода через разряд, то сумма цифр меняется на 1, и сумма цифр изначально была четной, а затем нечетной $\rightarrow$ (нельзя разбить на две группы с равными суммами)
переход через разряд должен быть.

(16)

Параметрично перенесём параболу так, чтобы её вершина совпала с $(0;0)$, условие не изменится, пусть $y=ax^2$.

