

0 981477 060004

98-14-77-06
(161.23)



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА**

Вариант 11 класс

Место проведения Москва
город

выход 12⁴⁸
возврат 12⁵⁰ Марс

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников « Ломоносов »
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Брызгаловой Марии Олеговны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
« 13 » апреля 2025 года

Подпись участника
Брызгалова

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
98-14-77-06		+	+	±	+	+	0	0	0

4. 14. 11. 2019

Задача 1.

Гистовик

$$\sqrt{4x^2+12x+9} + \sqrt{x^2+6x+9} + (\sqrt{x+2})^2 = \sqrt{4+\sqrt{12}} - \sqrt{4-\sqrt{12}}$$

$$\sqrt{(2x+3)^2} + \sqrt{(x+3)^2} + (\sqrt{x+2})^2 = \sqrt{4+\sqrt{12}} - \sqrt{4-\sqrt{12}}$$

II

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ |2x+3| + |x+3| + x+2 = \sqrt{4+\sqrt{12}} - \sqrt{4-\sqrt{12}} \end{cases}$$

II

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ |2x+3| + 2x+5 = \sqrt{4+\sqrt{12}} - \sqrt{4-\sqrt{12}} \end{cases}$$

II

$$\begin{cases} x \in [-2, -\frac{3}{2}] \\ 2 = \sqrt{4+\sqrt{12}} - \sqrt{4-\sqrt{12}} \\ x \geq -\frac{3}{2} \\ 4x+8 = \sqrt{4+\sqrt{12}} - \sqrt{4-\sqrt{12}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in [-2, -\frac{3}{2}] \\ 4 = 4 + \sqrt{12} + 4 - \sqrt{12} - 2\sqrt{4} \\ x \geq -\frac{3}{2} \\ x = \frac{\sqrt{4+\sqrt{12}} - \sqrt{4-\sqrt{12}} - 8}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in [-2, -\frac{3}{2}] \\ 4 = 4 - \text{верно} \\ x \geq -\frac{3}{2} \\ x = \frac{\sqrt{4+\sqrt{12}} - \sqrt{4-\sqrt{12}}}{4} - 2 \end{cases} (*)$$

Проверим неравенство: $\frac{\sqrt{4+\sqrt{12}} - \sqrt{4-\sqrt{12}}}{4} - 2 \geq -\frac{3}{2} \Rightarrow$

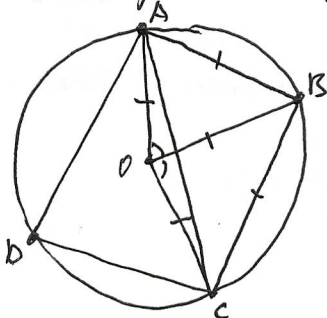
$$\Rightarrow \sqrt{4+\sqrt{12}} - \sqrt{4-\sqrt{12}} \geq 2 \Rightarrow 8 + \sqrt{12} - \sqrt{12} - 2\sqrt{4} \geq 2 \Rightarrow 2 \geq 2 - \text{верно}$$

Значит, (*) $\Rightarrow x = -\frac{3}{2}$.Ответ: $[-2, -\frac{3}{2}]$.

Задача 2.

Возможны 2 случая: либо 1) стороны с известной длиной 6 соседни, либо 2) противоположны.

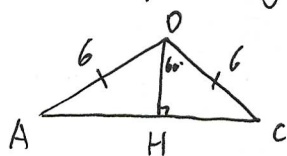
Рассмотрим 1) случай:



Возможны эти стороны через AB и BC, D - четвертая вершина правильного треугольника. П.к. 6 - такой радиус окружности, то $\triangle ABO$, $\triangle BOC$ - равносторонние (длины r/c). (где O - центр окружности).

Значит, $\angle AOC = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$

Из равнобедренной (дана ρ/ϕ) $\triangle AOC$:



$$AC = 2 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}.$$

(Если OH - высота ρ/ϕ $\triangle AOC$, то OH - медиана. Тогда $AC = 2HC$.)

Площадь ρ/ϕ $\triangle AOC = 2 \cdot OC \cdot \sin 60^\circ = 2 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$.

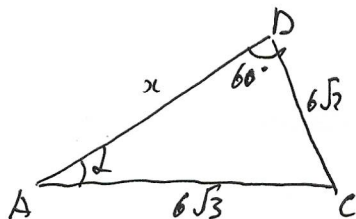
$$S_{ABCO} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{ACO} - S_{AOC} =$$

$$= 9\sqrt{3} + 9\sqrt{3} - \frac{1}{2} AC \cdot OH + S_{AOB} = 18\sqrt{3} - \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 3 + S_{AOB} =$$

$$= 9\sqrt{3} + S_{AOB}.$$

Найдем наибольшую возможную площадь $\triangle ABC$, учитывая, что одна из его сторон (BC или DC) равна $6\sqrt{3}$.

$\angle ABC$ - вписанный $\Rightarrow \angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC = 60^\circ$



Пусть $\angle DAC = \angle$.

По теор. синусов для $\triangle ABC$:

$$\frac{BC}{\sin \angle} = \frac{AC}{\sin \angle ABC} \Rightarrow \frac{6\sqrt{3}}{\sin \angle} = \frac{6\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \angle = \frac{6\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin \angle = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle = 45^\circ$$

$\angle = 135^\circ$ - не удовл. условию угла $\triangle ABC$.

$$\text{Потому } S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot 6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = AB \cdot \frac{6\sqrt{6}}{4}.$$

По теор. косинусов для $\triangle ABC$:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos 45^\circ.$$

Пусть $AB = x$:

$$36 \cdot 2 = 36 \cdot 3 + x^2 - 2 \cdot 6\sqrt{3} \cdot x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x^2 - 6\sqrt{6}x + 36 = 0$$

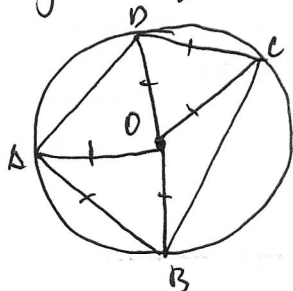
$$\Rightarrow x = 3\sqrt{6} \pm 3\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 3\sqrt{6} + 3\sqrt{2} & \Delta = 54 - 36 = 18 = 2 \cdot 3^2 \\ x = 3\sqrt{6} - 3\sqrt{2} & \text{не удовл. неравенству треугольника} \end{cases}$$

$$S_{ABC} = (3\sqrt{6} + 3\sqrt{2}) \cdot 6\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 18 \cdot 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 36 =$$

$$= 27 + 9\sqrt{3}.$$

$$S_{ABCO} = 9\sqrt{3} + 27 + 9\sqrt{3} = 27 + 18\sqrt{3}$$

(суджа: 2):

Пусть $AB = CD = 6$.Поскольку $\angle DOA$, $\angle AOB$ - пр/сПусть $\angle DOA = \alpha$, $\angle AOB = \beta$. Поскольку $\alpha + \beta = 360^\circ \cdot \frac{1}{2} = 180^\circ$.

$$S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{DOA} =$$

$$= 18\sqrt{3} + \frac{1}{2} \cdot 36 \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2} \cdot 36 \cdot \sin \beta =$$

$$= 18\sqrt{3} + 18(\sin \alpha + \sin \beta) = 18\sqrt{3} + 18 \cdot 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \geq$$

$$\geq 18\sqrt{3} + 36 \cdot \sin 120^\circ \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \geq 18\sqrt{3} + 36 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 = 36\sqrt{3}$$

Примем равенство в случае $\alpha = \beta = 120^\circ$.

$$\text{Сравним: } 36\sqrt{3} > 27 + 18\sqrt{3} \Rightarrow 18\sqrt{3} > 27 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9^2 \cdot 3 \cdot 4 > 9^2 \cdot 3^2 \Rightarrow 4 > 3$$

Ответ: $36\sqrt{3}$.

Задача 2.

$$5^{3-\frac{1}{x}} \geq a + \sin 3^x, \quad (x > 0) \quad (*)$$

Пусть $f(x) = 5^{3-\frac{1}{x}}$, $g(x) = a + \sin 3^x$.
 $x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow -\frac{1}{x} < 0 \Rightarrow 5^{3-\frac{1}{x}} < 5^3$
 т.к. $y = 5^x$

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad 5^t > 0.$$

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \sin t \in [-1, 1].$$

Докажем, что при $a = 5^3 + 1$ Неравенство (*) не имеет решений при $x > 0$.

$$a = 5^3 + 1 \Rightarrow a + \sin 3^x = 5^3 + \sin 3^x + 1 \geq 5^3$$

т.к. $\sin t \geq -1$

При этом $f(x) < 5^3$ при $x > 0$.

Значит, $\forall x > 0 \quad 5^{3-\frac{1}{x}} < 5^3 \leq a + \sin 3^x$ и (*) не имеет решений.

Докажем, что $\forall a \in (0, 5^3 + 1)$ найдется положительное решение (*).

Пусть $a \in (0, 5^3 + 1)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} 5^{3-\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{125}{5^{\frac{1}{x}}} = 0.$$

$$\sin 3^0 + a = \sin 1 + a > 0 + \sin 1 = \sin 1.$$

Функция $g(x)$ - непрерывна, т.к. композиция непрерывных на $(0, +\infty)$.

Пусть $a = 5^3 - 2 + 1$ ($2 > 0$)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 5^{3-\frac{1}{x}} = 5^3 \Rightarrow \exists x_0 \quad 5^{3-\frac{1}{x}} \in U_\alpha(5^3), \text{ т.к.}$$

$$f(x_0) > 5^3 - 2 = a + 1 > a + \sin x_0 = g(x_0)$$

~~$$g \text{ непрерывна, } f(0) < g(0) < g(0), \exists x_0 > 0 \quad f(x_0) > g(x_0)$$~~

~~значит, есть решение~~

$\Rightarrow (*)$ имеет решение

Пусть $a \in [5^3 - 1, 5^3 + 1): (*)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 5^{3-\frac{1}{x}} = 5^3, \quad f(x) \uparrow \text{ т.к. } f'(x) = \ln 5 \cdot 5^{3-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} > 0$$

Значит, $\forall x_0 \quad \forall x > x_0 \quad 5^{3-\frac{1}{x}} > 5^3 - 2 \quad (\forall)$

Пусть $2 = 5^3 + 1 - a, \quad 2 > 0 \quad \text{т.к. } (*)$. Для 2 существует x_0 т.к. $(\forall)$

Пусть $k \in \mathbb{Z} \quad \left| \quad \frac{3\sqrt{5}}{2} + 2\sqrt{5}k > x_0 \quad \text{поэтому} \right.$

$$a + \sin 3^{\log_3(\frac{3\sqrt{5}}{2} + 2\sqrt{5}k)} = a + \sin(\frac{3\sqrt{5}}{2} + 2\sqrt{5}k) = -1 + a \Leftarrow 5 < -1 + 5^3 - 2 + 1 =$$

Пусть $a = 5^3 + 1 - 2 \quad (2 > 0 \text{ т.к. } a \in [5^3 - 1, 5^3 + 1))$

$$= 5^3 - 2$$

Значит, $f(\frac{3\sqrt{5}}{2} + 2\sqrt{5}k) > g(\frac{3\sqrt{5}}{2} + 2\sqrt{5}k)$.

$(*)$ имеет решение

Ответ: 126.
~~3 + 4~~

Задача 5.

$$f_1(x) = (x + a_1)(x^2 + b_1x + c_1),$$

$$f_2(x) = (x + a_2)(x^2 + b_2x + c_2),$$

— многочлены степени 3.

$$f_3(x) = (x + a_3)(x^2 + b_3x + c_3).$$

По условию, f_1, f_2, f_3 совпадают в каждой точке $x \in \mathbb{R}$.

Следовательно (т.к. $\deg f_1 = \deg f_2 = \deg f_3 = 3$), $f_1 \equiv f_2 \equiv f_3$

$$f_1(x) = x^3 + x^2(a_1 + b_1) + x(c_1 + a_1b_1) + a_1c_1,$$

$$f_2(x) = x^3 + x^2(a_2 + b_2) + x(c_2 + a_2b_2) + a_2c_2,$$

$$f_3(x) = x^3 + x^2(a_3 + b_3) + x(c_3 + a_3b_3) + a_3c_3$$

Из совпадения индексов следует совпадение их коэффициентов:

$$\begin{cases} a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = a_3 + b_3 \\ 6 + a_1 b_1 = 14 + a_2 b_2 = 21 + a_3 b_3 \\ 6a_1 = 14a_2 = 21a_3 \end{cases} \quad (*)$$

Пусть $a_1 + b_1 = S$. Тогда $(*) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{2}{3} a_3 \\ a_2 = \frac{3}{2} a_3 \end{cases}$$

$$6 + a_2(S - a_2) = 14 + a_2(S - a_2) = 21 + a_3(S - a_3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 21 + a_3 S - a_3^2 = 14 + \frac{3}{2} a_3 S - \frac{9}{4} a_3^2 \\ 21 + a_3 S - a_3^2 = 6 + \frac{3}{2} a_3 S - \frac{49}{4} a_3^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{4} a_3^2 - \frac{1}{2} a_3 S + 7 = 0 \quad | \cdot 4 \\ \frac{45}{4} a_3^2 - \frac{5}{2} a_3 S + 15 = 0 \quad | \cdot 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{20}{4} a_3^2 + 15 - 3S = 0 \Rightarrow 5a_3^2 = 20 \Rightarrow a_3 = \pm 2$$

По условию, $a_3 > 0$. Значит, $a_3 = 2$.

Подставим в (1):

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{4} a_3^2 - \frac{1}{2} a_3 S + 7 = 0 \\ 5a_3^2 = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_3 = 2 \\ 5 - S + 7 = 0 \\ a_3 = -2 \quad \text{— не удов. условию} \\ 5 + S + 7 = 0 \end{cases}$$

Получаем:

$$S = 12.$$

Тогда $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 = 3S = 36$

Ответ: 36.

Задача 9.

$$\cos^3(\pi x) + \cos^3(2\pi x) - \cos^3(4\pi x) = (\cos(\pi x) + \cos(2\pi x) - \cos(4\pi x))^3$$

$$\cos^3 \pi x + \cos^3 2\pi x - \cos^3 4\pi x$$

$$\begin{aligned} & (\cos(\pi x) + \cos(2\pi x))(\cos^2(\pi x) + \cos^2(2\pi x) - \cos(\pi x) \cdot \cos(2\pi x)) = \\ & = (\cos(\pi x) + \cos(2\pi x))((\cos(\pi x) + \cos(2\pi x) - \cos(4\pi x))^2 + \\ & + (\cos(4\pi x))^2 - \cos(4\pi x)(\cos(\pi x) + \cos(2\pi x) - \cos(4\pi x))) \end{aligned}$$

□

$$\begin{cases} \cos(\sqrt{3}x) + \cos(2\sqrt{3}x) = 0 \\ \cos^4(\sqrt{3}x) + \cos^2(2\sqrt{3}x) - \cos(\sqrt{3}x) \cdot \cos(2\sqrt{3}x) = \cos^4(\sqrt{3}x) + \cos^2(2\sqrt{3}x) + \cos^2(4\sqrt{3}x) \\ + \cos^2(4\sqrt{3}x) + 2\cos(\sqrt{3}x) \cdot \cos(2\sqrt{3}x) - 2\cos(\sqrt{3}x) \cdot \cos(4\sqrt{3}x) - 2\cos(2\sqrt{3}x) \cdot \cos(4\sqrt{3}x) \\ - \cos(4\sqrt{3}x) \cdot \cos(\sqrt{3}x) - \cos(4\sqrt{3}x) \cdot \cos(2\sqrt{3}x) + \cos^2(4\sqrt{3}x) \end{cases}$$

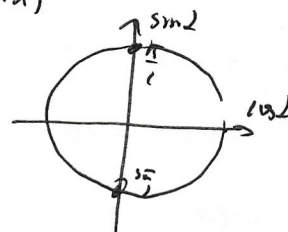
$$\begin{cases} \cos(\sqrt{3}x) + \cos(2\sqrt{3}x) = 0 \quad (1) \\ 0 = 3\cos^2(4\sqrt{3}x) + 3\cos(\sqrt{3}x) \cdot \cos(2\sqrt{3}x) - 3\cos(\sqrt{3}x) \cdot \cos(4\sqrt{3}x) - \\ - 3\cos(2\sqrt{3}x) \cdot \cos(4\sqrt{3}x) \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \cos(\sqrt{3}x) + \cos(2\sqrt{3}x) = 0 \\ \frac{1}{2} \cos 5\sqrt{3}x + \frac{1}{2} \cos 3\sqrt{3}x + \frac{1}{2} \cos 6\sqrt{3}x + \frac{1}{2} \cos 2\sqrt{3}x = \frac{1}{2} \cos 3\sqrt{3}x + \frac{1}{2} \cos \sqrt{3}x + \\ + \cos^2(4\sqrt{3}x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\cos \frac{3\sqrt{3}x}{2} \cdot \cos \frac{\sqrt{3}x}{2} = 0 \quad (1) \\ \cos 5\sqrt{3}x + \cos 6\sqrt{3}x + \cos 2\sqrt{3}x = \cos \sqrt{3}x + \cos^2(4\sqrt{3}x) \end{cases}$$

Решим (1):

$$\begin{cases} \cos \frac{3\sqrt{3}x}{2} = 0 \\ \cos \frac{\sqrt{3}x}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3\sqrt{3}x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\sqrt{3}x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi h, h \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 1 + 2k \\ x = 1 + 2k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{1}{3} + \frac{2k}{3} \end{cases}$$

Определим корни, принадлежащие $[0.3; 1.6]$:

$$\begin{cases} 0.3 \leq 2k \leq 1.6 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0.15 \leq k \leq 0.8 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{нет решений}$$

$$\begin{cases} 0.3 \leq \frac{1}{3} + \frac{2k}{3} \leq 1.6 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -0.1 \leq 2k \leq 3.8 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -0.05 \leq k \leq 1.9 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = 1 \end{cases}$$

Эти значения k соответствуют корням: $\frac{1}{3}, 1$.

$$x = \frac{1}{3}$$

Решим (2):

Шетенов

$$\cos^2(4\pi\lambda) + \cos(\pi\lambda) \cdot \cos(2\pi\lambda) = \cos(4\pi\lambda) \cos(\pi\lambda) + \cos(4\pi\lambda) \cdot \cos(2\pi\lambda)$$

?

$$\cos(4\pi\lambda) (\cos(4\pi\lambda) - \cos(2\pi\lambda)) = \cos(\pi\lambda) (\cos(4\pi\lambda) - \cos(2\pi\lambda))$$

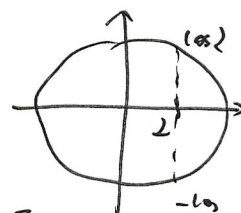
?

$$(\cos(4\pi\lambda) - \cos(2\pi\lambda)) / (\cos(4\pi\lambda) - \cos(2\pi\lambda)) = 0$$

?

$$\begin{cases} \cos(4\pi\lambda) = \cos(2\pi\lambda) \\ \cos(4\pi\lambda) = \cos(\pi\lambda) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4\pi\lambda = 2\pi\lambda + 2\pi k \\ 4\pi\lambda = -2\pi\lambda + 2\pi k \\ 4\pi\lambda = \pi\lambda + 2\pi k \\ 4\pi\lambda = -\pi\lambda + 2\pi k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = k \\ \lambda = \frac{k}{3} \\ \lambda = \frac{2k}{3} \\ \lambda = \frac{2k}{5} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Определим корни на $[0.3; 1.6]$:

$$\begin{cases} 0.3 \leq \frac{k}{3} \leq 1.6 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0.9 \leq k \leq 4.8 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow k \in \{1, 2, 3, 4\}$$

тогда $\lambda \in \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3} \right\}$

$$\begin{cases} 0.3 \leq \frac{2k}{5} \leq 1.6 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0.75 \leq k \leq 4 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow k \in \{1, 2, 3, 4\}$$

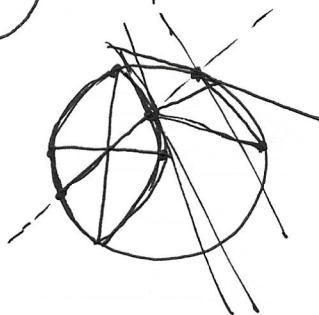
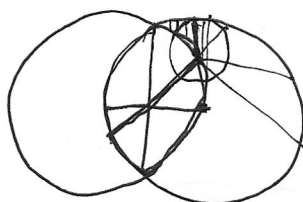
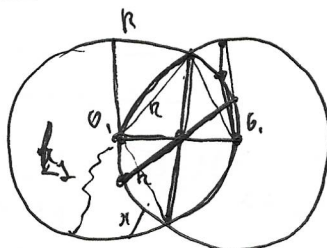
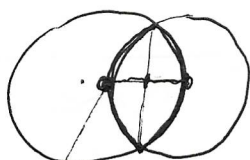
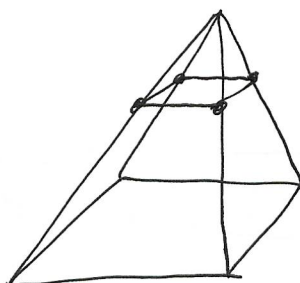
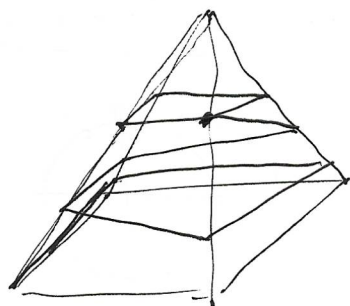
тогда $\lambda \in \left\{ \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 1\frac{1}{5}, 1\frac{3}{5} \right\}$

$$\begin{cases} 0.3 \leq \frac{2k}{3} \leq 1.6 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \in [0.45, 2.4] \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow k \in \{1, 2\}$$

тогда $\lambda \in \left\{ \frac{2}{3}, \frac{4}{3} \right\}$

Ответ: $\left\{ \frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 1\frac{1}{5}, 1\frac{3}{5} \right\}$.

Гермовик



$$\cos^2 \frac{\pi}{4} = 2 \cos \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{2}$$

$$2R\sqrt{3}$$

$$R\sqrt{3}$$

$$\frac{3R}{2} \quad R\sqrt{3}$$

$$\frac{9R}{4} < 3R$$

$$\cos^3 \pi + \cos^3 2\pi \neq \cos^3 4\pi$$

$$\cos \pi + \cos 2\pi \neq \cos 4\pi$$

$$+ 2 \sin 3\pi \cdot \sin \pi + \cos \pi$$

$$- 2 \cos^3 \pi + 1$$

$$\cos \pi + \cos 2\pi - 2 \cos^3 \pi + 1$$

$$\cos 2\pi + 1$$

$$2 \cos^2 \pi - 1 = \cos 2\pi$$

$$\cos^3(4\pi) + (\cos \pi + \cos 2\pi - \cos 4\pi)^2 = \cos \pi + 2 \cos^3 \pi - 2 \cos^2 2\pi$$

$$= (\cos \pi + \cos 2\pi) \left((\cos \pi + \cos 2\pi - \cos 4\pi)^2 + \cos^3 4\pi - \right.$$

$$\cos \pi \cdot \cos \pi = \frac{1}{2} (\cos 2\pi + \cos 0) = \frac{1}{2} (\cos 2\pi + 1)$$

$$\pi - \pi = 0$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$

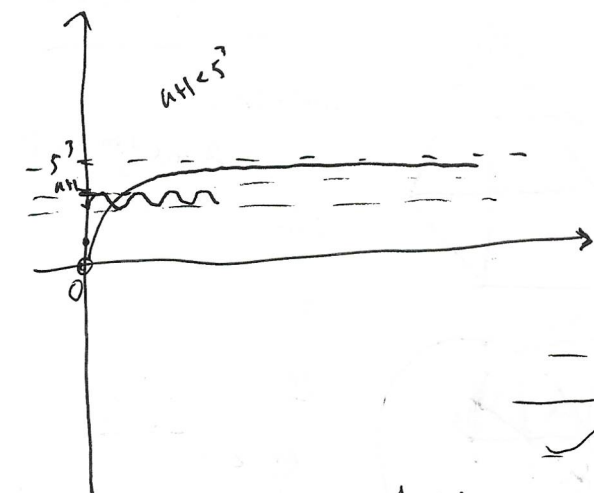
$$\rightarrow a^3 + b^3 = (a+b-c)^3 + c^3$$

$$(a+b)(a^2 + b^2 - ab) = (a+b)(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc)$$

$$c^2 + ab = ac + bc + c^2 \neq ac + bc + c^2$$

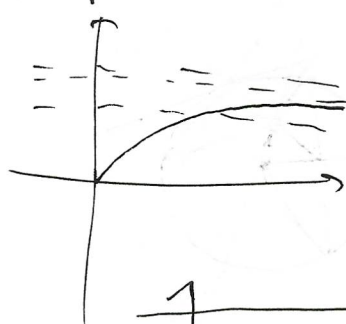
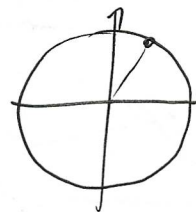
$$c^2 - c(a+b) + ab = 0$$

Терновик

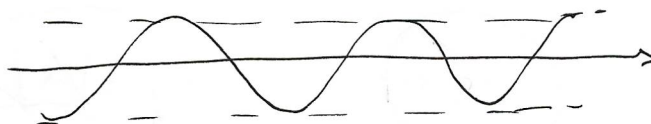


$$\sin 3^0 = \sin 1$$

$$3^x = \frac{11}{2}$$



$$\sin 1 + a$$

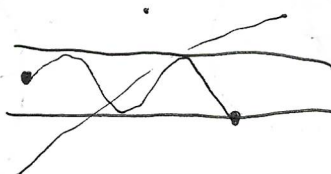


$$a+1 < 5^3$$

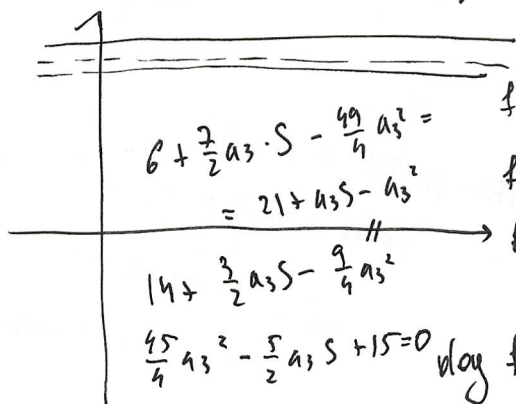
$$a < 5^3 - 1$$

$$\sin 3^x = -1$$

$$3^x = \frac{3\sqrt{5}}{2} + 2\pi k$$



$$D = b_1^2 - 24$$



$$6 + \frac{7}{2}a_3 \cdot S - \frac{49}{4}a_3^2 =$$

$$= 21 + a_3 S - a_3^2$$

$$f_1(x) = (x+a_1)(x^2+b_1x+6)$$

$$f_2(x) = (x+a_2)(x^2+b_2x+14)$$

$$f_3(x) = (x+a_3)(x^2+b_3x+21)$$

$$14 + \frac{3}{2}a_3 S - \frac{9}{4}a_3^2$$

$$\frac{45}{4}a_3^2 - \frac{5}{2}a_3 S + 15 = 0 \quad \text{deg } f = 3$$

$$x^3 + b_1x^2 + 6x + a_1x^2 + a_1b_1x + 6a_1$$

$$\frac{5}{4}a_3^2 - \frac{1}{2}a_3 S + 7 = 0 \quad b_1x^2 + a_1x^2 + x(6+a_1b_1) + 6a_1$$

$$\frac{25}{4}a_3^2 - \frac{5}{2}a_3 S + 35 = 0$$

$$b_1 = S - a_1, \quad 5a_3^2 - 20 = 0$$

$$a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = a_3 + b_3 = S$$

$$a_1 = \frac{7}{2}a_3, \quad b_3 = \frac{5}{2}a_3$$

$$6 + a_1S - a_1^2 = a_3 = 2$$

$$6a_1 = 14a_2 = 21a_3$$

$$\frac{7}{2}a_3 + b_1 = a_3 + b_3$$

$$= 14 + a_2S - a_2^2 = 21 + a_3S - a_3^2$$

$$14 + a_2b_2 = 6 + a_1b_1 = 21 + a_3b_3$$

$$b_3 = \frac{5}{2}a_3 + b_1$$

$$f_1(x) = f_2(x) =$$

$$a_2$$

$$6 + \frac{7}{2}a_3 \cdot b_1 = 21 + a_3 \cdot b_3 =$$

$$a_1 = \frac{7}{2}a_3$$

$$b_1 = S - a_1$$

$$6 + \frac{7}{2}a_3(b_3 - \frac{5}{2}a_3) = 21 + a_3b_3 \quad | \cdot 4$$

$$a_2 = \frac{3}{2}a_3$$

$$24 + 14a_3b_3 - 35a_3^2 = 84 + 4a_3b_3$$

$$8 + \frac{3}{2}a_3 \cdot b_2 - \frac{7}{2}a_3 \cdot b_1 = 8 - \frac{1}{2}a_3(3b_2 - 7b_1)$$

$$2a_3 = b_1 - b_2$$

$$8 - \frac{1}{2}a_3(3b_2 - 7b_1) = 14b_3$$

$$b_2 = b_1 + 2a_3$$

$$6 +$$

Черновики

$$6a_1 = 14a_2 = 21a_3$$

↓

$$a_1 = \frac{7}{2}a_3, \quad a_2 = \frac{3}{2}a_3$$

$$x = -\frac{7}{2}a_3$$

$$0 = -2a_3$$

$$(x + \frac{7}{2}a_3)(x^2 + b_1x + 6)$$

$$(x + \frac{3}{2}a_3)(x^2 + b_2x + 14)$$

$$(x + a_3)(x^2 + b_3x + 21)$$

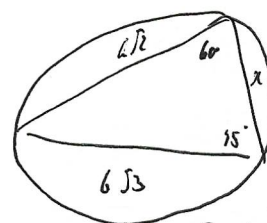
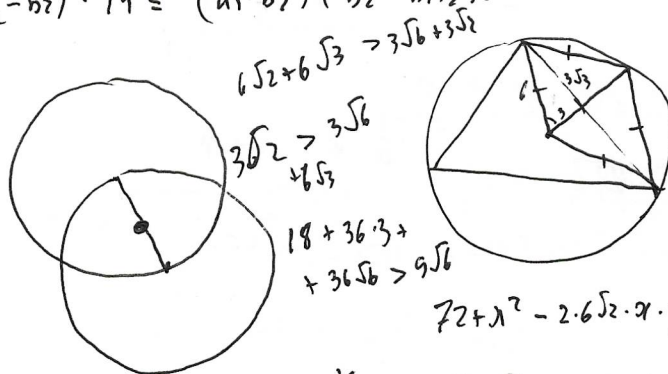
$$a_1^2 - a_1b_2 + 14$$

$$\Rightarrow 7 = a_1(b_3 - b_2)$$

$$a_1^2 - a_1b_3 + 21$$

$$(a_1 + 1)(7 + b_1) = (a_2 + 1)(15 + b_2) = (a_3 + 1)(22 + b_3)$$

$$(a_2 - b_2) \cdot 14 = (a_1 - b_1)(b_2^2 - b_1b_2 + 6)$$



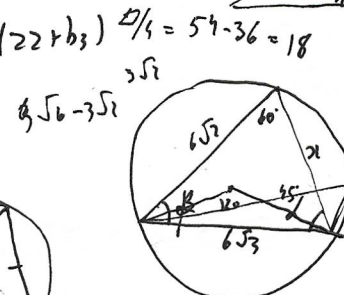
$$3\sqrt{6} + 3\sqrt{2} > 6\sqrt{3}$$

$$3\sqrt{6} > 36 \cdot 3 + 18 - 6\sqrt{3}$$

$$= 36 \cdot 2 \cdot 3\sqrt{6} > 126$$

$$36 \cdot 9 = 27$$

$$22 + 10$$



$$\frac{6\sqrt{3}}{\sin 2} = \frac{6\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 12$$

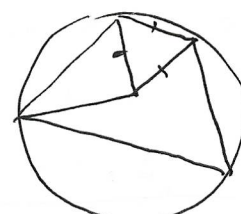
$$\sin 2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2 = 45^\circ / 135^\circ$$



$$x^2 - 6\sqrt{2} - 36 = 0$$

$$x^2 - 6\sqrt{2} - 36 = 0$$



$$36 \cdot 2 + x^2 - 2 \cdot 6\sqrt{2} \cdot x \cdot \frac{1}{2} = 36 \cdot 3$$

$$x^2$$

$$250 + 18 (\sin 2 + \sin 2)$$

$$2 \sin \frac{2+\beta}{2} \cdot \cos \frac{2-\beta}{2} \geq 1$$

$$2 \sin 120^\circ$$

$$36 \cdot 3 + x^2 - 2 \cdot 6\sqrt{3} \cdot x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 36 \cdot 2$$

$$x^2 - 6\sqrt{6}x + 36 = 0$$

$$36 \cdot 6 - 36 \cdot 4 - 36 \cdot 2 = 72$$

$$18 + 36 = 54$$

$$x = 3\sqrt{2} \pm 3\sqrt{6}$$

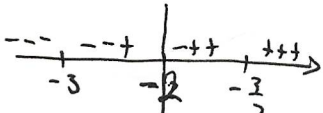
$$\cos 75^\circ + \cos 225^\circ - \cos 90^\circ$$

$$\cos 75^\circ$$

$$(\cos(2\pi n) - \cos(4\pi n)) / (\cos^2(2\pi n)) + \cos(2\pi n) \cdot \cos(4\pi n) + \cos^2(4\pi n)$$

Черновик

$$|2x+3| + |x+3| + |x+2| = \sqrt{4+\sqrt{12}} - \sqrt{4-\sqrt{12}}$$



$$x \geq 0 \quad A \quad B$$

$$x \geq -2 \quad AB = 2$$

$$-4x - 8 = \sqrt{4+\sqrt{12}} - \sqrt{4-\sqrt{12}}$$

$$-2x - 3 + 2x + 5 = \sqrt{4+\sqrt{12}} - \sqrt{4-\sqrt{12}}$$

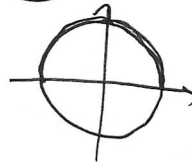
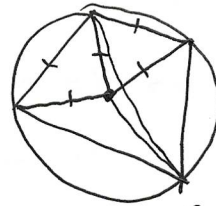
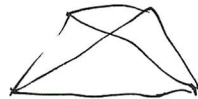
$$2 = \sqrt{4+\sqrt{12}} - \sqrt{4-\sqrt{12}}$$

$$2 + \sqrt{4-\sqrt{12}} = \sqrt{4+\sqrt{12}}$$

$$4 + 4 - \sqrt{12} = 4 + \sqrt{12}$$

$$4 = 2\sqrt{12}$$

$$4x + 8 =$$



$$5^{3-\frac{1}{x}} \geq a + \sin 3^x \uparrow - \text{нет при } x > 0$$

$$\frac{125}{5^{\frac{1}{x}}} \geq a + \sin 3^x$$

$$3^x \in [0, 1]$$

$$\frac{1}{x} \downarrow \quad -\frac{1}{x} \uparrow$$

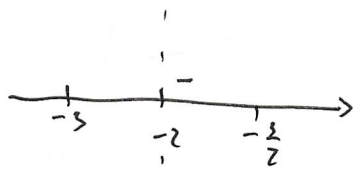
$$a^3 + b^3 - c^3 = (a+b-c)^3 \quad \cos 15^\circ + \cos 25^\circ - \cos 40^\circ$$

$$\cos 25^\circ = \cos 25^\circ \quad -2 \sin 35^\circ \cdot \sin$$

$$\cos 40^\circ = \cos^2 25^\circ - \sin^2 25^\circ$$

$$x \geq -2 \quad 2x+3 \geq$$

$$x+3 \geq 1$$



$$\sqrt{4+\sqrt{12}} - \sqrt{4-\sqrt{12}} - 2 \geq -\frac{2}{2}$$

$$5^{3-\frac{1}{x}} \geq a+1 \quad - \text{нет при } x \rightarrow \infty$$

$$5^{3-\frac{1}{x}} \quad 3-\frac{1}{x} = 0$$

$$x \rightarrow 0 \quad x = \frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$$

$$3-\frac{1}{x} \quad x \rightarrow -\infty$$

$$5^{-\infty}$$

$$\frac{125}{5^{\frac{1}{x}}}$$

$$x \rightarrow \infty$$

$$5^3$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$5^{-\infty}$$

$$-\frac{1}{3} \quad \frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{5}$$

$$-\frac{1}{10}$$

$$-\frac{1}{20}$$

$$-\frac{1}{40}$$

$$-\frac{1}{80}$$

$$-\frac{1}{160}$$

$$-\frac{1}{320}$$

$$-\frac{1}{640}$$

$$-\frac{1}{1280}$$

$$-\frac{1}{2560}$$

$$-\frac{1}{5120}$$

$$-\frac{1}{10240}$$

$$-\frac{1}{20480}$$

$$-\frac{1}{40960}$$

$$-\frac{1}{81920}$$

$$-\frac{1}{163840}$$

$$-\frac{1}{327680}$$

$$-\frac{1}{655360}$$

$$-\frac{1}{1310720}$$

$$-\frac{1}{2621440}$$

$$-\frac{1}{5242880}$$

$$-\frac{1}{10485760}$$

$$-\frac{1}{20971520}$$

$$-\frac{1}{41943040}$$

$$-\frac{1}{83886080}$$

$$-\frac{1}{167772160}$$

$$-\frac{1}{335544320}$$

$$-\frac{1}{671088640}$$

$$-\frac{1}{1342177280}$$

$$-\frac{1}{2684354560}$$

$$-\frac{1}{5368709120}$$

$$-\frac{1}{10737418240}$$

$$-\frac{1}{21474836480}$$

$$-\frac{1}{42949672960}$$

$$-\frac{1}{85899345920}$$

$$-\frac{1}{171798691840}$$

$$-\frac{1}{343597383680}$$

$$-\frac{1}{687194767360}$$

$$-\frac{1}{1374389534720}$$

$$-\frac{1}{2748779069440}$$

$$-\frac{1}{5497558138880}$$

$$-\frac{1}{10995116277760}$$

$$-\frac{1}{21990232555520}$$

$$-\frac{1}{43980465111040}$$

$$-\frac{1}{87960930222080}$$

$$-\frac{1}{175921860444160}$$

$$-\frac{1}{351843720888320}$$

$$-\frac{1}{703687441776640}$$

$$-\frac{1}{1407374883553280}$$

$$-\frac{1}{2814749767106560}$$

$$-\frac{1}{5629499534213120}$$

$$-\frac{1}{11258999068426240}$$

$$-\frac{1}{22517998136852480}$$

$$-\frac{1}{45035996273704960}$$

$$-\frac{1}{90071992547409920}$$

$$-\frac{1}{180143985094819840}$$

$$-\frac{1}{360287970189639680}$$

$$-\frac{1}{720575940379279360}$$

$$-\frac{1}{1441151880758558720}$$

$$-\frac{1}{2882303761517117440}$$

$$-\frac{1}{5764607523034234880}$$

$$-\frac{1}{11529215046068469760}$$

$$-\frac{1}{23058430092136939520}$$

$$-\frac{1}{46116860184273879040}$$

$$-\frac{1}{92233720368547758080}$$

$$-\frac{1}{184467440737095516160}$$

$$-\frac{1}{368934881474191032320}$$

$$-\frac{1}{737869762948382064640}$$

$$-\frac{1}{1475739525896764129280}$$

$$-\frac{1}{2951479051793528258560}$$

$$-\frac{1}{5902958103587056517120}$$

$$-\frac{1}{11805916207174113034240}$$

$$-\frac{1}{23611832414348226068480}$$

$$-\frac{1}{47223664828696452136960}$$

$$-\frac{1}{94447329657392904273920}$$

$$-\frac{1}{188894659314785808547840}$$

$$-\frac{1}{377789318629571617095680}$$

$$-\frac{1}{755578637259143234191360}$$

$$-\frac{1}{1511157274518286468382720}$$

$$-\frac{1}{3022314549036572936765440}$$

$$-\frac{1}{6044629098073145873530880}$$

$$-\frac{1}{12089258196146291747061760}$$

$$-\frac{1}{24178516392292583494123520}$$

$$-\frac{1}{48357032784585166988247040}$$

$$-\frac{1}{96714065569170333976494080}$$

$$-\frac{1}{193428131138340667952988160}$$

$$-\frac{1}{386856262276681335905976320}$$

$$-\frac{1}{773712524553362671811952640}$$

$$-\frac{1}{1547425049106725343623905280}$$

$$-\frac{1}{3094850098213450687247810560}$$

$$-\frac{1}{6189700196426901374495621120}$$

$$-\frac{1}{12379400392853802748991242240}$$

$$-\frac{1}{24758800785707605497982484480}$$

$$-\frac{1}{49517601571415210995964968960}$$

$$-\frac{1}{99035203142830421991929937920}$$

$$-\frac{1}{198070406285660843983859875840}$$

$$-\frac{1}{396140812571321687967719751680}$$

$$-\frac{1}{792281625142643375935439503360}$$

$$-\frac{1}{1584563250285286751870879006720}$$

$$-\frac{1}{3169126500570573503741758013440}$$

$$-\frac{1}{6338253001141147007483516026880}$$

$$-\frac{1}{12676506002282294014967032053760}$$

$$-\frac{1}{25353012004564588029934064107520}$$

$$-\frac{1}{50706024009129176059868128215040}$$

$$-\frac{1}{101412048018258352119736256430080}$$

$$-\frac{1}{202824096036516704239472512860160}$$

$$-\frac{1}{405648192073033408478945025720320}$$

$$-\frac{1}{811296384146066816957890051440640}$$

$$-\frac{1}{1622592768292133633915780102881280}$$

$$-\frac{1}{3245185536584267267831560205762560}$$

$$-\frac{1}{6490371073168534535663120411525120}$$

$$-\frac{1}{12980742146337069071326240823050240}$$

$$-\frac{1}{25961484292674138142652481646100480}$$

$$-\frac{1}{51922968585348276285304963292200960}$$

$$-\frac{1}{103845937170696552570609926584401920}$$

$$-\frac{1}{207691874341393105141219853168803840}$$

$$-\frac{1}{415383748682786210282439706337607680}$$

$$-\frac{1}{830767497365572420564879412675215360}$$

$$-\frac{1}{1661534994731144841129758825350430720}$$

$$-\frac{1}{3323069989462289682259517650700861440}$$

$$-\frac{1}{6646139978924579364519035301401722880}$$

$$-\frac{1}{13292279957849158729038070602803445760}$$

$$-\frac{1}{26584559915698317458076141205606891520}$$

$$-\frac{1}{53169119831396634916152282411213783040}$$

$$-\frac{1}{106338239662793269832304564822427566080}$$

$$-\frac{1}{212676479325586539664609129644855132160}$$

$$-\frac{1}{425352958651173079329218259289710264320}$$

$$-\frac{1}{850705917302346158658436518579420528640}$$

$$-\frac{1}{1701411834604692317316873037158841057280}$$

$$-\frac{1}{3402823669209384634633746074317682114560}$$

$$-\frac{1}{6805647338418769269267492148635364229120}$$

$$-\frac{1}{13611294676837538538534984297270728458240}$$

$$-\frac{1}{27222589353675077077069968594541456916480}$$

$$-\frac{1}{54445178707350154154139937189082913832960}$$

$$-\frac{1}{108890357414700308308279874378165827665920}$$

$$-\frac{1}{217780714829400616616559748756331655331840}$$

$$-\frac{1}{435561429658801233233119497512663310663680}$$

$$-\frac{1}{871122859317602466466238995025326621327360}$$

$$-\frac{1}{1742245718$$