



79-63-20-30
(162.3)



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11

Место проведения Санкт-Петербург
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников "Ломоносов"
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Вольнова Мария Андреевна

фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Выход: 13:15

Вход: 13:17 ЕВ

+1 балл ЕВ

Дата

«13» апреля 2025 года

Подпись участника

Р

July

Чертовик

(Самодельный лист)

79-63-20-30
(162.3)

$$(2x+3) + (3x+2) + (x-1) = 2$$

$$-\frac{8}{3} + 3x - 1 = 4 + 2 \quad -\frac{4}{3} - 1$$

$$\left(\frac{11}{3}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \quad a^2 = 4 + 2\sqrt{4} + 4 - \sqrt{4} = 2\sqrt{25}$$

$$-\frac{3}{2} \cdot 2 - 1 = -\frac{2}{3}$$

$$-\frac{2}{3}$$



2

$$5^{3-\frac{1}{x}} \geq a + \sin 3^x$$

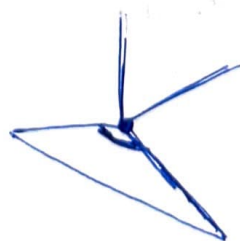
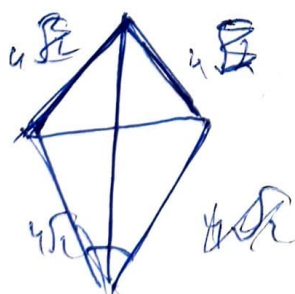
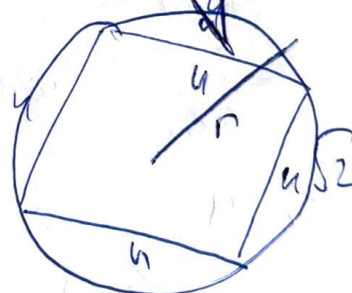
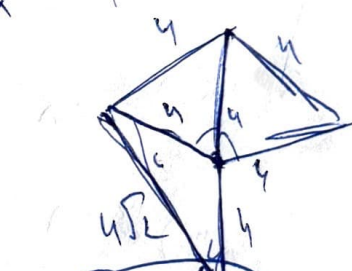
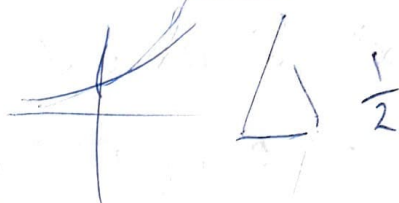
$$125 \geq 5^{3-\frac{1}{x}}$$

$$\left(\frac{125}{55}\right) \geq a + \sin 3^x$$

$$\geq 125 + \sin 3^x$$

$$\frac{125}{55} \geq 126 + \sin 3^x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{125}{55} + \sin 3^x \right)$$



$$\left(\cos(\pi x) + \cos(2\pi x) - \cos(4\pi x) \right) \left(\cos(\pi x) + \cos(2\pi x) - \cos(4\pi x) \right) \left(\cos(\pi x) + \cos(2\pi x) - \cos(4\pi x) \right)$$

Кернели

$$2\cos^2(\pi x) - 1$$

$$-2\cos^2(2\pi x) + 1$$

$$2\cos^2(\pi x)$$

$$\cos(\pi x + \pi x) =$$

$$x^3 + x^2(b_3 + a_3) + \omega a_3 + (20 + ab_3)x$$

$$x^3 + b_1 x^2 + 12x + a_1 x^2 + a_1 b_1 x + 12a_1$$

$$x^3 + (b_1 + a_1)x^2 + x(12 + a_1 b_1) + 12a_1$$

$$x^3 + (a_2 + b_2)x^2 + x(15 + a_2 b_2) + 15a_2$$

$$x^2 + (a_3 + b_3)x^2 + x(20 + a_3 b_3) + 20a_3$$

$$12 + 5b_1 = 15 + 4b_2$$

$$b_1 + 5 = b_2 + 4$$

$$12 + 5b_1 = 15 + 4(b_1 + 1)$$

$$b_1 = 12 - 12$$

$$b_1 = 4$$

$$b_2 = 8$$

$$12$$

$$9$$

$$9 \cdot 3$$

$$27$$

$$54$$

$$x + 5b_1 = 15 + 4b_2$$

$$27$$

$$24$$

$$35$$

$$32 - 4$$

$$x + 5b_1 = 15 + 4b_2$$

$$3 + 4b_2 = 5b_1$$

$$3 + 4 \cdot 5 = 5 \cdot 5$$

79-63-20-30

(162.3)

Решение

$$2\cos^2(\pi x)\cos(2\pi x) - \cos^2(\pi x)\cos(4\pi x) + \cos^2(2\pi x)\cos(\pi x) -$$

$$- 3\cos(4\pi x)/\cos$$

~~$$x^2 - b_1x + 12 = 0$$~~

~~$$x^2 - b_2x + 15 = 0$$~~

$$x^2 - b_2x + 15 = 0$$

$$x^2 - b_2x + 15 = 0$$

$$(x - a_1)(x - a_2) = x^2 + b_2x + 15$$

$$a_1a_2 = 15$$

$$-(a_1 + a_2) = b_2$$

-

$$\frac{2S = b_1 + b_2 + b_3}{2}$$

$$a_1a_2 = 15$$

$$a_1a_2 = 20$$

$$a_3a_2 = 12$$

$$a_2 = \frac{12}{a_3}$$

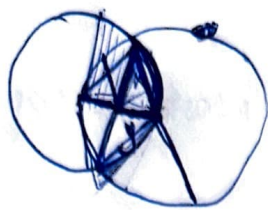
$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_2 = 3 \end{cases}$$

$$a_1 \cdot \frac{12}{a_3} = 20 \rightarrow a_1 = \frac{20}{12} a_3$$

$$\frac{20}{12} a_3^2 = \frac{3}{15} \cdot 12$$

$$(a_3 = 3)$$

2-5 Чертовик



2y

$$\sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{2}}{5}\right)^2 - \left(\frac{2-\sqrt{2}}{10}\right)^2}$$

$$\left(\frac{2(2-\sqrt{2}) + \sqrt{2}-2}{10}\right) \left(\frac{2(2-\sqrt{2}) + (2-\sqrt{2})}{10}\right)$$



$$3 \left(\frac{2-\sqrt{2}}{10}\right) \left(\frac{2-\sqrt{2}}{10}\right)$$

2y

$$4y^2$$

$$3y^2$$

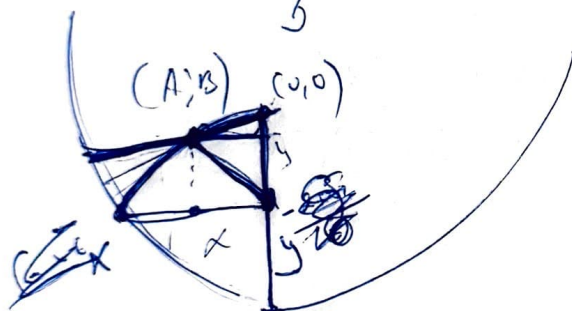
$$\frac{\sqrt{6}}{5}$$

$$4-2 \frac{8}{100}$$

$$\frac{\sqrt{6}}{10} - \frac{2-\sqrt{2}}{10}$$

$$\frac{\sqrt{6}-2+\sqrt{2}}{10}$$

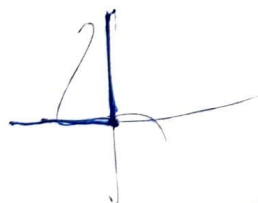
$$\frac{4-2\sqrt{2}}{5} +$$



$$\frac{A^2}{x^2} + \frac{B^2}{y^2} = 1$$

$$2y = \sqrt{A^2 + B^2} + 2\sqrt{A^2 + (y-B)^2}$$

$$A^2 y^2 + B^2 x^2 = x^2 y^2$$



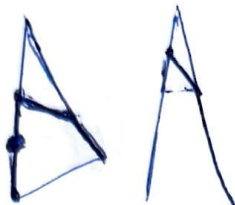
$$\sqrt{x^2 - \frac{B^2}{y^2} + B^2}$$

$$\frac{x^2 y^2 (B-B^2)}{y^2 (y^2 - B^2)}$$

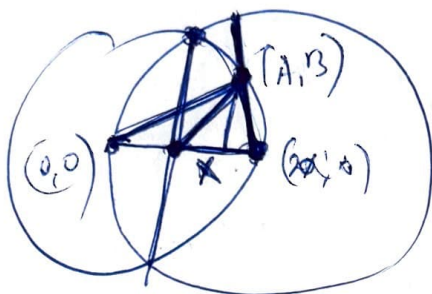
$$3(y^2 - B^2)$$

$$2y - \sqrt{3y^2 - \frac{B^2}{y^2} + B^2} + 2\sqrt{3(y^2 - B^2) + (y - B)^2}$$

$$2y = \sqrt{4y^2 - B^2 \left(\frac{1}{y^2} - 1 \right)} + \dots (y - R)$$



$$\begin{aligned} & 3y^2 - 3B^2 \\ & - 6B + \cancel{y^2} - 2y + 2B \\ & 3y^2 - 2B^2 + y^2 - 2y + 2B \end{aligned}$$



$$\underline{A^2 + B^2 = 4x^2}$$

$$\frac{2x - \sqrt{(A-2x)^2 + B^2}}{2x - \sqrt{(2x-A)^2 + B^2}} + 2 \sqrt{(A-x)^2 + B^2}$$

$$\frac{2x^2 - 4Ax + A^2 + B^2}{A^2 - 2xA + x^2 + B^2}$$

$$f(A) = \cancel{2x^2} - \sqrt{4x^2 - 4Ax} + 2\sqrt{5x^2 - 2xA}$$

$$b^2 - 4ac = \frac{1}{2}$$

$$\frac{-4x}{2\sqrt{6x^2-4Ax}} + \frac{-6x}{2\sqrt{5x^2-2xA}}$$

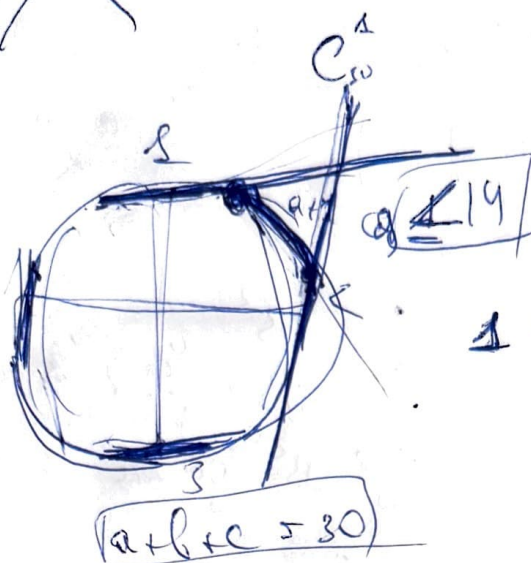
$$= 4x \sqrt{5x^2 - 2xA} = \sqrt{6x^2 - 4Ax}$$

$$\cancel{5x^2} - 2xA = \cancel{6x^2} - 4A$$

$$2A = x^2$$

$$A = \frac{x^2}{2}$$

Курновик



$$1+1$$

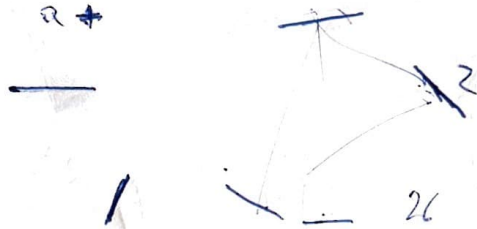
$$(3', 9, 10)$$

$$(8, 8, 11)$$

$$(8, 7, 12)$$

$$a +$$

$$25 (8,$$



$$(1, 10, 10)$$

$$(1,$$

$$(2,$$

$$(1, 13, 13)$$

$$(2, 13, 12)$$

$$(2, 12, 12)$$

$$(3, 12, 12)$$

$$(3, 11, 13)$$

$$(4, 11, 12)$$

$$(4, 10, 13)$$

$$(5, 11, 11)$$

$$(5, 10, 12)$$

$$(5, 9, 13)$$

$$(5,$$

$$(6, 10, 11)$$

$$(6, 9, 12)$$

$$(6, 8, 13)$$

$$(4, 9, 11)$$

$$(4, 8, 12)$$

$$(4, 7, 13)$$

$$(23)$$

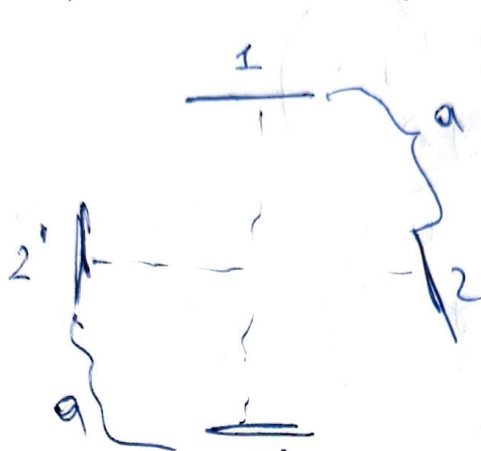
$$(24)$$

$$2 =$$

$$* \dots$$

числовым задача №3

выберем 1 сторону (и 30), стороны упорядочены!



Заполн-во ребер
между 1 и 2
выбраной нами
сторонами.

Заметим, что $a < 14$.

Также заметим, что
при задании 3 стороны
порядок только по a

иначе a не получится.
↑
в котором
будет 30-я единица

стороны, т.е. не все брать стороны

~~с 2 по 1'~~ с 2 по 1' и с 2' по 1,

т.е. a не получится. 1' - диаметрально
противоположно

Потом переберем все тройки 2' - диаметрально
противоположно
(a, b, c), где b, c - все возможные
стороны между {2 и 3} 2.

c - все возможные
стороны между 3 и 1. $a+b+c \leq 24$.

a		
1	(1, 13, 13)	1
2	(2, 13, 12)	1
3	(3, 12, 12) (3, 11, 13)	2
4	(4, 11, 12) (4, 10, 13)	2
5	(5, 11, 11) (5, 10, 12) (5, 10, 13)	3
6	(6, 10, 11) (6, 9, 12) (6, 8, 13)	3
7	(7, 10, 10) (7, 9, 11) (7, 8, 12) (7, 7, 13)	4
8	(8, 9, 10) (8, 8, 11) (8, 7, 12) (8, 6, 13)	2
9	(9, 8, 9) (9, 7, 10) (9, 6, 11) (9, 5, 12) (9, 4, 13)	
10	(10, 8, 8) (10, 7, 9) (10, 6, 10) (10, 5, 11) (10, 4, 12) (10, 3, 13)	
11	(11, 7, 8) (11, 6, 9) (11, 5, 10) (11, 4, 11) (11, 3, 12) (11, 2, 13)	
12	(12, 6, 8) (12, 5, 9) (12, 4, 10) (12, 3, 11) (12, 2, 12) (12, 1, 13)	
13	(13, 5, 8) (13, 4, 9) (13, 3, 10) (13, 2, 11) (13, 1, 12) (13, 0, 13)	

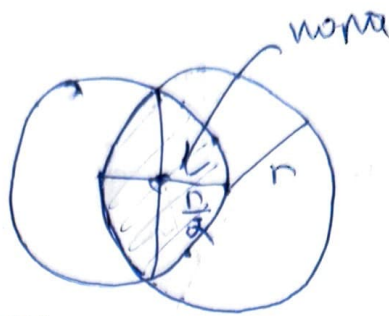
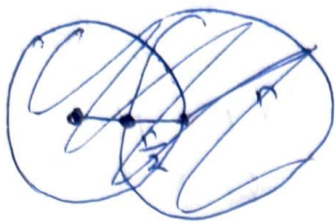
Убираем лишнее.

$$\leq 1+1+2+2+3+3+4+2$$

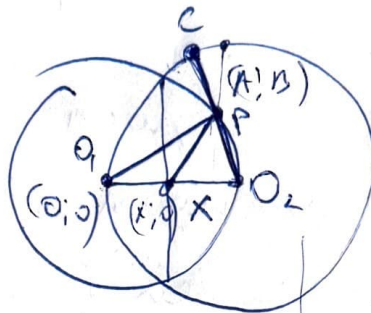
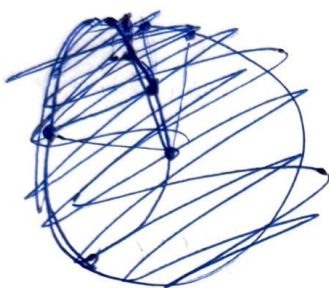
Ответ! 18.

числовым

Задача 1/6.



1) заметим, что если мышь вырвет в зону 2-го порта, то ей уже нужно начекивать
Сматривать к порту, иначе $\forall$ другой путь
будет $\leq$ не выгорим.



Эта точка в (.) с коорд. (A, B),

где $\left(\int \frac{r}{2} = x = \text{const} \right)$ самый короткий
путь в (A, B) это с точки C, где вращ
 CO_2 , иначе с $\forall$ др. точкой этот путь длиннее

тогда тогда!

$$\begin{cases} A^2 + B^2 = 4x^2 \\ 2x - \sqrt{(2x-A)^2 + B^2} \end{cases}$$

длина т.и. вырвет
в зону 2-го порта

$$+ 2 \sqrt{(A-x)^2 + B^2}$$

$$2x - \frac{CP}{\sqrt{4x^2}} + 2 \sqrt{\frac{A^2 + B^2 - 2Ax + x^2}{4x^2}}$$

Продолжение
уравнения

$$f(A) = 2x - \sqrt{8x^2 - 4xA} + 2 \sqrt{5x^2 - 2xA}$$

$$\text{Если } f'(A) = \frac{4x}{2\sqrt{8x^2 - 4xA}} + \frac{-4x}{2\sqrt{5x^2 - 2xA}} = 0$$

Мисовин

Зорана В.Е.

$$\sqrt{4x^2+12x+9} + \sqrt{9x^2+12x+4} - \left(\sqrt{-(x+1)}\right)^2 =$$

$$= \sqrt{4+\sqrt{24}} - \sqrt{4-\sqrt{24}}$$

1) разберемся с правой частью.

$$\begin{array}{l} -(x+1) \geq 0 \\ x \leq -1 \end{array}$$

$$a = \sqrt{4+\sqrt{24}} - \sqrt{4-\sqrt{24}}$$

$$a^2 = 4 + \sqrt{24} + 4 - \sqrt{24} - 2\sqrt{(4+\sqrt{24})(4-\sqrt{24})} =$$

$$= 14 - 2\sqrt{(16-24)} = 4 \rightarrow a^2 = 4$$

$$a = 2 \quad (a \neq -2, \text{ т.к. } \sqrt{4+\sqrt{24}} - \sqrt{4-\sqrt{24}} > 0)$$

$$2) \text{ заметим, что } \sqrt{4x^2+12x+9} = \sqrt{(2x+3)^2} = |2x+3|$$

$$\sqrt{9x^2+12x+4} = \sqrt{(3x+2)^2} = |3x+2|$$

$$- \left(\sqrt{-(x+1)}\right)^2 = -(x+1)$$

Получим:

$$|2x+3| + |3x+2| - (x+1) = 2 \quad (x < -1)$$

$$|2x+3| + |3x+2| - (x+1) = 2$$

$$\exists x \in \left[-\frac{3}{2}; -1\right]$$

$$\text{и } x < -\frac{3}{2}$$

$$2x+3-3x-2-x-1=2$$

$$-2x=2$$

$$x=-1$$

$$-2x-3-3x-2-x-1=2$$

$$-6x=8$$

$$x=-\frac{8}{6}=-\frac{4}{3}$$

Ответ: ~~$x \in \left[-\frac{4}{3}; -1\right]$~~

$$x \in \left\{-\frac{4}{3}; -1\right\}.$$

Исходным

$$5^{-3-\frac{1}{x}} \geq a + \sin 3^x$$

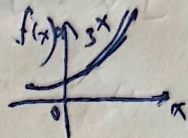
Задача №2.

$$\frac{125}{\sqrt{5}} \geq a + \sin 3^x$$

замечим, что $\sin 3^x \in [-1; 1]$ и при $x \rightarrow +\infty$,
всегда будут найдены x в промежутке $[-1; 1]$ т.ч. $f(x) = 3^x$ монотонно ↑

Тогда

$$\frac{125}{\sqrt{5}} - \sin 3^x < 126, \text{ т.ч.}$$



~~поэтому~~ $x \rightarrow +\infty$ и тогда мы
точно найдем такой $\sin 3^x = -1$,

~~поэтому~~ при этом $\frac{125}{\sqrt{5}} \rightarrow 125$, т.ч. $\sqrt{5} \rightarrow 1$
справа по теореме не достигнет ее,
поэтому $\frac{125}{\sqrt{5}} < 125$ и $-\sin 3^x = -1$

Вспомогательная

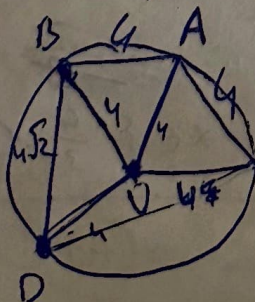
$$\frac{125}{\sqrt{5}} - \sin 3^x < 126$$

Тогда без $a = 126$ у нас пер-во не будет
иметь решений на $x \in (0; +\infty)$.

Задача №3.

Ответ: 125.

1) В треугольнике ABC - правильный, A - центр опис. круга. Тогда (не учитывая



объ.) $BD = 4\sqrt{2}$

замечим, что $\triangle BOA = \triangle OAC$ и
они равносторонние
 $\triangle BOA$ - и, тогда $\angle BOC = 360^\circ -$
 $-\angle BOA - \angle AOC = 120^\circ$

КисловОтвет: $3+4+5+2+8+9=36$

2

36.

Задание №6. Пропущение

4 числител:

$$4x \left(-\sqrt{8x^2 - 4xA} + \sqrt{5x^2 - 2xA} \right) = 0$$

$$5x^2 - 2xA = 8x^2 - 4xA$$

$$2xA = 3x^2$$

$$A = \frac{3}{2}x$$

$$f\left(\frac{3}{2}x\right) = 2x - \sqrt{8x^2 - 4x \cdot \frac{3}{2}x} + 2\sqrt{5x^2 - 2x \cdot \frac{3}{2}x} =$$

$$= 2x - \sqrt{8x^2 - 2x^2} + 2\sqrt{5x^2 - 3x^2} =$$

$$= 2x - x\sqrt{6} + 2x\sqrt{3} =$$

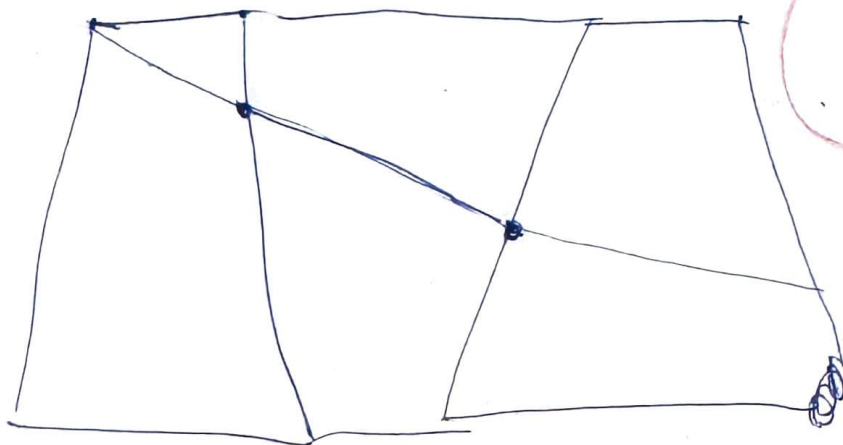
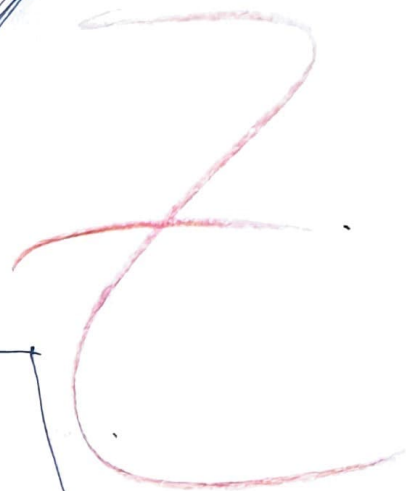
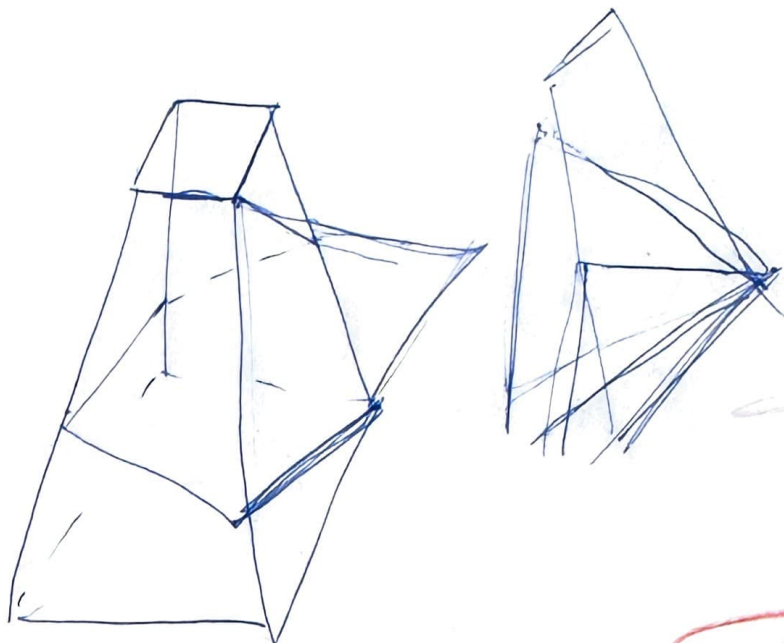
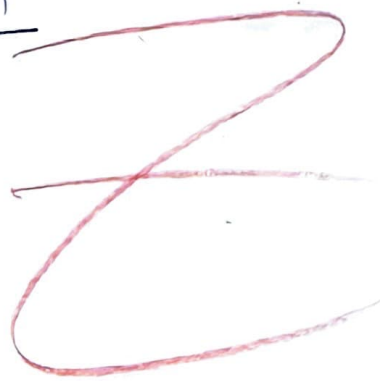
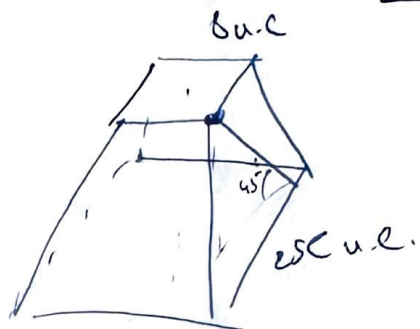
$$= \frac{2-\sqrt{2}}{5} \cdot 2 - \frac{2-\sqrt{2}}{10} \sqrt{6} + 2 \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{10} \sqrt{3} =$$

$$= \frac{2-\sqrt{2}}{10} (2 - \sqrt{6} + 2\sqrt{3}) \text{ Ответ}$$

79-63-20-30

(162.3)

~~Чернов~~ Чернов Чернов



Шифр	Сума	1	2	3	4	5	6	7	8
76-63-20-30	76	<u>+</u>	+	+	0	+	+	0	+