

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 7-8

Место проведения г. Москва
город

Олимпиада

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов“
наименование олимпиады

ПО математике
профиль олимпиады

Владимирова Алексей Алексеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«13» апреля 2025 года

Подпись участника

Влад

ТестовикЗадача 3

$$2025^1 \equiv_4 1$$

$$2025^2 \equiv_4 1$$

⋮

$$2025^{2025} \equiv_4 1$$

$$8^1 \equiv_{10} 8$$

$$8^2 \equiv_{10} 4$$

$$8^3 \equiv_{10} 2$$

$$8^4 \equiv_{10} 6$$

$$8^5 \equiv_{10} 8$$

⋮

8 дает следующий цикл остатков (mod 10):

$$8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 6$$

⋮

8^n , где $n \equiv_4 1$ дает остаток 4 при делении на 10.

$$2025^{2025} \equiv_4 1 \Rightarrow 8^{2025} \equiv_{10} 4$$

⋮

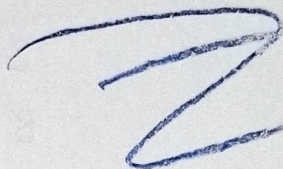
Последняя цифра числа $8^{2025^{2025}}$ это 4.

Отв: 4

Тестовикстр 2Задача 6

Каждый из 20 учеников решил хотя бы n задач и Пете решил больше, чем Васа $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ все ученики решили в сумме хотя бы $19n + (n+1)$ задач

$$19n + (n+1) = 20n + 1$$



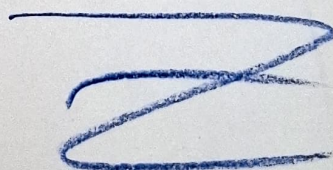
Найдем наибольшее n , при котором может случиться так, что каждую задачу решили меньше, чем половина учеников $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ всего ученики в этом случае решили не больше, чем $100 \left(\frac{20}{2} - 1 \right) = 900$ задач.

⇓

При наименьшем n , подходящем под условие задачи $20n + 1 > 900$, т.к. если ученики в сумме решат более 900 задач, по принципу Дирихле найдется задача, которую решила хотя бы половина класса

⇓

$$n > 44,95.$$



Ученики могли решить только целое кол-во задач $\Rightarrow$ минимальное n , подходящее под условие = 45

Отв: 45

Числовикстр 3Задача 2

2

Заметим, что если число счастливое, то сумма его цифр четна, т.к. их можно разбить на 2 группы с равными суммами.

⇓

Если число суперсчастливое, то следующее за ним число образовано с переходом через десяток при добавлении 1.

Однозначных счастливых чисел не существует, двузначные счастливые числа это 11, 22, 33 и т.д. 100 не является счастливым числом

⇓

Однозначных и двузначных суперсчастливых чисел не существует.

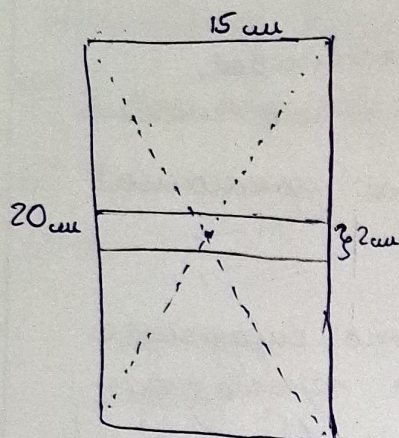
Найдем наименьшее трехзначное суперсчастливое число. Оно оканчивается на 9 $\Rightarrow$ первая и вторая цифры в сумме дают 9, т.к. или первая цифра = второй + третий, то либо вторая ~~цифра~~ ^{цифра} 0, либо первая > 9 . Рассмотрим варианты:

189 $\rightarrow$ 190 - не счастливое279 $\rightarrow$ 280 - не счастливое369 $\rightarrow$ 370 - не счастливое459 $\rightarrow$ 460 - не счастливое549 $\rightarrow$ 550 - счастливое

$\Rightarrow$ минимальное суперсчастливое число это 549

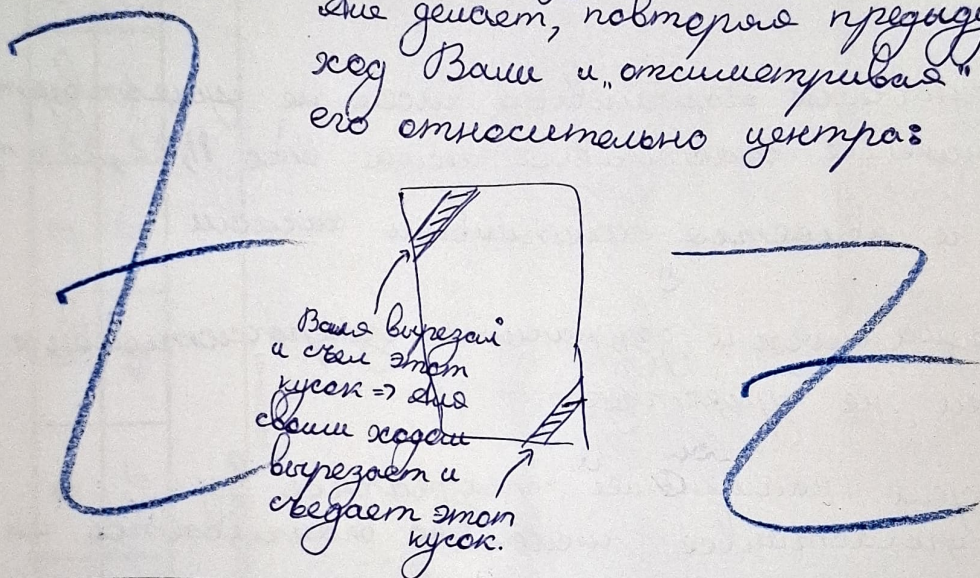
⋮

Отв: 549

Тестовикстр 4Задача 1

Для первого хода вырезает и съедает посылку 15×2 см как на рисунке так, чтобы оставшиеся 2 части были симметричны относительно центра пирога.

Все последующие ходы Аня делает, повторяя предыдущий ход Вани и „отсимметривая“ его относительно центра:



Если Ваня смог на одной из частей сделать свой ход, то Аня сможет сделать такой же ход на другой части, т.к. после каждого хода ~~Аня~~ Аня, остатки пирога симметричны относительно центра.

Отв: Аня.

Чистовикстр 5Задача 5

Z

Было сделано 1 подбрасывание $\Rightarrow$ все жуки ровно 1 раз поменяли свои грани.

С каждой ^{гранью} ~~ребра~~ граничит 4 ^{грань} ~~ребра~~, которые можно разбить на 2 пары противоположных $\Rightarrow$ на 4 ^{гранях} ~~ребрах~~, граничащих с 1 ^{гранью} ~~ребром~~ находится ровно $2 \cdot 7 = 14$ жуков.

После подбрасывания на эту ~~грань~~ ^{грань} можно переизбрать не более 14 жуков.

Поскольку все жуки поменяли свои грани, те жуки которые были на этой грани изначально, уползли

После подбрасывания, на одной грани можно оказаться не более 14 жуков.

Пример очевиден.

Отв: 14

Чистовикстр 6Задача 7

Всего вариантов расстановки:

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 9 \cdot 7 \cdot 4 = 252$$

7

Посчитаем количество неподходящих расстановок и вычтем из 252:

5 П подряд - 4 варианта

5 л подряд - 4 варианта

Только 4 П подряд - $5 \cdot 4 = 18$ вариантов

Только 4 л подряд - 18 вариантов

и 4 П, и 4 л подряд - 2 варианта

Только 3 П подряд - ~~46~~ - ~~46~~ вариантов

Только 3 л подряд - ~~46~~ вариантов

и 3 П, и 3 л подряд - 14 вар

P.S. Подряд имеется в виду между пальцами другой руки, т.е. 5 П подряд это 5 пальцев правой руки между 2 пальцами левой руки.

$\left. \begin{array}{l} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ \vdots \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \end{array} \right\} 4 \text{ layers}$



$\cdot \square \square \square \square \cdot \square \cdot \cdot \cdot$
 $\cdot \square \square \square \square \cdot \cdot \square \cdot \cdot$
 $\cdot \square \square \square \square \cdot \cdot \cdot \square \cdot$
 ~~$\cdot \square \square \square \square \cdot \square$~~
 $\vdots$
 $\cdot \cdot \cdot \cdot \square \cdot \square \square \square \square \cdot$

} 18 bags

A large, stylized blue ink flourish or signature mark on a light-colored background. The mark consists of a single continuous line that starts at the top left, curves down and to the right, then loops back up and to the left, crossing itself, and finally extends to the right. It resembles a calligraphic 'Z' or a decorative flourish.

$\begin{matrix} \text{A P P P P P P P P P} \\ \text{P P P P P P P P P P} \end{matrix} \Bigg\} 2 \text{ days.}$

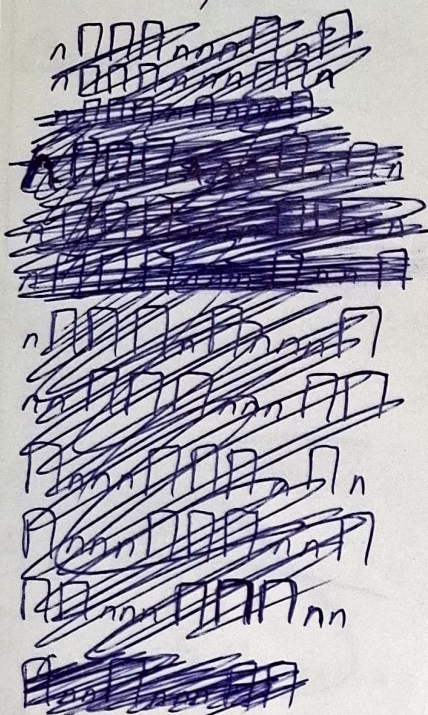
~~Поиск 3П вразр (3П активно)~~

Handwritten musical notation on a page with a vertical line. The notation consists of two columns of notes, each with a large oval scribble over it. The notes are written in a stylized, blocky font. The right column has a "15-2-" and "30 bpm" written next to it.

Чистовик

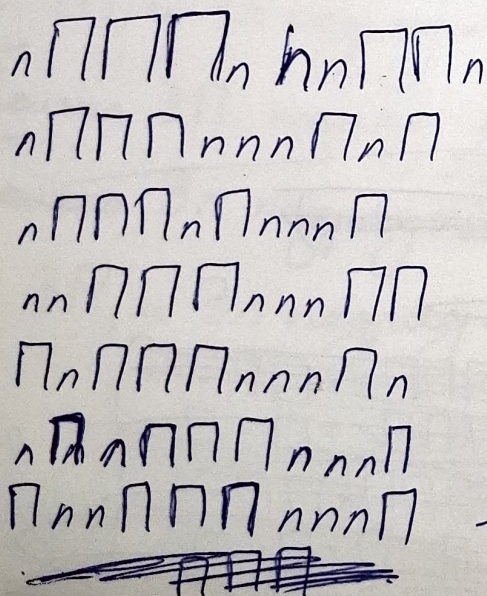
стр 8

и 3П, и 3н:



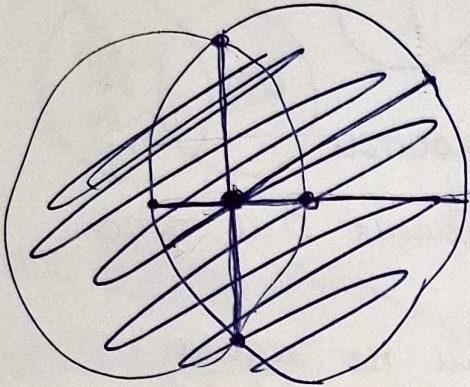
Две 3П и 3н:

вариантов две 3П всего
 $6 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 60$, но в 18
 из них и 3П, и 3н $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ вариантов только
 две 3П - 46

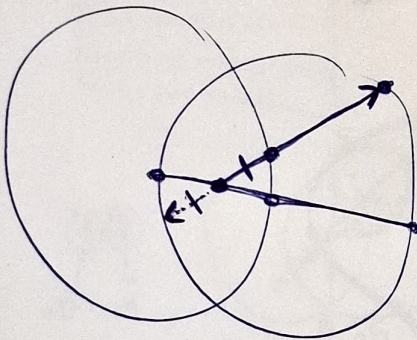
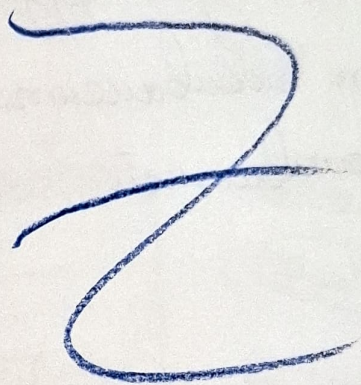


$7 \cdot 2 = 14$ вар

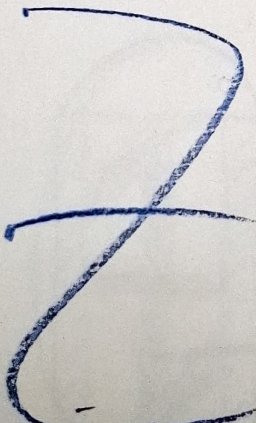
$$252 - 4 - 4 - 18 - 18 - 2 - 46 - 46 - 14 = 100$$

Чистовикстр 9Задача 4

~~Заметим, что~~
~~если~~



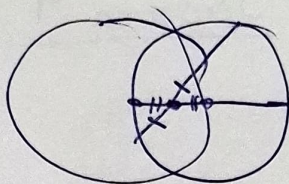
Заметим, что
если коза прошла
по какому-то
путь, то
можно считать, что
она прошла по отрезку
со стрелочками, но
на пересечении 2 кругов
пути растет с обычной
скоростью, т.к. отнесенные
отрезки равны.



Самый длинный отрезок, проходящий через
козу ~~это~~ и имеющий границы на 1 окр
это диаметр одной из окружностей, т.к.
диаметр это самая длинная хорда окружности $\Rightarrow$

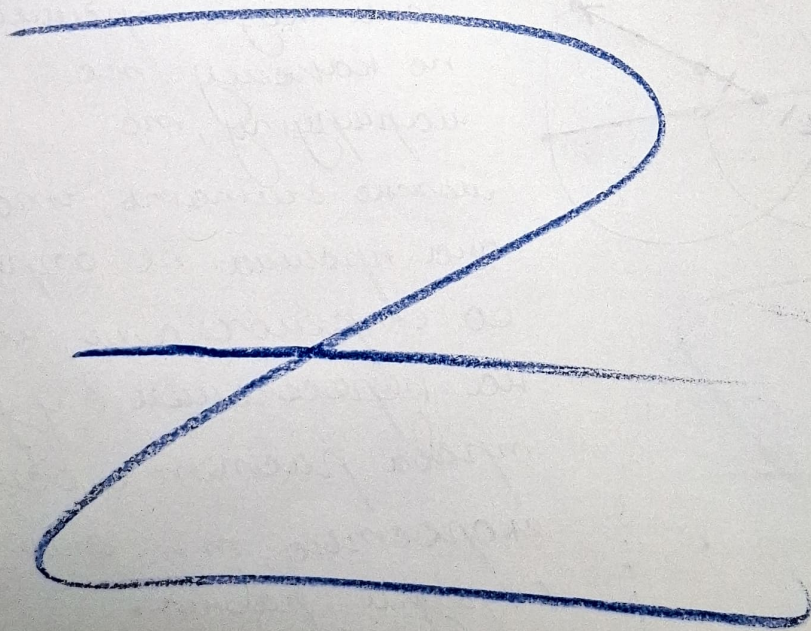
~~Чистовик~~

Стр 10

Чистовик

⇒ козе надо
идти в направлении
центра одной из окружностей
и этот путь будет длиннее 3 м, что
будет эквивалентно 4 м по газону с
4 пошивашкой.

Отв. 3 м.



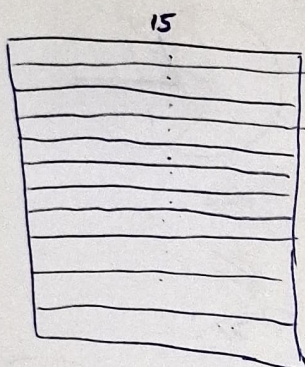
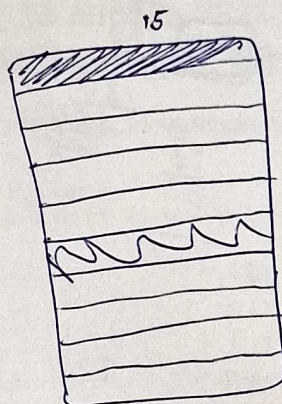
2
 1

$\cdot \square \square \square \square \square \square \square$

5-4

$300 - 30 \rightarrow 270$
 $270 \rightarrow 120 - x \rightarrow 90 - x$
 $270 \rightarrow 120 + x$

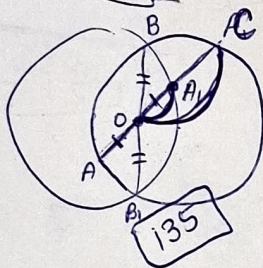
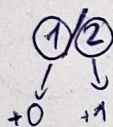
150


$$\frac{5.4}{2}$$


300 cm²

30 cm^2

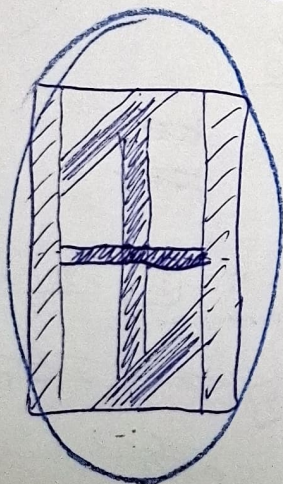
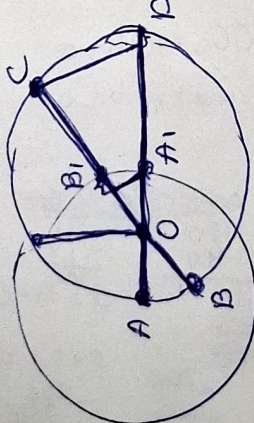
$$20 \text{ cm} = 2 \text{ cm} \cdot 10$$



$$\begin{aligned} OB \cdot OB_1 &= OA \cdot OC = \\ &= OB^2 = \cancel{OA} \cdot OA(OA + AC) = \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$OA + OC$$

5


$$\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1^2 & \end{array}$$


$$\begin{aligned} A_1 O \cdot D O &= A_1 O (A_1 O + A_1 D) = \\ &= A_1 O^2 + A_1 O \cdot A_1 D \\ B_1 O \cdot C O &= B_1 O (B_1 O + B_1 C) = \\ &= B_1 O^2 + B_1 O \cdot B_1 C \end{aligned}$$

Черновик
стр 2

$$\begin{aligned} 8^1 &\equiv 8 \\ 8^2 &\equiv 64 \equiv 4 \\ 8^3 &\equiv 32 \equiv 2 \\ 8^4 &\equiv 16 \equiv 6 \\ 8^5 &\equiv 48 \equiv 8 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} \times 1,5 \\ 1,5 \\ \hline 2,25 \end{array}$$

$$n \cdot 19 + n + 1 \geq 20n + 1$$

$$\sqrt{3} > 1,5$$

$$3 > 2,25$$

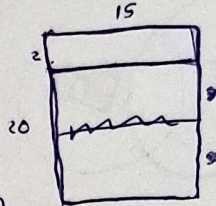
$$20n + 1 \geq 900$$

$$\begin{aligned} 252 &\approx 2 \cdot 126 \\ &= 2 \cdot 63 \\ &= 4 \cdot \end{aligned}$$

$$S = 20 \cdot 15 = 300 \text{ см}^2$$

$$30 \text{ см}^2$$

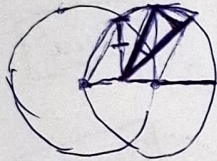
$$5$$



П П П П П П П П

$$2025^{2025} \equiv ?$$

$$300 - 30 \rightarrow \frac{270}{2} \rightarrow 120$$



$$\begin{array}{r} \times 9 \\ 9 \\ \hline 81 \\ \times 63 \\ 4 \\ \hline 252 \end{array}$$

$$1 - 14$$

$$\frac{1}{2} \cdot 2 + 1 = 2$$

$$\frac{1}{2} \cdot 2 + 1 = 2$$

~~П П П П П П П П~~

$$2025' \equiv 1$$

$$\begin{array}{l} 110 \\ 111 \\ 112 \\ 113 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 120 \\ 121 \\ 122 \\ 123 \\ 124 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 130 \\ 131 \\ 132 \\ 133 \end{array}$$

$$2\sqrt{3} \gg 2$$

$$2025^{2025} \equiv 1 \quad \text{П П П П П П П П}$$

$$8^{2025} \equiv 4$$

$$\begin{array}{r} \times 44,95 \\ 20 \\ \hline 89,900 \end{array}$$

$$44,905$$

$$\begin{array}{r} \times 44,905 \\ 20 \\ \hline 2810 \end{array}$$

$$1000 \cdot 1000 \cdot 1000$$

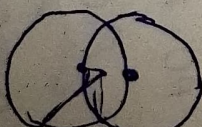
$$\begin{array}{r} 549 \\ 550 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 100a + 10b + c \\ 100a + 10b + c + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 878 \\ 820 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 206 \\ -46 \\ \hline 160 \end{array}$$

$$120 - 30 \rightarrow \frac{90 - 30}{2} \rightarrow 30$$



$$\begin{array}{r} -160 \\ -46 \\ \hline 114 \end{array}$$

$$a = b + c$$

$$549$$

$$a = b + c = c + b + 1$$

$$c + 1 = a + b$$

$$\begin{array}{r} -252 \\ 8 \\ \hline 244 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -244 \\ 18 \\ \hline 226 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -226 \\ 18 \\ \hline 208 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -208 \\ 2 \\ \hline 206 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -206 \\ 30 \\ \hline 176 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -176 \\ 30 \\ \hline 146 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -146 \\ 14 \\ \hline 132 \end{array}$$