



99-05-76-59
(159.2)



Вышел 13.27 - 13:31

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 9

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Гончарук Мирославы Евгеньевич
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«13» апреля 2025 года

Подпись участника

М. Гонч

99-05-76-59

(159,2)

Чистовик

Задача 2

$$x^3 - |x^2 - x - 2| = 12x - 13$$

$$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$$



При $x \in (-\infty; -1] \cup [2; \infty)$:

$$x^3 - x^2 + x + 2 = 12x - 13$$

$$x^3 - x^2 - 11x + 15 = 0$$

$x = 3$ (является решением уравнения)

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 - 11x + 15 & x-3 \\ -x^3 + 3x^2 & \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 11x + 15 \\ - 2x^2 + 6x \\ \hline \end{array}$$

$$-5x + 15$$

$$-5x + 15$$

$$0$$

$$(x-3)(x^2+2x-5)=0$$

$$x^2+2x-5=0 \quad \text{или} \quad x=3$$

$$D = 4 + 20 = 24$$

$$x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{6}}{2} = -1 \pm \sqrt{6}$$

$$-1 < -1 + \sqrt{6} < 2 \Rightarrow x = -1 + \sqrt{6} \text{ не подходит}$$

При $x \in (-1; 2)$:

$$x^3 + x^2 - x - 2 = 12x - 13$$

$$x^3 + x^2 - 13x + 11 = 0$$

$x = 1$ (является решением уравнения)

$$\begin{array}{r|l} x^3 + x^2 - 13x + 11 & x-1 \\ -x^3 + x^2 & \hline \end{array}$$

$$2x^2 - 13x + 11$$

$$- 2x^2 + 2x$$

$$-11x + 11$$

$$-11x + 11$$

$$0$$

$$(x-1)(x^2+2x-11)=0$$

$$x^2+2x-11=0 \quad \text{или} \quad x=1$$

$$D = 4 + 44 = 48$$

$$x = \frac{-2 \pm 4\sqrt{3}}{2} = -1 \pm 2\sqrt{3}$$

$$-1 - 2\sqrt{3} < -1 \Rightarrow x = -1 - 2\sqrt{3} \text{ не подходит}$$

$$-1 + 2\sqrt{3} > 2 \Rightarrow x = -1 + 2\sqrt{3} \text{ не подходит}$$

стр. 1

Чистовик

Ответ: $3; 1-\sqrt{6}; 1$

Задача 3.

Пусть a и b — стороны прямоугольника

$$S = P.$$

$$S = ab \quad P = 2a + 2b$$

$$ab = 2a + 2b$$

$$a(b-2) - 2b = 0$$

$$a(b-2) - 2(b-2) = 4$$

$$(a-2)(b-2) = 4$$

$$1) a-2 = -1 \quad b-2 = -4$$

$$a = 1 \quad b = -2$$

$$2) a-2 = -2 \quad b-2 = -2$$

$$a = 0 \quad b = 0$$

$$3) a-2 = 1 \quad b-2 = 4$$

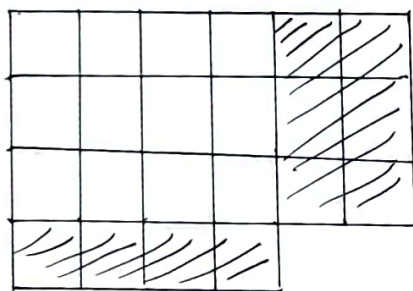
$$a = 3 \quad b = 6$$

$$4) a-2 = 2 \quad b-2 = 2$$

$$a = 4 \quad b = 4$$

Т.к. a и b по условию натуральные числа, тогда ~~возможны~~ ~~также подходят~~ только прямоугольники со сторонами $3; 6$ и $4; 4$.

Наименьшая площадь столешницы, накрытой всего одним столом будет когда прямоугольники будут максимально наложены друг на друга

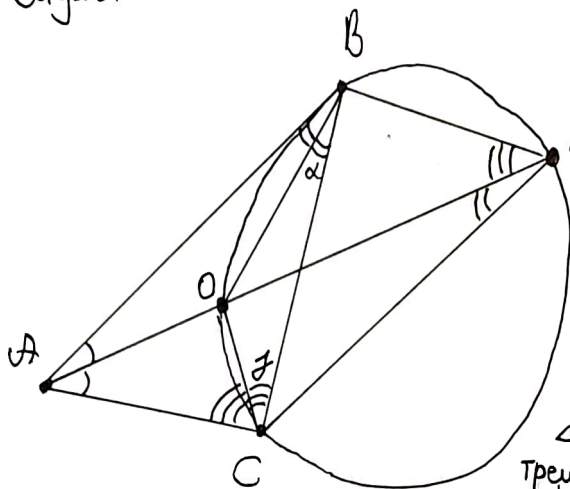


Эта площадь равна $2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = \underline{10}$

Ответ: 10.

ЧУСТОВИК

Задача 4



$60^\circ + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ$ — по сумме углов треуго.

Пусть $\angle ABC = 2\alpha$, $\angle ACB = 2\gamma$

$$60^\circ + 2\alpha + 2\gamma = 180^\circ$$

$$\alpha + \gamma = 60^\circ$$

$\angle ABO = \angle CBO = \alpha$, т.к. BO — бис.

$\angle ACO = \angle BCO = \gamma$, т.к. CO — бис.

$\angle BAO = \angle CAO = 30^\circ$, т.к. AO — бис.

$\angle BOM = 30 + \alpha$, как внешний угол треугольника ABO.

$$\angle BOM = \angle MCB = 30 + \alpha \text{ (опираются на одну дугу)}$$

$$\angle MCO = \angle BCO + \angle MCB = \gamma + 30 + \alpha = 90^\circ \Rightarrow OM \text{ — диаметр окружности}$$

$$OM = 2R$$

$$\angle OCB = \angle BMO = \gamma \text{ (опираются на одну дугу)}$$

$$\angle CBO = \angle OMC = \alpha \text{ (опираются на одну дугу)}$$

$$\angle BMC = \alpha + \gamma = 60^\circ$$

$$BC = 6$$

$$\frac{6}{\sin 60} = 2R = OM$$

$$\frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = OM \Rightarrow OM = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$$

Ответ: $4\sqrt{3}$

Задача 7.

Если $n = 44$, то всего решено $44 \cdot 20 = 880$, т.е. хотя бы 880 задач.

Но тогда не обязательно найдется такая задача, которую решили хотя бы 10 учащихся.

Значит $n \geq 45$. При $n = 45$ решено будет ≥ 900 задач. ~~Или при худшем случае каждая решена по 2~~

Тогда в худшем случае каждая задача решена 9 ~~раз~~ учащимися.

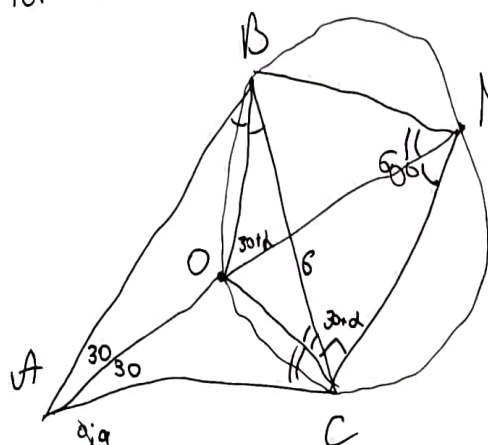
Но известно, что Петр решил больше задач, чем Вася $\Rightarrow$ Петр решил хотя бы 46 задач. А тогда всего решено 901 задачу.

Значит при $n = 45$ найдется задача, которую решили хотя бы 10 человек.

Ответ: 45.

стр. 3.

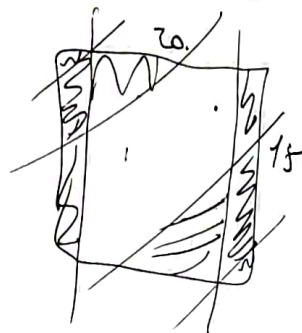
ЧЕРНОВЫК



$$\alpha = \beta = 60$$

$$OM = 2R$$

$$\frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2R}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2R \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{4R}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$$



$$a^2 + \left(\frac{9}{18} - 18x_1\right)^2$$

$$a^2 + \left(\frac{9}{18} - 18x_2\right)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (18x_2 - 18x_1)^2 = x_1^2 + 18x_1^2$$

$$\left(\frac{9}{18} - x_2\right)^2 + (a - 18x_2)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (18x_2 - 18x_1)^2 + x_1^2 + 18x_1^2$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ 18 \\ -18 \\ 144 \\ -18 \\ 324 \end{array}$$

$$\frac{a^2}{324} - \frac{ax_2}{9} + x_2^2 + a^2 + 324x_2 - 36ax_2 = 324(x_2 - x_1)^2 = 324x_1^2$$

$$x_1 = x_2 - x_1 \quad \underline{x_2 = 2x_1}$$

$$x_1 = x_1 - x_2$$

ЧЕРКОВЦК

200г. 10030г.

$\geq n. 30г.$

$n > B.$

45

$$100 \cdot 9 = 900. \quad | \quad 10$$

1г. 4530г.

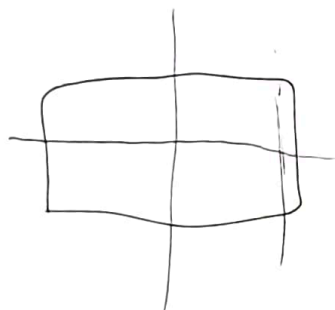
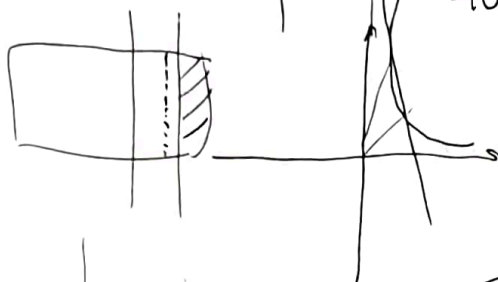
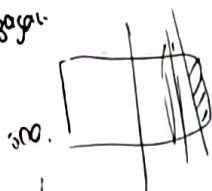
2г. 4530г.

44.30

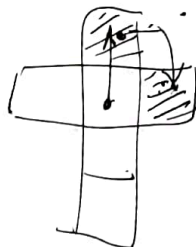
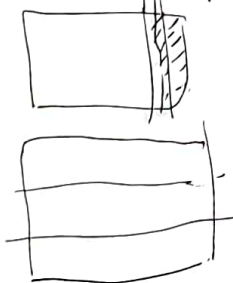
.44.30

860 30г.

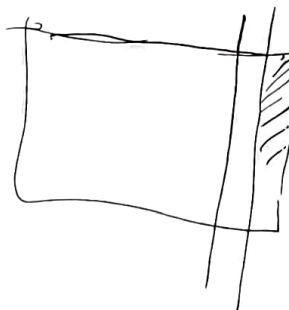
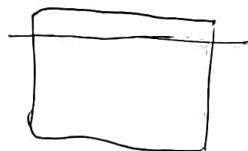
$$100 \cdot 9 = 900$$



4.4.3.7.-1



4.3



$$-18x + 0 = \frac{1}{x}$$

$$-18x^2 + 0x = 1$$

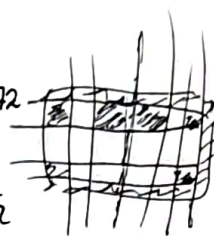
$$D = a^2 - 18 \cdot 4 = a^2 - 72$$

$$a^2 \geq 72$$

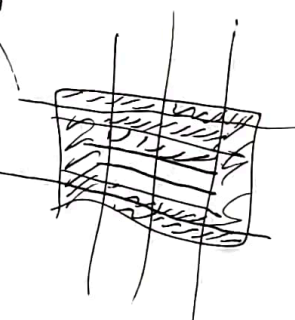
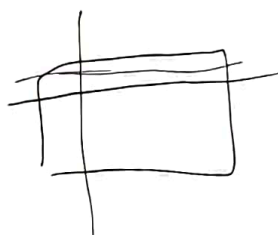
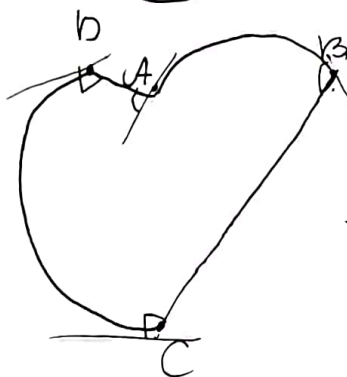
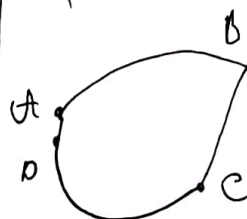
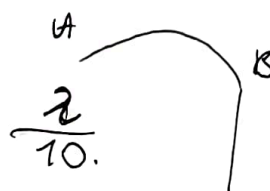
$$a > \sqrt{72} \quad a < \sqrt{72}$$

$$a > 6\sqrt{2} \quad a < 6\sqrt{2}$$

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 72}}{-36} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 72}}{-36}$$

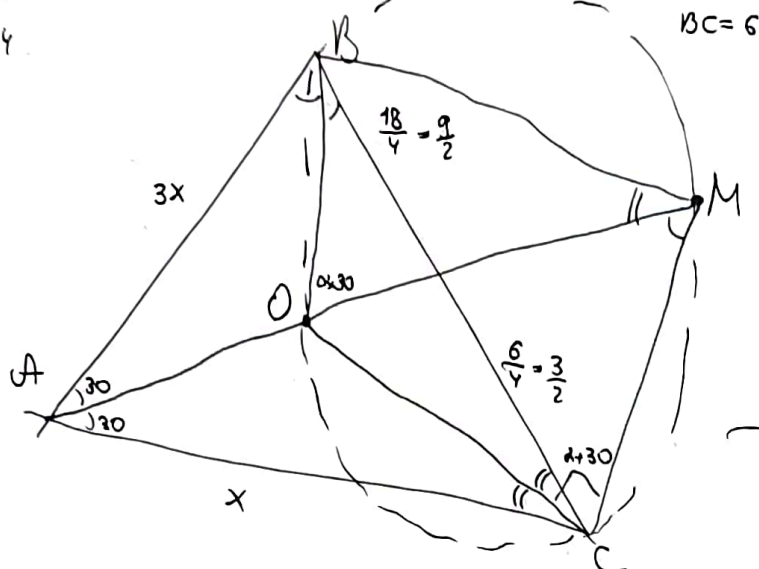


$$\frac{2}{10} < \frac{3}{10} <$$



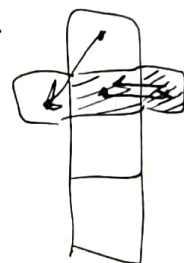
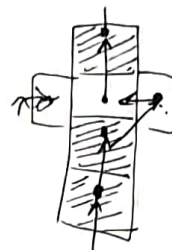
ЧЕРНОВИК

№4

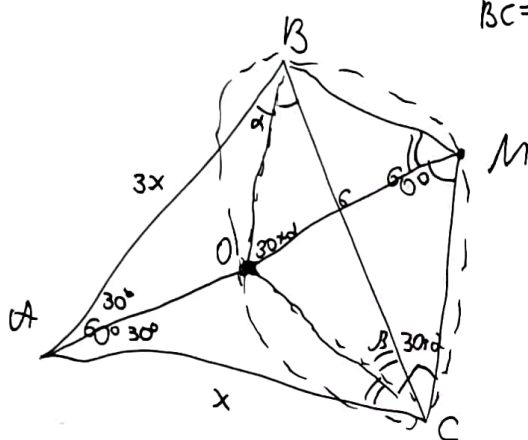


4.4.2.

4.4.3. 2-1-1



46

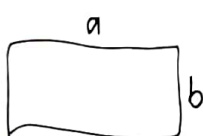
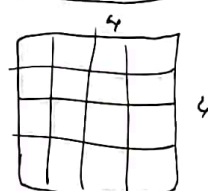
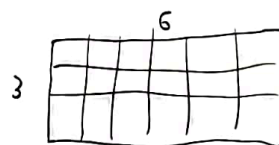


BC=6

$$2(\sqrt{3} + \alpha) + 60 = 180$$

$$2(\sqrt{3} + \alpha) = 120$$

$$\sqrt{3} + \alpha = 60.$$



$$ab = 2a + 2b$$

$$cd = 2c + 2d$$

$$a(b-2) - (b-2) = 4$$

$$(b-2)(a-2) = 4$$

$$b-2=1$$

$$b-2=4$$

$$b-2=2$$

$$a-2=2$$

$$b=3 \quad a=6$$

$$b=4 \quad a=4$$

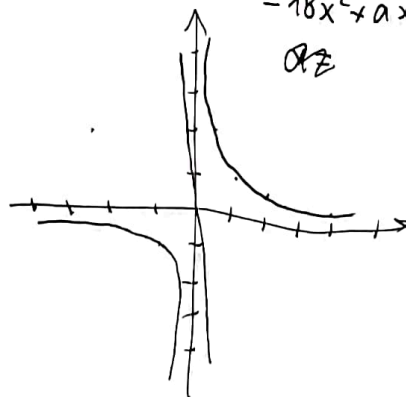
$$-18x + a = \frac{1}{x}$$

$$-18x^2 + ax = 1$$

а.з.

$$4 + 2 \cdot 3 = 10$$

$$S = 300$$



ЧЕРНОВИК

$$x^3 - |x^2 - x - 2| = 12x - 13$$

$$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$$

$$x^3 - |(x-2)(x+1)| = 12x - 13$$

При $x \in (-\infty; -1] \cup [2; \infty)$:

$$x^3 - x^2 + x + 2 = 12x - 13$$

$$x^3 - x^2 - 11x + 15 = 0$$

$$8 - 4 - 22 + 15$$

$$-8 + 15 + 22$$

$$27 - 9 - 33 + 15 = 27 - 33 + 15 - 9 = -6 + 6 = 0$$

$$x = 3$$

$$(x-3)(x^2 + 2x - 5) = 0$$

$$D = 4 + 20 = 24$$

$$x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{6}}{2} = -1 \pm \sqrt{6}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 - 11x + 15 \\ - x^3 - 3x^2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} x-3 \\ x^2 + 2x - 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 11x + 15 \\ - 2x^2 - 6x \\ \hline -5x + 15 \\ - -5x + 15 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$(x-3)(x - (-1 - \sqrt{6}))(x - (-1 + \sqrt{6})) = 0$$

$$x = 3 \quad x = -1 \pm \sqrt{6}$$

$$1 < -1 + \sqrt{6} < 2$$

не подходит

$$x = 3; \quad x = -1 - \sqrt{6}$$

При $x \in (-1; 2)$:

$$x^3 + x^2 - x - 2 = 12x - 13$$

$$x^3 + x^2 - 13x + 11 = 0$$

$$1 + 1 - 13 + 11$$

$$x = 1$$

$$(x-1)(x^2 + 2x - 11) = 0$$

$$D = 4 + 44 = 48$$

$$x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

$$\begin{array}{r} x^3 + x^2 - 13x + 11 \\ - x^3 - x^2 \\ \hline 2x^2 - 13x + 11 \\ - 2x^2 - 2x \\ \hline -11x + 11 \\ - -11x + 11 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} x-1 \\ x^2 + 2x - 11 \end{array}$$

$$(x-1)(x - (-1 + 2\sqrt{3}))(x - (-1 - 2\sqrt{3})) = 0$$

$$-1 + 2\sqrt{3} > 2 \quad -1 - 2\sqrt{3} < -1$$

$$x = 1$$

$$\text{Ответ: } 1; 3; -1 - \sqrt{6}$$