0 981477 060004

98-14-77-06
(161.23)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс

Место проведения Москва
город

выход 12^{48}
возврат 12^{50}

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников «Ломоносов»
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Брызгаловой Марии Олеговны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«13» апреля 2025 года

Подпись участника

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
98-14-77-06		+	+	±	+	+	0	0	0

98-14-77-06 (161.23)

Задача 1.

Чистовик

$$\sqrt{4x^2+12x+9} + \sqrt{x^2+6x+9} + (\sqrt{(x+2)})^2 = \sqrt{4+\sqrt{17}} - \sqrt{4-\sqrt{17}}$$

$\Updownarrow$

$$\sqrt{(2x+3)^2} + \sqrt{(x+3)^2} + (\sqrt{x+2})^2 = \sqrt{4+\sqrt{17}} - \sqrt{4-\sqrt{17}}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ |2x+3| + |x+3| + x+2 = \sqrt{4+\sqrt{17}} - \sqrt{4-\sqrt{17}} \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ |2x+3| + 2x+5 = \sqrt{4+\sqrt{17}} - \sqrt{4-\sqrt{17}} \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in [-2, -\frac{3}{2}] \\ 2 = \sqrt{4+\sqrt{17}} - \sqrt{4-\sqrt{17}} \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ 4x+8 = \sqrt{4+\sqrt{17}} - \sqrt{4-\sqrt{17}} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in [-2, -\frac{3}{2}] \\ 4 = 4+\sqrt{17}+4-\sqrt{17} - 2\sqrt{4} \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ x = \frac{\sqrt{4+\sqrt{17}} - \sqrt{4-\sqrt{17}} - 8}{4} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in [-2, -\frac{3}{2}] \\ 4 = 4 \quad \text{– верно} \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ x = \frac{\sqrt{4+\sqrt{17}} - \sqrt{4-\sqrt{17}}}{4} - 2 \end{cases} (*) \end{array}\right.$$

Проверим неравенство: $\frac{\sqrt{4+\sqrt{17}} - \sqrt{4-\sqrt{17}}}{4} - 2 \geq -\frac{3}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{4+\sqrt{17}} - \sqrt{4-\sqrt{17}} \geq 2 \Leftrightarrow 8+\sqrt{17}-\sqrt{17} - 2\sqrt{4} \geq 2 \Leftrightarrow 2 \geq 2$ – верно

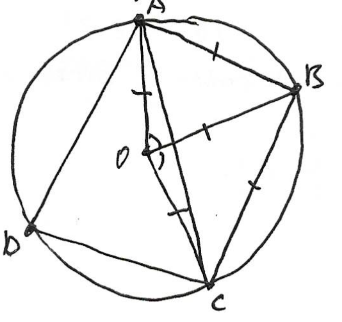
Значит, $(*) \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$.

Ответ: $[-2, -\frac{3}{2}]$.

Задача 2.

Возможны 2 случая: либо 1) стороны с известной длиной 6 соседни, либо 2) противоположны.

Рассмотрим 1) случай:

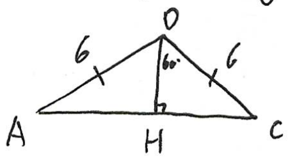


Обозначим эти стороны через AB и BC, D – четвертая вершина четырёхуг-ка. Т.к. 6 – также радиус окружности, то $\triangle ABO$, $\triangle BOC$ – равносторонние (где т. O – центр окружности). (дали р/с).

Чистовик

Значит, $\angle AOC = 60° + 60° = 120°$

Из равнобедренного (далее р/б) $\triangle AOC$:



$AC = 2 \cdot 6\frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$.

(Если OH - высота р/б $\triangle AOC$, по св-ву, она также и медиана. Тогда $AC = 2HC =$
$= 2 \cdot OC \cdot \sin 60° = 2 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$).

Площадь р/с треугольника со стороной 6: $S_0 = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$

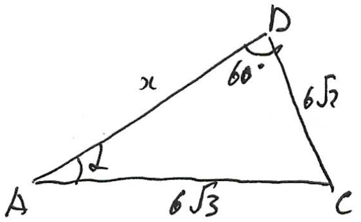
$S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{ACD} - S_{AOC} =$

$= 9\sqrt{3} + 9\sqrt{3} - \frac{1}{2}AC \cdot OH + S_{ACD} = 18\sqrt{3} - \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 3 + S_{ACD} =$

$= 9\sqrt{3} + S_{ACD}$.

Найдем наибольшую возможную площадь $\triangle ACD$, учитывая, что одна из его сторон (БОО DC) равна $6\sqrt{2}$.

$\angle ADC$ - вписанный $\Rightarrow \angle ADC = \frac{1}{2}\angle AOC = 60°$



Пусть $\angle DAC = \alpha$.

По теор. синусов для $\triangle ADC$:

$\cancel{6\sqrt{}}\ \frac{DC}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin\angle ADC} \Rightarrow \frac{6\sqrt{2}}{\sin\alpha} = \frac{6\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{6\sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = 45° \\ \alpha = 135° \end{array}\right.$ - не удовл. сумме углов $\triangle ADC$.

Тогда $S_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot AC \cdot \sin 45° = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot 6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = AD\frac{6\sqrt{6}}{4}$.

По теор. косинусов для $\triangle ADC$:

$DC^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD \cdot \cos 45°$.

Пусть $AD = x$:

$36 \cdot 2 = 36 \cdot 3 + x^2 - 2 \cdot 6\sqrt{3} \cdot x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x^2 - 6\sqrt{6}x + 36 = 0$

$\Rightarrow x = 3\sqrt{6} \pm 3\sqrt{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3\sqrt{6} + 3\sqrt{2} \\ x = 3\sqrt{6} - 3\sqrt{2} \end{array}\right.$ $D/4 = 54 - 36 = 18 = 2 \cdot 3^2$

- не удовл. неравенству треуг-ка.

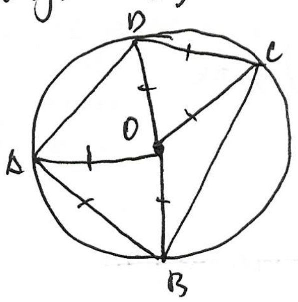
$S_{ADC} = (3\sqrt{6} + 3\sqrt{2}) \cdot 6\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 18 \cdot 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 36 =$

$= 27 + 9\sqrt{3}$.

$S_{ABCD} = 9\sqrt{3} + 27 + 9\sqrt{3} = 27 + 18\sqrt{3}$

Чистовик

(случай 2):



Пусть $AB = CD = 6$.

Тогда $\triangle DOC$, $\triangle AOB$ - р/с

Пусть $\angle DOA = \alpha$, $\angle COB = \beta$. Тогда $\alpha+\beta = 360°-120° = 240°$

$S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{DOC} + S_{AOD} + S_{COB} =$

$= 18\sqrt{3} + \frac{1}{2}\cdot 36 \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2}\cdot 36\cdot\sin\beta =$

$= 18\sqrt{3} + 18(\sin\alpha + \sin\beta) = 18\sqrt{3} + 18\cdot 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \geq$

$\geq 18\sqrt{3} + 36\cdot\sin 120°\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \geq 18\sqrt{3} + 36\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1 = 36\sqrt{3}$

Причем равенство в случае $\alpha = \beta = 120°$.

Сравним: $36\sqrt{3} > 27 + 18\sqrt{3} \Leftrightarrow 18\sqrt{3} > 27 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9^2\cdot 3\cdot 4 > 9^2\cdot 3^2 \Leftrightarrow 4 > 3$

Ответ: $36\sqrt{3}$.

Задача 2.

$5^{3-\frac{1}{x}} \geq a + \sin 3^x$, $(x>0)$ (*)

Пусть $f(x) = 5^{3-\frac{1}{x}}$, $g(x) = a+\sin 3^x$.

$x>0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow -\frac{1}{x} < 0 \Rightarrow 5^{3-\frac{1}{x}} < 5^3$ т.к. $y = 5^t \nearrow$

$\forall t\in\mathbb{R}$ $5^t > 0$.

$\forall t\in\mathbb{R}$ $\sin t \in [-1, 1]$.

<u>Докажем, что</u> при $a = 5^3+1$ неравенство (*) не имеет решений при $x>0$.

$a = 5^3+1 \Rightarrow a + \sin 3^x = 5^3 + \sin 3^x + 1 \geq 5^3$ (т.к. $\sin t \geq -1$)

При этом $f(x) < 5^3$ при $x>0$.

Значит, $\forall x>0$ $5^{3-\frac{1}{x}} < 5^3 \leq a+\sin 3^x$ и (*) не имеет решен.

<u>Докажем, что</u> $\forall a \in (0, 5^3+1)$ найдется положительное решение (*)

Пусть $a \in (0, 5^3-1)$.

$\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+0} 5^{3-\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0+0}\frac{125}{5^{\frac{1}{x}}} = 0.$

$\sin 3^0 + a = \sin 1 + a > 0 + \sin 1 = \sin 1$.

Функция $g(x)$ - непрерывна, т.к. композиция непрерывных на $(0,+\infty)$.

Чистовик

Пусть $a = 5^3 - \alpha + 1$ $(\alpha > 0)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 5^{3-\frac{1}{x}} = 5^3 \Rightarrow \exists x_0 \quad 5^{3-\frac{1}{x}} \in U_\alpha(5^3)$, т.ч.

$f(x_0) > 5^3 - \alpha = a + 1 > a + \sin x_0 = g(x_0)$

~~g непрерывна, f(0) < g 0 < g(0), ∃x₀>0 f(x₀) > g(x₀)~~

~~Значит, есть решение~~

$\Rightarrow$ (*) имеет решения

Пусть $a \in [5^3 - 1, 5^3 + 1)$: (*)

$\lim\limits_{x \to +\infty} 5^{3-\frac{1}{x}} = 5^3$, $f(x) \uparrow$ т.к. $f'(x) = \ln 5 \cdot 5^{3-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} > 0$

Значит, $\forall \alpha > 0 \; \exists x_0 \; \forall x > x_0 \quad 5^{3-\frac{1}{x}} > 5^3 - \alpha$ (γ)

Пусть $\alpha = 5^3 + 1 - a$, $\alpha > 0$ т.к. (*). Для α сущ-ет x_0 т.ч. (γ)

Пусть $k \in \mathbb{Z} \mid \frac{3\pi}{2} + 2\pi k > x_0$ Тогда

$a + \sin 3^{\log_3(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k)} = a + \sin(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k) = -1 + a \Leftarrow 5 < -1 + 5^3 - \alpha + 1 =$

~~Пусть a = 5³+1−α (α>0 т.к. a ∈ [5³−1, 5³+1))~~

$= 5^3 - \alpha$

Значит, $f(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k) > g(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k)$.

(*) имеет решение

Ответ: $\boxed{126.}$ ~~5^3+1.~~

Задача 5.

$f_1(x) = (x + a_1)(x^2 + b_1 x + 6)$,

$f_2(x) = (x + a_2)(x^2 + b_2 x + 14)$, — многочлены степени 3.

$f_3(x) = (x + a_3)(x^2 + b_3 x + 21)$.

По условию, f_1, f_2, f_3 совпадают в каждой точке $x \in \mathbb{R}$.

Следовательно (т.к. $\deg f_1 = \deg f_2 = \deg f_3 = 3$), $f_1 \equiv f_2 \equiv f_3$

$f_1(x) = x^3 + x^2(a_1 + b_1) + x(6 + a_1 b_1) + 6a_1$

$f_2(x) = x^3 + x^2(a_2 + b_2) + x(14 + a_2 b_2) + 14a_2$

$f_3(x) = x^3 + x^2(a_3 + b_3) + x(21 + a_3 b_3) + 21a_3$

98-14-77-06 (161.23)

Чистовик

Из совпадения многочленов следует совпадение их коэффициентов:

$$\begin{cases} a_1+b_1 = a_2+b_2 = a_3+b_3 \\ 6+a_1b_1 = 14+a_2b_2 = 21+a_3b_3 \\ 6a_1 = 14a_2 = 21a_3 \end{cases} \quad (*)$$

Пусть $a_1+b_1 = S$. Тогда $(*) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{7}{2}a_3 \\ a_2 = \frac{3}{2}a_3 \\ 6+a_1(S-a_1) = 14+a_2(S-a_2) = 21+a_3(S-a_3) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 21+a_3S-a_3^2 = 14+\frac{3}{2}a_3S-\frac{9}{4}a_3^2 \\ 21+a_3S-a_3^2 = 6+\frac{7}{2}a_3S-\frac{49}{4}a_3^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{4}a_3^2-\frac{1}{2}a_3S+7=0 \quad |\cdot 5 \\ \frac{45}{4}a_3^2-\frac{5}{2}a_3S+15=0 \end{cases}$$

$\cancel{\Leftrightarrow \frac{20}{4}a_3^2+15-35=0 \Rightarrow 5a_3^2=20 \Rightarrow a_3=\pm 2}$

~~По условию, $a_3>0$. Значит, $a_3=2$.~~

~~Подставим в~~ (1):

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{4}a_3^2-\frac{1}{2}a_3S+7=0 \\ 5a_3^2=20 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a_3=2 \\ 5-S+7=0 \end{cases} \\ \begin{cases} a_3=-2 \\ 5+S+7=0 \end{cases} \text{ – не удовл. услов.} \end{array}\right.$$

Получаем:

$S=12$.

Тогда $a_1+b_1+a_2+b_2+a_3+b_3 = 3S = 36$

Ответ: 36.

Задача 4.

$$\cos^3(\sqrt{5}x)+\cos^3(2\sqrt{5}x)-\cos^3(4\sqrt{5}x) = (\cos(\sqrt{5}x)+\cos(2\sqrt{5}x)-\cos(4\sqrt{5}x))^3$$

$\Updownarrow$

$\cancel{\cos^3\sqrt{5}x+\cos}$

$$(\cos(\sqrt{5}x)+\cos(2\sqrt{5}x))(\cos^2(\sqrt{5}x)+\cos^2(2\sqrt{5}x)-\cos(\sqrt{5}x)\cdot\cos(2\sqrt{5}x)) =$$

$$= (\cos(\sqrt{5}x)+\cos(2\sqrt{5}x))((\cos(\sqrt{5}x)+\cos(2\sqrt{5}x)-\cos(4\sqrt{5}x))^2 +$$

$$+ (\cos(4\sqrt{5}x))^2 - \cos(4\sqrt{5}x)(\cos(\sqrt{5}x)+\cos(2\sqrt{5}x)-\cos(4\sqrt{5}x))$$

$\Updownarrow$

Чистовик

$\Updownarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \cos(\pi x)+\cos(2\pi x)=0 \\ \cancel{\cos^2(\pi x)}+\cos^2(2\pi x)-\cos(\pi x)\cdot\cos(2\pi x)=\cancel{\cos^2(\pi x)}+\cancel{\cos^2(2\pi x)}+\cos^2(4\pi x) \end{array}\right.$$

$$+\cos^2(4\pi x)+2\cos(\pi x)\cdot\cos(2\pi x)-2\cos(\pi x)\cdot\cos(4\pi x)-2\cos(2\pi x)\cos(4\pi x)$$

$$-\cos(4\pi x)\cdot\cos(\pi x)-\cos(4\pi x)\cdot\cos(2\pi x)+\cos^2(4\pi x)$$

$\Updownarrow$

$$\left[\begin{array}{ll} \cos(\pi x)+\cos(2\pi x)=0 & (1) \\ 0=3\cos^2(4\pi x)+3\cos(\pi x)\cdot\cos(2\pi x)-3\cos(\pi x)\cos(4\pi x)- & (2) \\ \qquad -3\cos(2\pi x)\cdot\cos(4\pi x) & \end{array}\right.$$

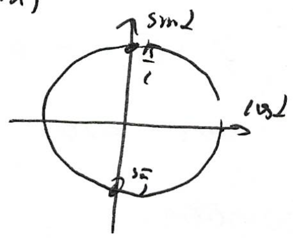
$\cancel{\Updownarrow}$

$$\left[\begin{array}{l} \cancel{\cos(\pi x)+\cos(2\pi x)=0} \\ \cancel{\frac{1}{2}\cos 5\pi x+\frac{1}{2}\cos 3\pi x+\frac{1}{2}\cos 6\pi x+\frac{1}{2}\cos 2\pi x=\frac{1}{2}\cos 3\pi x+\frac{1}{2}\cos \pi x+} \\ \cancel{+\cos^2(4\pi x)} \end{array}\right.$$

$\cancel{\Updownarrow}$

$$\left[\begin{array}{l} \cancel{2\cos\frac{3\pi x}{2}\cdot\cos\frac{\pi x}{2}=0 \quad (1)} \\ \cancel{\cos 5\pi x+\cos 6\pi x+\cos 2\pi x=\cos\pi x+\cos^2(4\pi x)} \end{array}\right.$$

Решим (1):



$$\left[\begin{array}{l} \cos\frac{3\pi x}{2}=0 \\ \cos\frac{\pi x}{2}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{3\pi x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ \frac{\pi x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x=1+2k \\ x=1+2k, \end{array}\right. k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2k,\ k\in\mathbb{Z} \\ x=\frac{1}{3}+\frac{2k}{3} \end{array}\right.$$

Отберем корни, принадлежащие $[0.3;\ 1.6]$:

$$\begin{cases} 0{,}3\le 2k\le 1.6 \\ k\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}15\le k\le 0{,}8 \\ k\in\mathbb{Z} \end{cases} \text{ – нет реш}$$

$$\begin{cases} 0.3\le \frac{1}{3}+\frac{2k}{3}\le 1.6 \\ k\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -0.1\le 2k\le 3.8 \\ k\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -0{,}05\le k\le 1.9 \\ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=0 \\ k=1 \end{array}\right.$$

Этим значениям k соотв-т корни: $\{\frac{1}{3},\ 1\}$.

$\cancel{x=\frac{1}{3}}$

98-14-77-06
(161.23)

Чистовик

Решим (2):

$$\cos^2(4\pi x) + \cos(\pi x)\cdot\cos(2\pi x) = \cos 4\pi x \cos \pi x + \cos 4\pi x\cdot\cos 2\pi x$$

$$\Leftrightarrow$$

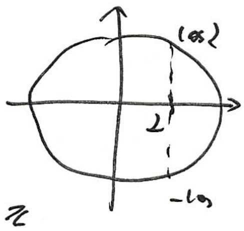
$$\cos(4\pi x)(\cos 4\pi x - \cos 2\pi x) = \cos\pi x(\cos(4x\pi) - \cos(2\pi x))$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(\cos(4\pi x) - \cos(2\pi x))(\cos(4\pi x) - \cos(\pi x)) = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos 4\pi x = \cos 2\pi x \\ \cos 4\pi x = \cos \pi x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4\pi x = 2\pi x + 2\pi k \\ 4\pi x = -2\pi x + 2\pi k \\ 4\pi x = \pi x + 2\pi k \\ 4\pi x = -\pi x + 2\pi k \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z}$$



$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k \\ x = \frac{k}{3} \\ x = \frac{2k}{3} \\ x = \frac{2}{5}k \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z}$$

Отберем корни на $[0.3;\ 1.6]$:

$$\begin{cases} 0.3 \le \frac{k}{3} \le 1.6 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,9 \le k \le 4,8 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow k \in \{1, 2, 3, 4\}$$

Тогда $x \in \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}\}$

$$\begin{cases} 0,5 \le \frac{2}{5}k \le 1.6 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,75 \le k \le 4 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow k \in \{1, 2, 3, 4\}$$

Тогда $x \in \{\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 1\frac{1}{5}, 1\frac{3}{5}\}$

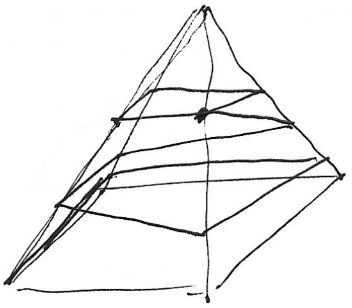
$$\begin{cases} 0,3 \le \frac{2k}{3} \le 1,6 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \in [0,45,\ 2,4] \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow k \in \{1, 2\}$$

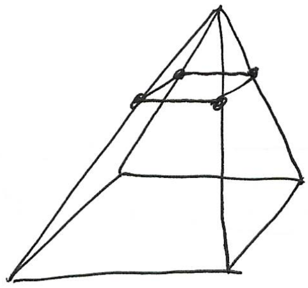
Тогда $x \in \{\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\}$

Ответ: $\{\frac{1}{3}, 1, \frac{2}{3}, 1\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 1\frac{1}{5}, 1\frac{3}{5}\}$.

98-14-77-06
(161.23)

Черновик





$\cos^3 4\pi x =$

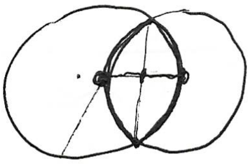
$2\cos\frac{3\pi x}{2}\cdot\cos\frac{\pi x}{2}$

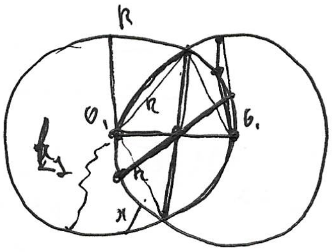
$2R\sqrt{3}$

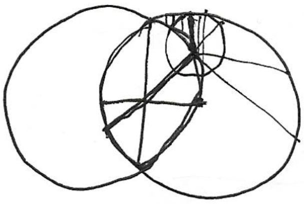
$R\sqrt{3}$

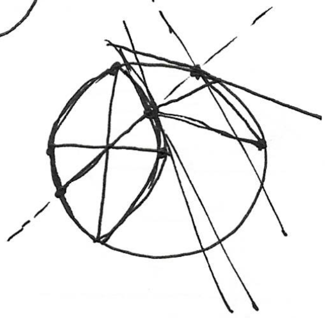
$\frac{3R}{2}$ $R\sqrt{3}$

$\frac{9R}{4} < 3R$









$\cos^3\pi x + \cos^3 2\pi x = \cos^3 4\pi x$

$\cos\pi x + \cos 2\pi x = \cos 4\pi x$

$+2\sin 3\pi x\cdot\sin\pi x + \cos\pi x$

$\cos\pi x + \cos 2\pi x - 2\cos^2 2\pi x + 1$

$-2\cos^2\pi x + 1$

$\cos 2\pi x + 1$

$2\cos^2\pi x - 1 = \cos 2\pi x$

$\cos^3(4\pi x) + (\cos\pi x + \cos 2\pi - \cos 4x)^3 = \cos\pi x + 2\cos^3\pi x - 2\cos^3 2\pi x$

$= (\cos\pi x + \cos 2\pi x)((\cos\pi x + \cos 2\pi - \cos 4x)^2 + \cos^2 4\pi x -$

$\cos\alpha\cdot\cos\beta =$

$= \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$

$-(\cos + \cos - \cos)(\cos 4\pi x)) =$

$\frac{1}{2}$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos + \sin$

$\cos\alpha\cdot\cos\beta =$

$= \sin(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$

$\pi - \pi$ $1+$ $=$ $\cos$

-1

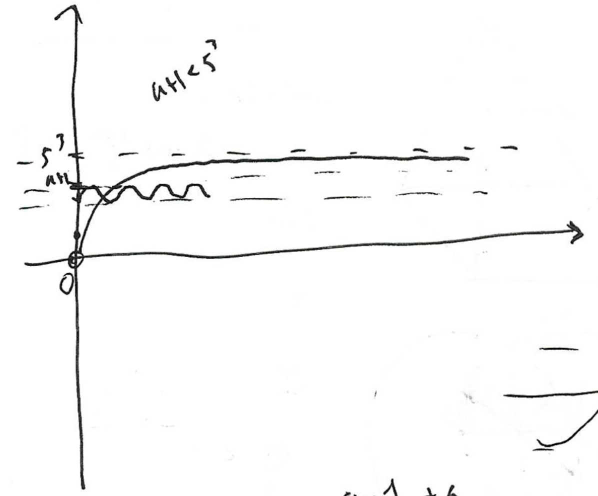
$a^3 + b^3 = (a+b-c)^3 + c^3$

$(a+b)(a^2+b^2-ab) = (a+b)(a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$

$c^2 + ab = ac + bc + c^2 + \ldots c + c^2$

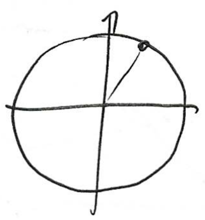
$c^2 - c(a+b) + ab = 0$

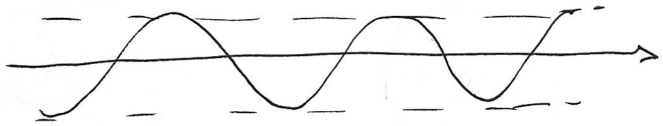
Черновик



$\sin 3^0 = \sin 1$

$3^x = \frac{\pi}{2}$





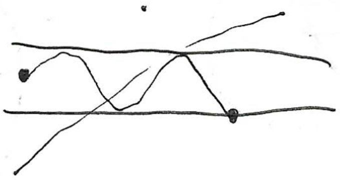
$\sin 1 + a$

$a+1 < 5^3$

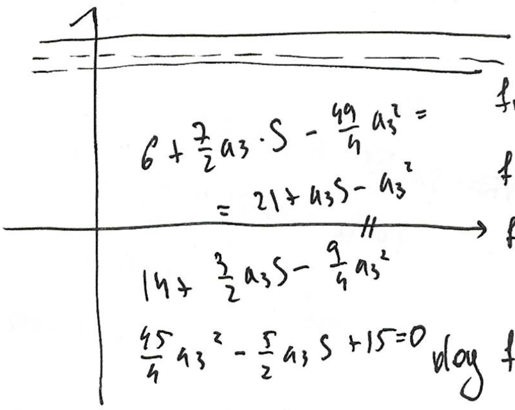
$a < 5^3 - 1$

$\sin 3^x = -1$

$3^x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$



$0 = b_1^2 - 24$



$6 + \frac{7}{2}a_3 \cdot S - \frac{49}{4}a_3^2 =$

$= 21 + a_3 S - a_3^2$

$14 + \frac{3}{2}a_3 S - \frac{9}{4}a_3^2$

$\frac{45}{4}a_3^2 - \frac{5}{2}a_3 S + 15 = 0$

$f_1(x) = (x+a_1)(x^2+b_1x+6)$

$f_2(x) = (x+a_2)(x^2+b_2x+14)$

$f_3(x) \quad (x+a_3)(x^2+b_3x+21)$

$x^3 + b_1x^2 + 6x + a_1x^2 + a_1b_1x + 6a_1$

$\deg f = 3$

$\frac{5}{4}a_3^2 - \frac{1}{2}a_3 S + 7 = 0 \quad x^3 + b_1x^2 + a_1x^2 + x(6+a_1b_1) + 6a_1$

$\frac{25}{4}a_3^2 - \frac{5}{2}a_3 S + 35 = 0$

$b_1 = S - a_1 \quad 5a_3^2 - 20 = 0$

$a_3 = 2$

$6 + a_1 S - a_1^2 =$

$= 14 + a_2 S - a_2^2 = 21 + a_3 S - a_3^2$

$a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = a_3 + b_3 = S$

$6a_1 = 14a_2 = 21a_3$

$14 + a_2b_2 = 6 + a_1b_1 = 21 + a_3b_3$

$a_1 = \frac{7}{2}a_3 \quad b_3 - \frac{5}{2}a_3$

$\frac{7}{2}a_3 + b_1 = a_3 + b_3$

$b_3 = \frac{5}{2}a_3 + b_1$

~~$f_1(x) - f_1(x)$~~ $=$ a_2 $\quad 6 + \frac{7}{2}a_3 \cdot b_1 = 21 + a_3 \cdot b_3$

$b_2 = S - a_2$

$= 21 + a_3$

$a_1 = \frac{7}{2}a_3 \quad 14 + a_2 S - a_2^2 \quad 6 + \frac{7}{2}a_3\left(b_3 - \frac{5}{2}a_3\right) = 21 + a_3 b_3 \quad | \cdot 4$

$a_2 = \frac{3}{2}a_3$

$24 + 14a_3b_3 - 35a_3^2 = 84 + 4a_3b_3$

$8 + \frac{3}{2}a_3 \cdot b_2 - \frac{7}{2}a_3 \cdot b_1 = 8 - \frac{1}{2}a_3(3b_2 - 7b_1)$

$2a_3 = b_1 - b_2$

$b_1 = b_2 + 2a_3$

$8 - \frac{1}{2}a_3(3b_2 - 7b_2 - 14b_3)$

$6 +$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Черновик

$6a_1 = 14a_2 = 21a_3$

$a_1 = \frac{7}{2}a_3, \quad a_2 = \frac{3}{2}a_3$

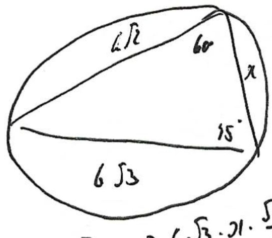
$x = -\frac{7}{2}a_3$

$0 = -2a_3($

$(x + \frac{7}{2}a_3)(x^2 + b_1x + 6)$

$(x + \frac{3}{2}a_3)(x^2 + b_2x + 14)$

$(x + a_3)(x^2 + b_3x + 21)$



$3\sqrt{6} \pm 3\sqrt{2}$

$3\sqrt{6} + 3\sqrt{2} > 6\sqrt{3}$

$3\sqrt{6} > 36 \cdot 3 + 18 - 6\sqrt{6}$

$= 36 \cdot 2 \quad 3\sqrt{6} > 126$

$9 \cdot 6$

$36 - 9 = 27$

$36 \cdot 3 + x^2 - 2 \cdot 6\sqrt{3} \cdot x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$a_1^2 - a_1b_2 + 14$

$a_1^2 - a_1b_3 + 21$

$\Rightarrow 7 = a_1(b_3 - b_2)$

$x^2 - 6\sqrt{6} + 36 = 6\sqrt{3}$

$72 + 36$

10

$D/4 = 54 - 36 = 18$

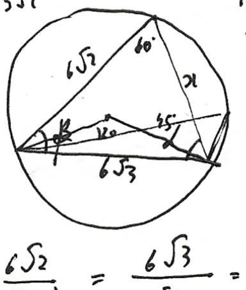
$(a_1+1)(7+b_1) = (a_2+1)(15+b_2) = (a_3+1)(22+b_3)$

$3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}$

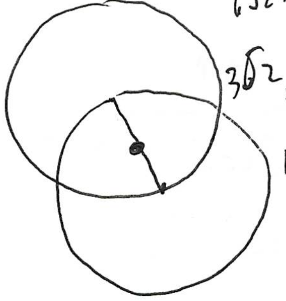
105

75°

$(a_2 - b_2) \cdot 14 = (a_1 - b_2)(b_2^2 - b_1b_2 + 6)$

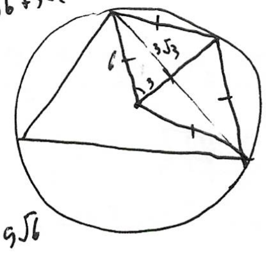


$6\sqrt{2} + 6\sqrt{3} > 3\sqrt{6} + 3\sqrt{2}$



$3\sqrt{2} > 3\sqrt{6}$

$+6\sqrt{3}$



$18 + 36 \cdot 3 +$

$+ 36\sqrt{6} > 9\sqrt{6}$

$\frac{6\sqrt{2}}{\sin\alpha} = \frac{6\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 12$

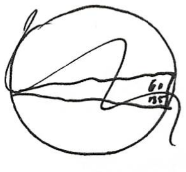
$\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

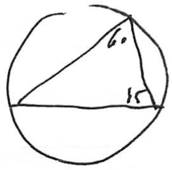
$\alpha = 45° \; / 135°$

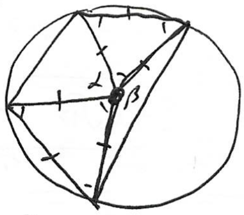
$72 + x^2 - 2 \cdot 6\sqrt{2} \cdot x \cdot \frac{1}{2} = 36 \cdot 3$

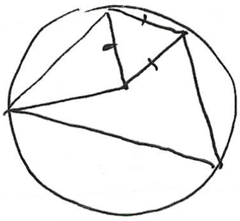
$x^2 - 6\sqrt{2} \quad -36 = 0$

$D/4 = 72 + 36^2$









$36 \cdot 2 + x^2 - 2 \cdot 6\sqrt{2} \cdot x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 36 \cdot 3$

x^2

$\alpha + \beta = 360° - 120° = 240°$

$2S_0 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \sin\alpha \quad \alpha$

$2S_0 + 18 \; (\sin\alpha + \sin\beta)$

$36 \cdot 3 + x^2 - 2 \cdot 6\sqrt{3} \cdot x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 36 \cdot 2$

$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2} \geq 1$

$\alpha + \beta = 240$

$2\sin 120°$

$x^2 - 6\sqrt{6}x + 36 = 0$

$36 \cdot 6 - 36 \cdot 4 = 36 \cdot 2 = 72$

$54 - 36 =$

18

$\cos\alpha + \cos\beta =$

$D = 18 + 36 = 54$

3

$\cos(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}) =$

$x = 3\sqrt{2} \pm 3\sqrt{6}$

$= \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2} \pm \sin$

$\cos\pi x + \cos 2\pi x - \cos 4\pi x$

$\cos\pi x$

$\cos(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}) =$

$= \cos \quad \cos - \sin$

$(\cos(2\pi x) - \cos(4\pi x))(\cos^2(2\pi x) + \cos(2\pi x) \cdot \cos(4\pi x) + \cos^2 4\pi x)$

Черновик

$|2x+3| + |x+3| + |x+2| = \sqrt{4+\sqrt{12}} - \sqrt{4-\sqrt{12}}$

$---$, $--+$, $-++$, $+++$

-3 -2 $-\frac{3}{2}$

$\cancel{x+2 \geq 0}$ A B

$x \geq -2$ AB = 2

$-4x - 8 = \sqrt{4+\sqrt{12}} - \sqrt{4-\sqrt{12}}$

$4x + 8 =$

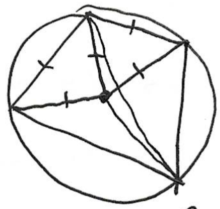
$-2x - 3 + 2x + 5 = \sqrt{4-\sqrt{12}} - \sqrt{4-\sqrt{12}}$

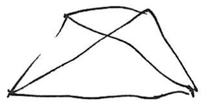
$2 = \sqrt{4+\sqrt{12}} - \sqrt{4-\sqrt{12}}$

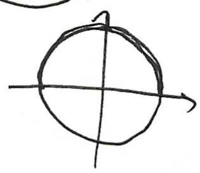
$2 + \sqrt{4-\sqrt{12}} = \sqrt{4+\sqrt{12}}$

$4 + 4 - \sqrt{12} = 4 + \sqrt{12}$

$4 = 2\sqrt{12}$







$\uparrow 5^{3-\frac{1}{x}} \geq a + \sin 3^x \uparrow$ - нет реш при $x > 0$

$\cancel{\frac{125}{5^{\frac{1}{x}}} \geq a + \sin 3^x}$ $3^x \in (0, \cancel{2\pi}]$

$\frac{1}{x} \downarrow$ $-\frac{1}{x} \uparrow$

$a^3 + b^3 - c^3 = (a+b-c)^3$ $\cos 5\pi x + \cos 2\pi x - \cos 4\pi x$

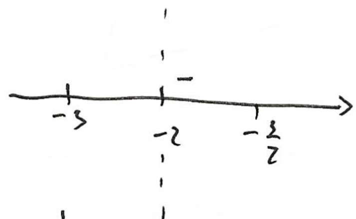
$\cos 2\pi x = =$ $\cancel{2\cos}$ $-2\sin 3\pi x \cdot \sin$

$\cos 4\pi x = \cos^2 \cdot 2\pi x - \sin^2 2\pi x$

$x \geq -2$ $2x+3 \geq$

2

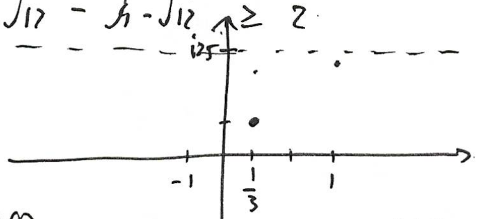
$x+3 \geq 1$



$\frac{\sqrt{4+\sqrt{12}} - \sqrt{4-\sqrt{12}} - 2}{4} \geq -\frac{3}{2}$

$\sqrt{4+\sqrt{12}} - \sqrt{4-\sqrt{12}} \geq 2$

$5^{3-\frac{1}{x}} \geq a+1$ - нет реш.



$5^{3-\frac{1}{x}}$ $3 - \frac{1}{x} = 0$

$x \to 0$ $x = \frac{1}{3}$

$-\frac{1}{x} \to -\infty$ $\frac{125}{5^{\frac{1}{x}}}$ $x \to \infty$

$3 - \frac{1}{x}$ $x \to -\infty$ 5^3

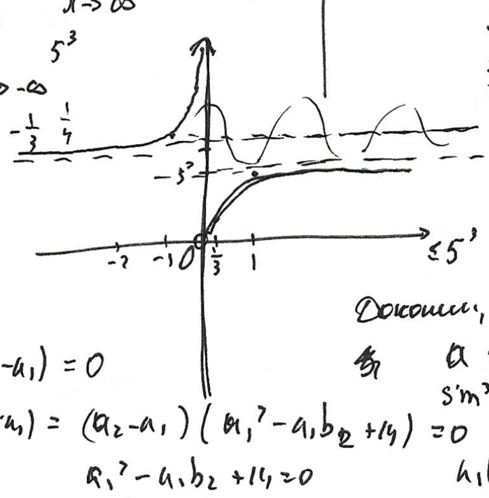
$x \geq 0$ $\frac{1}{x} \geq 0$

$3 - \frac{1}{x} \leq 3$

$5^{-\infty}$ $x \to -\infty$

$x \to 0$

5^3



$(5^{3-\frac{1}{x}})' = \ln 5 \cdot 5^{3-\frac{1}{x}} \cdot -\frac{1}{2}$ -10

$\ln 5 \cdot 5^{3-\frac{1}{x}} \cdot (\frac{1}{}$

$\sin 3^x + a \geq 5^3$

$\leq 5^3 \leq a + \sin 3^x \leq a+1$

$\lim\limits_{x \to \infty} 5^{3-\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{125}{5^{\frac{1}{x}}} =$

Докажем, что $\forall$ 5

$a \leq 5^3 - 1$

$\sin^{3x} + a \leq \sin^{3^{301}} + 5^3 - 1$

$f_1(0) = 6a_1$

$f_2(0) = 14a_2$

$f_3(0) = 21a_3$

$f_1(-a_1) = 0$

$f_2(-a_1) = (a_2 - a_1)(a_1^2 - a_1 b_2 + 14) = 0$

$a_1^2 - a_1 b_2 + 14 = 0$

$a_1^2 - a_1 b_3 + 21 = 0$

$a_1(b_2 - b_3) + 7 = 0$