0 060358 970004

06-03-58-97
(161.2)

# МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
## имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс

Место проведения Москва
город

12:48
12:57

+1 лист

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Волковой Анны Дмитриевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

| Шифр | Сумма | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 06-03-58-97 | 60 | + | + | + | + | + | — | 0 | 0 |
| | | | | | | | | | |

06-03-58-97 (161.2)

Чистовик

75 (семьдесят пять)

Вагизов / Валумова Д.К.

Задача 1

$$\sqrt{4x^2+12x+9}+\sqrt{9x^2+12x+4}-\left(\sqrt{-(x+1)}\right)^2=\sqrt{7+\sqrt{24}}-\sqrt{7-\sqrt{24}}$$

$$\sqrt{(2x+3)^2}+\sqrt{(3x+2)^2}-\left(\sqrt{-(x+1)}\right)^2=\sqrt{6+2\sqrt{6}+1}-\sqrt{6-2\sqrt{6}+1}$$

$$\begin{cases}|2x+3|+|3x+2|-(-(x+1))=\sqrt{(\sqrt{6}+1)^2}-\sqrt{(\sqrt{6}-1)^2}\\ -(x+1)\geq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}|2x+3|+|3x+2|+x+1=\sqrt{6}+1-(\sqrt{6}-1)\\ x+1\leq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}|2x+3|+|3x+2|+x+1=2\\ x\leq -1\end{cases}$$

$$\begin{cases}|2x+3|+|3x+2|+x=1\\ x\leq -1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\begin{aligned}&\begin{cases}(2x+3)+(3x+2)+x=1\\ 2x+3\geq 0\\ 3x+2\geq 0\end{cases}\\ &\begin{cases}(2x+3)-(3x+2)+x=1\\ 2x+3\geq 0\\ 3x+2<0\end{cases}\\ &\begin{cases}-(2x+3)-(3x+2)+x=1\\ 2x+3<0\\ 3x+2<0\end{cases}\end{aligned}\right.\\ x\leq -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{aligned}&\begin{cases}6x+4=0\\ x\geq -\frac{3}{2}\\ x\geq -\frac{2}{3}\end{cases}\\ &\begin{cases}1=1\\ x\geq -\frac{3}{2}\\ x<-\frac{2}{3}\end{cases}\\ &\begin{cases}-4x-6=0\\ x<-\frac{3}{2}\\ x<-\frac{2}{3}\end{cases}\end{aligned}\right.\\ x\leq -1\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{aligned}&\begin{cases}3x=-2\\ x\geq -\frac{2}{3}\end{cases}\\ &\begin{cases}x\geq -\frac{3}{2}\\ x<-\frac{2}{3}\end{cases}\\ &\begin{cases}2x=-3\\ x<-\frac{3}{2}\end{cases}\end{aligned}\right.\\ x\leq -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{aligned}&x=-\frac{2}{3}\\ &x\in\left[-\frac{3}{2};-\frac{2}{3}\right)\end{aligned}\right.\\ x\leq -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\in\left[-\frac{3}{2};-\frac{2}{3}\right]\\ x\leq -1\end{cases} \Leftrightarrow x\in\left[-\frac{3}{2};-1\right]$$

**Ответ:** ~~[illegible]~~ $\left[-\frac{3}{2};-1\right]$.

Чистовик

## Задача 2

1) $5^{3-\frac{1}{x}} \geq a + \sin 3^x$ не имеет реш., больших нуля

Т.е.:

$5^{3-\frac{1}{x}} < a + \sin 3^x$ для любого $x>0$.

2) $\forall\ x>0$:

$5^{3-\frac{1}{x}} - \sin 3^x < a$

3) Докажем, что ~~...~~ для любого $b<125$ $(b>0)$ сущ. $x_1>0$: $5^{3-\frac{1}{x_1}} = b \Rightarrow \log_5 b = 3 - \frac{1}{x_1}$, а т.к. $b<125$, $y=\log_5 x \uparrow^{\text{на }(0;+\infty)} \Rightarrow \log_5 b < 3$, т.е. всегда можем подобрать $x_1$: ~~$3-\frac{1}{x_1}=\log_5 b$~~

$\frac{1}{x_1} = 3 - \log_5 b \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3-\log_5 b}$ $(x_1>0)$

4) Т.к. нер-во должно быть верно для всех $x>0 \Rightarrow$ оценим наиб. знач. выражения $(5^{3-\frac{1}{x}} - \sin 3^x)$. Наиб. знач. $-(\sin 3^x) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin 3^x = -1 \Rightarrow 3^x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{N}_0$ $(3^x>0)$.

Т.о. если $x = \log_3(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k)$ $(k \in \mathbb{N}_0)$, то $-\sin 3^x = 1$, т.е. т.к. $y=\log_3 x \uparrow^{\text{на }(0;+\infty)}$, то сущ. сколь угодно большой $x_2$, при котором $-\sin 3^{x_2} = 1$ (берём сколь угодно большое $k$)

5) Т.о. пусть $a<126$. Тогда сущ. $x_1>0$: $5^{3-\frac{1}{x_1}} = a-1$ (по п. 3) решения). Т.к. при увеличении $x$ $f(x) = 5^{3-\frac{1}{x}}$ возрастает $\Rightarrow$



06-03-58-97
(161.2)



Чистовик

$\Rightarrow$ подберём такой $x_2 \geq x_1$, что ~~$x_2 = (\frac{3\pi}{2} + 2\pi k$~~

$x_2 = \log_3(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{N}_0$ (такой сущ. по п. 4) решения, т.к. можем взять сколь угодно большое $k \Rightarrow$ получить сколь угодно большой $x_2$ ($y = \log_3 x \uparrow$ на $(0;+\infty)$).

Т.о. нашли $x_2$: $5^{3-\frac{1}{x_2}} \geq a-1$, $-\sin 3^{x_2} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5^{3-\frac{1}{x_2}} - \sin 3^{x_2} \geq a$. Противоречие $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ наим. $a \geq 126$.

6) Докажем, что для $a = 126$ всегда верно.

$f(x) = 5^{3-\frac{1}{x}} - \sin 3^x$

. $f_1(x) = 5^{3-\frac{1}{x}} \Rightarrow f_1(x) < 5^3$ при $x>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f_1(x) < 125\ \ \forall x>0$

. $f_2(x) = -\sin 3^x \Rightarrow f_2(x) \leq 1\ \ \forall x$

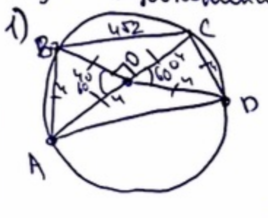
Т.о. $f(x) = f_1(x) + f_2(x) < 125 + 1 = 126\ \ \forall x>0$.

Ч.т.д.

**Ответ**: 126.

## Задача 3

Рассмотрим 2 случая расположения сторон для 4хугольника ABCD:

1) 


$AB = CD = 4$, $BC = 4\sqrt{2}$. Пусть O – центр окр-ти. Тогда $OA = OB = OC = OD = 4$ как радиусы. Тогда в $\triangle OBC$ заметим, что $OB^2 + OC^2 = 16 + 16 = (4\sqrt{2})^2 = BC^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BOC = 90°$ по теореме, обратной т. Пифагора.

В $\triangle AOB$ и $\triangle OCD$ все стороны равны $\Rightarrow$ они равносторонние $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AOB = \angle COD = 60°$. Тогда $\angle AOD = 360° - \angle AOD - \angle BOC - \angle COD =$

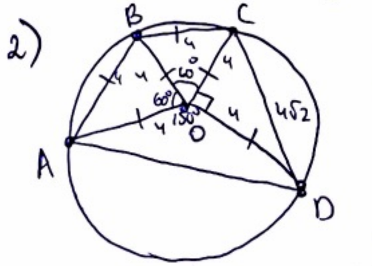
Чистовик

$= 360^\circ - 60^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 150^\circ \Rightarrow$ т. O лежит внутри ABCD. Тогда $S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{AOD}$

- $S_{AOB} = S_{COD} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4^2 = 4\sqrt{3}$
- $S_{BOC} = \frac{1}{2} \cdot 4^2 = 8$
- $S_{AOD} = \frac{1}{2} \cdot 4^2 \cdot \sin 150^\circ = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$

$S_{ABCD} = 4\sqrt{3} \cdot 2 + 8 + 4 = 12 + 8\sqrt{3}$

2)




$AB = BC = 4$, $CD = 4\sqrt{2}$

Пусть O – центр окр-ти. Тогда $AO = BO = CO = DO = 4$ как радиусы. $CO^2 + DO^2 = 16 \cdot 2 = (4\sqrt{2})^2 = CD^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle COD = 90^\circ$ из теоремы, обратной т. Пифагора.

В $\triangle AOB$ и $\triangle COB$ все стороны равны $\Rightarrow \angle AOB = \angle BOC = 60^\circ$ как углы в равносторонних треугольниках. Тогда $\angle AOD = 360^\circ - \angle AOB - \angle BOC - \angle COD = 360^\circ - 60^\circ \cdot 2 - 90^\circ = 150^\circ \Rightarrow$ т. O. лежит внутри ABCD.

Тогда $S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{AOD}$

- $S_{AOB} = S_{BOC} = 4^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$
- $S_{COD} = 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 8$
- $S_{AOD} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 150^\circ = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$

$S_{ABCD} = 4\sqrt{3} \cdot 2 + 8 + 4 = 12 + 8\sqrt{3}$

Ответ: $12 + 8\sqrt{3}$.



06-03-58-97
(161.2)



Чистовик

Задача 5

$f_1(x) = (x + a_1)(x^2 + b_1 x + 12) = x^3 + (a_1 + b_1)x^2 + (a_1 b_1 + 12)x + 12a_1$

$f_2(x) = (x + a_2)(x^2 + b_2 x + 15) = x^3 + (a_2 + b_2)x^2 + (a_2 b_2 + 15)x + 15a_2$

$f_3(x) = (x + a_3)(x^2 + b_3 x + 20) = x^3 + (a_3 + b_3)x^2 + (a_3 b_3 + 20)x + 20a_3$

Т.о. $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_3(x)$ – многочлены 3 степени, ~~а т.к. каждая пара многочленов совпадает на всех точках => многочлены тождественно равны~~ каждая пара которых совпадает во всех точках

Лемма

Если многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ степени n совпадают хотя бы в $(n+1)$ различ. точках, то они тождественно равны ( $P(x) = Q(x)$)

Док-во: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

$Q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$

$R(x) = P(x) - Q(x) \Rightarrow R(x) = (a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_0 - b_0)$

Т.о. $R(x)$ многочлен степени не более n $\Rightarrow$ из теоремы Безу имеет не более n корней (если он не равен нулю). Но у нас есть $(n+1)$ точка, для которой $P(x)$ и $Q(x)$ совпадают, т.е. сущ. $(n+1)$ разл. корень у $R(x) = P(x) - Q(x) \Rightarrow R(x)$ – тождеств. ноль, т.е. $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$ как коэф. перед степенями $x \Rightarrow P(x) = Q(x)$. ЧТД

Тогда т.к. сущ. бесконечно много $x$: $f_1(x) = f_2(x) = f_3(x)$, то $f_1(x) = f_2(x)$, $f_2(x) = f_3(x) \Rightarrow f_1(x) = f_2(x) = f_3(x)$, т.е. все 3 мн-на тождеств. равны $\Rightarrow$ равны и их коэф. при степенях x.

Тогда составим и решим сис-тему:

Чистовик

$$\begin{cases} a_1+b_1=a_2+b_2 \\ a_1+b_1=a_3+b_3 \\ a_1b_1+12=a_2b_2+15 \\ a_1b_1+12=a_3b_3+20 \\ 12a_1=15a_2 \\ 12a_1=20a_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1+b_1=a_2+b_2 \\ a_1+b_1=a_3+b_3 \\ a_1b_1=a_2b_2+3 \\ a_1b_1=a_3b_3+8 \\ a_2=\frac{4}{5}a_1 \\ a_3=\frac{3}{5}a_1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1+b_1=\frac{4}{5}a_1+b_2 \\ a_1+b_1=\frac{3}{5}a_1+b_3 \\ a_1b_1=\frac{4}{5}a_1b_2+3 \\ a_1b_1=\frac{3}{5}a_1b_3+8 \\ a_2=\frac{4}{5}a_1 \\ a_3=\frac{3}{5}a_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_2=b_1+\frac{1}{5}a_1 \\ b_3=b_1+\frac{2}{5}a_1 \\ a_1b_1=\frac{4}{5}a_1(b_1+\frac{1}{5}a_1)+3 \\ a_1b_1=\frac{3}{5}a_1(b_1+\frac{2}{5}a_1)+8 \\ a_2=\frac{4}{5}a_1 \\ a_3=\frac{3}{5}a_1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{5}a_1b_1=\frac{4}{25}a_1^2+3 \quad |\times 2 \\ \frac{2}{5}a_1b_1=\frac{6}{25}a_1^2+8 \\ b_2=b_1+\frac{1}{5}a_1 \\ b_3=b_1+\frac{2}{5}a_1 \\ a_2=\frac{4}{5}a_1 \\ a_3=\frac{3}{5}a_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{5}a_1b_1=\frac{8}{25}a_1^2+6 \\ \frac{2}{5}a_1b_1=\frac{6}{25}a_1^2+8 \\ b_2=b_1+\frac{1}{5}a_1 \\ b_3=b_1+\frac{2}{5}a_1 \\ a_2=\frac{4}{5}a_1 \\ a_3=\frac{3}{5}a_1 \end{cases} \Leftrightarrow$$





Чистовик

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{8}{25}a_1^2+6=\frac{6}{25}a_1^2+8 \quad (1) \\ \frac{1}{5}a_1b_1=\frac{4}{25}a_1^2+3 \quad (2) \\ b_2=b_1+\frac{1}{5}a_1 \\ b_3=b_1+\frac{2}{5}a_1 \\ a_2=\frac{4}{5}a_1 \\ a_3=\frac{3}{5}a_1 \end{cases}$$

(1) $\frac{8}{25}a_1^2+6=\frac{6}{25}a_1^2+8 \Rightarrow \frac{2}{25}a_1^2=2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{25}a_1^2=1 \Rightarrow a_1^2=25 \Rightarrow a_1=5$, т.к. по усл-ю $a_1>0$

Тогда:

(2) $\frac{1}{5}a_1b_1=\frac{4}{25}a_1^2+3 \Rightarrow \frac{1}{5}\cdot 5b_1=\frac{4}{25}\cdot 25+3 \Rightarrow b_1=7$

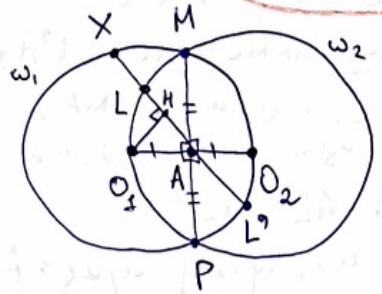
~~Из исх. сис-мы:~~

А т.к. $a_1+b_1=a_2+b_2=a_3+b_3$ (см. начальную сис-му), то: $a_1+b_1+a_2+b_2+a_3+b_3=3(a_1+b_1)=3\cdot(5+7)=$

$=3\cdot 12=36$

Ответ: 36.

Задача 6




1) Пусть $r=\frac{2-\sqrt{2}}{5}$, $O_1$ – одна поливалка, а $O_2$ – вторая, A – нора (тогда A – середина $O_1O_2$). $O_1$ – центр окр-ти $\omega_1$ с радиусом r, а $O_2$ – центр окр-ти $\omega_2$ с радиусом r.,

$\omega_1 \cap \omega_2 =$ т. M и $\omega_1 \cap \omega_2 =$ т. P $\Rightarrow O_1M=O_2M=O_1O_2=$ $=O_1P=O_2P=r$ как радиусы $\Rightarrow$ MA и AP – медианы в рав–

Чистовик

косторонних $\triangle MO_1O_2$ и $\triangle PO_1O_2 \Rightarrow$ и высоты $\Rightarrow$
$\Rightarrow MP \perp O_1O_2$ и $MA = PA = \frac{\sqrt{3}}{2}$ г.

2) Пусть мышь шла не по прямой и первый раз пересекла какую-то окр-ть в т. X. Введём величину V для степени вымоченности: она равна сумме пути по 1 окр-ти и удвоенного пути по пересечению окр-тей, т.е. сумме всего пути и пути по пересечению окр-тей

3) Тогда нужно найти наим. знач. V. ~~Заметим, что если мышь шла не по прямой, то длина её пути: X→A не кратчайшая~~. Пусть мышь зашла в пересечение в т. L. Тогда длина $X \to L$ её траектории будет наим., если это отрезок XL, и длина $L \to A$ её траектории будет наим, если это отр LA $\Rightarrow$ т.к. $V = (X \to L) + 2(L \to A)$, то наим. $V = XL + 2LA$, т.е. когда мышь идёт по прямой

4) Пусть (БОО) $X \in \omega_1$. Тогда пусть $XA \cap \omega_1 = $ т. $L'$. В силу симметрии $LA = L'A$, (отразим сначала $L'A$ отн. $AO_2$, а затем отн. MA, получим совпадающие отрезки LA и $L'A$). Тогда наим. $V = XL + 2LA = XA + LA = XA + AL' = XL'$

5) Т.о. наим. V явл. хордой $\omega_1$, проход. через т. A. Найдём кратчайшую хорду: докажем,





06-03-58-97
(161.2)

Чистовик

Задача 4

$\cos^3(\pi x) + \cos^3(2\pi x) - \cos^3(4\pi x) =$
$= (\cos(\pi x) + \cos(2\pi x) - \cos(4\pi x))^3$

$\cos^3(\pi x) + \cos^3(2\pi x) = (\cos(\pi x) + \cos(2\pi x) - \cos(4\pi x))^3 + \cos^3(4\pi x)$.

Пусть $\cos(\pi x) = a$, $\cos(2\pi x) = b$, $\cos(4\pi x) = c$. Тогда:

$a^3 + b^3 = (a+b-c)^3 + c^3$

$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b-c+c)((a+b-c)^2 - (a+b-c)c + c^2)$

$(a+b)(a^2-ab+b^2) = (a+b)(a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ac-ac-bc+c^2+c^2)$

$(a+b)(a^2-ab+b^2) = (a+b)(a^2+b^2+3c^2+2ab-3bc-3ac)$

$(a+b)((a^2-ab+b^2)-(a^2+b^2+3c^2+2ab-3bc-3ac)) = 0$

$(a+b)(-3ab-3c^2+3bc+3ac) = 0 \quad |\times(-\frac{1}{3})$

$(a+b)(c^2+ab-bc-ac) = 0$

$(a+b)(c(c-b)+a(b-c)) = 0$

$(a+b)(c-a)(c-b) = 0$

~~$(a+b)(a-c)$ ... $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-b \\ a=c \\ a=b \end{array}\right.$~~

~~Вернёмся к ур-ю:~~

$(a+b)(a-c)(b-c) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-b \\ a=c \\ b=c \end{array}\right.$

Вернёмся к обозначениям:

$\left[\begin{array}{l} \cos(\pi x) = -\cos(2\pi x) \\ \cos(\pi x) = \cos(4\pi x) \\ \cos(2\pi x) = \cos(4\pi x) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \pi x = \pi - 2\pi x + 2\pi k \\ \pi x = \pi + 2\pi x + 2\pi k \\ \pi x = 4\pi x + 2\pi k \\ \pi x = -4\pi x + 2\pi k \\ 2\pi x = 4\pi x + 2\pi k \\ 2\pi x = -4\pi x + 2\pi k \\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3\pi x = \pi + 2\pi k \\ -\pi x = \pi + 2\pi k \\ -3\pi x = 2\pi k \\ 5\pi x = 2\pi k \\ -2\pi x = 2\pi k \\ 6\pi x = 2\pi k \\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

Чистовик

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 3x=2k+1 \\ x=-2k-1 \\ 3x=-2k \\ 5x=2k \\ x=-k \\ 3x=k \end{array}\right. \\ k\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Т.к. $x\in[0,3;1,6] \Rightarrow 3x\in[0,9;4,8] \Rightarrow$

$\Rightarrow 5x\in[1,5;8]$

Т.о. подходят: $3x=1, 3x=2, 3x=3, 3x=4$

$x=1, 5x=2, 5x=4; 5x=6; 5x=8$

Ответ: $\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{2}{5}; \frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \frac{8}{5}$.

Черновик

что это $MP$. Пусть нет, тогда проведём хорду $XL'$, которая короче $MP$. $MP = 2MA$, пусть $O_1H \perp XL' \Rightarrow$

$\Rightarrow H$ - середина $XL'$ по св-ву перпендик. из центра окр-ти на хорду $\Rightarrow XL' = 2XH$. В $\triangle O_1HA$:

$\angle O_1HA = 90^\circ \Rightarrow O_1A > O_1H$ как гипотенуза.

$MP = 2MA = 2 \cdot \sqrt{O_1M^2 - O_1A^2} = 2 \cdot \sqrt{r^2 - O_1A^2}$

$XL' = 2XH = 2 \cdot \sqrt{O_1X^2 - O_1H^2} = 2 \cdot \sqrt{r^2 - O_1H^2}$

$O_1A > O_1H \Rightarrow 2 \cdot \sqrt{r^2 - O_1A^2} < 2 \cdot \sqrt{r^2 - O_1H^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow MP < XL'$. Противоречие с предположением $\Rightarrow$

$\Rightarrow MP$ - кратчайшая хорда.

б) Т.о. мышь пройдёт по пути $MA$:

$MA = \frac{\sqrt{3}}{2} r = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{5} = \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{10}$.

Ответ: $\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{10}$.

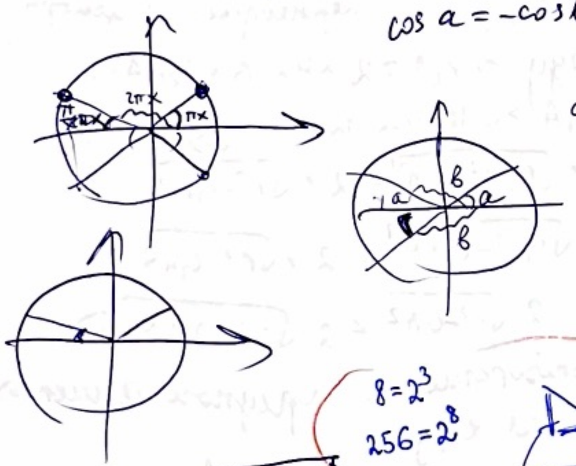
## Черновик

$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

$\cos a = -\cos b$

$a = \pi - b$

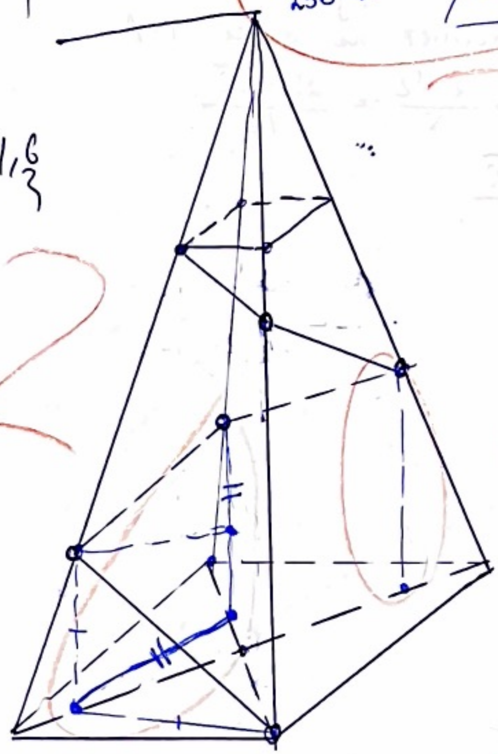
$a =$



$8=2^3$

$256=2^8$

$x^{1,6}$







## Черновик

(5) $f_1(x) = x^3 + (a_1+b_1)x^2 + (a_1b_1+12)x + 12a_1$

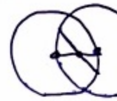
$f_2(x) = x^3 + (a_2+b_2)x^2 + (a_2b_2+15)x + 15a_2$

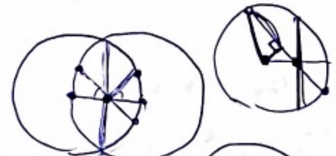
$f_3(x) = x^3 + (a_3+b_3)x^2 + (a_3b_3+20)x + 20a_3$

$$\begin{cases} a_1+b_1 = a_2+b_2 = a_3+b_3 \\ a_1b_1+12 = a_2b_2+15 = a_3b_3+20 \\ 12a_1 = 15a_2 = 20a_3 \end{cases}$$

$a_3 = \frac{12}{20}a_1 = \frac{3}{5}a_1$

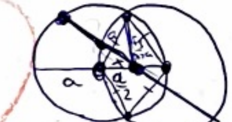
$a_2 = \frac{12}{15}a_1 = \frac{4}{5}a_1$





$\frac{3}{5}a_1^2+12 = \frac{4}{5}$

$a_1b_1+12 = \frac{3}{5}a_1b_3+20 = \frac{4}{5}a_1b_2+15$



1) $\frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot 2 = \sqrt{3}a$

2) $a+a = 2a$

$L+l$

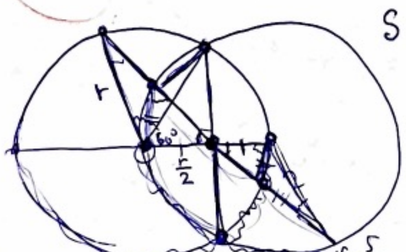
$\alpha \in (60^\circ; 180^\circ)$

$x \in$

$2x+(S-x) = S+x \Rightarrow$ наим. $x=0$

$S = r^2+\frac{r^2}{4} - r^2\cdot\cos\alpha =$

$= r^2\left(\frac{5}{4}-\cos\alpha\right)$



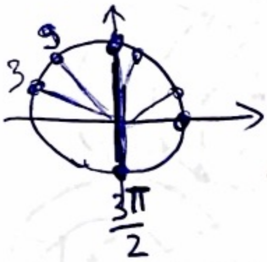
знаг $>$ $r + r^2\left(\frac{5}{4}-\cos\alpha\right)$

# Черновик

② $\sin 3\alpha = \sin(2\alpha+\alpha) = \sin 2\alpha\cdot\cos\alpha + \sin\alpha\cdot\cos 2\alpha =$

$= 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha + \sin\alpha\cdot(2\cos^2\alpha - 1) =$

$= 4\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha - \sin\alpha = \sin\alpha\,(4\cos^2\alpha - 1)$




125

$5^{3-\frac{1}{x}} - \sin 3^x < a \quad \forall x>0$

(x) $5^{3-\frac{1}{x}} - \sin 3^x$

При $\uparrow x$:

$5^{3-\frac{1}{x}} \uparrow$

$\sin 3^x$ : если был

$\forall a<126\ \exists x_1>0:$

$5^{3-\frac{1}{x_1}} - \sin 3^{x_1} \geq a$

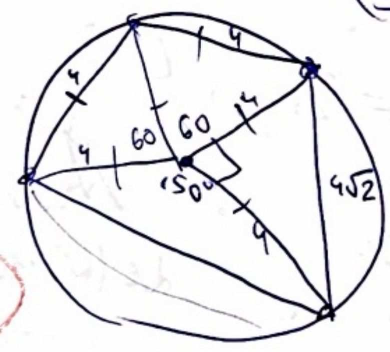
$\sin 3^x = -1$

$3^x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$

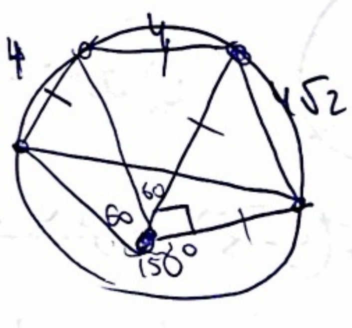
$x = \log_3\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$

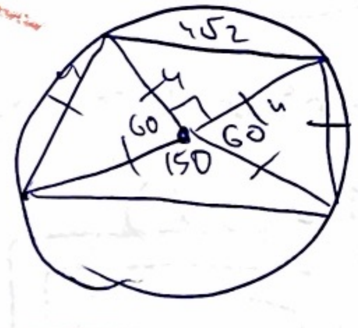
$a-1<125$

③

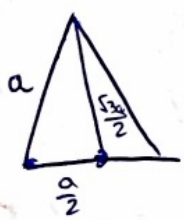



$360-120-90=240-90=150$




$\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$




$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$