



65-48-77-21

(161.33)



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс

Место проведения Москва
город

12:52
12:55
+ 1 лист *Андр*

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Горбунцова Ольга Александровна
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

+ 1 лист *Андр*

Дата

«13» апреля 2025 года

Подпись участника

Ольга

Черновик

Мас

Салова Т.В.

~1 75 (сильная нить)

8-23
9-24
10-25

$$|2x-3| + |x-3| + 2-x = \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}} - 26$$

$$3+2\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^2 = 3+2\sqrt{2}$$

$$|2x-3| + |x-3| + 2-x = 1+\sqrt{2} - (\sqrt{2}-1)$$

$$|2x-3| + |x-3| = x$$

$$\begin{array}{c} 1.5 \quad 3 \\ \hline x \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2-x \geq 0 \\ x \leq 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x \geq 3 \\ 2x-3+x-3=x \\ 3x-6=x \\ 2x=6 \\ x=3 \quad \text{✓} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1.5 \leq x < 3 \\ 2x-3-x-x=x \\ x=x \\ x \in [1.5, 3) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x < 1.5 \\ 3-2x+3-x=x \\ 6-3x=x \\ 6=4x \\ x=1.5 \end{array}$$

$$x \in [1.5, 3]$$

$$\begin{array}{l} t \geq 8mt \\ \frac{5}{6} > \frac{1}{2} \end{array}$$

$$a > 0$$

$$4^{5-\frac{1}{x}} \geq a + \sin 2^x$$

$$\text{или одно решение } x > 0.$$

$$\frac{4^5}{4^{\frac{1}{x}}} = \frac{4^5}{\sqrt[4]{4}}$$

$$\frac{2^x}{\sin 2^x} > 1 \quad \text{при } x > 0$$

$$\begin{array}{l} 4^{5-\frac{1}{x}} > 0 \\ -1 \leq \sin 2^x \leq 1 \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^{5-\frac{1}{x}}}{4^{\frac{1}{x}}} = 4^{-\infty} = 0.$$

$$\begin{array}{l} x \rightarrow 0 \quad 2^x \rightarrow 1 \\ \sin 2^x \approx \frac{1}{2} \\ x \rightarrow \infty \quad 2^x \rightarrow \infty \\ \sin 2^x \rightarrow 0 \\ x \rightarrow \infty \quad 4^{5-\frac{1}{x}} \rightarrow 1024 \end{array}$$

$$-1 \leq \sin 2^x \leq 1$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$\left(-\frac{1}{x}\right)' = (-x^{-1})' = x^{-2}$$

$$f(x) = 4^{5-\frac{1}{x}} - \sin 2^x \geq a$$

$$f'(x) = 4^{5-\frac{1}{x}} \cdot \ln 4 \cdot \frac{1}{x^2} - \cos 2^x \cdot 2^x \cdot \ln 2$$

$$\begin{array}{l} \frac{2}{x^2} \cdot 4^{5-\frac{1}{x}} \cdot \ln 2 - \cos 2^x \cdot 2^x \cdot \ln 2 = \\ = \ln 2 \left(\frac{2}{x^2} \cdot 4^{5-\frac{1}{x}} - \cos 2^x \cdot 2^x \right) \\ \frac{2}{x^2} \cdot 4^{5-\frac{1}{x}} \geq 2^x \cdot \cos 2^x \end{array}$$

$$a = 1025$$

$$\begin{array}{l} x \rightarrow \infty \quad \cos 2^x \cdot 2^x \rightarrow 1024 \\ x = 20000 \quad 4^{5-\frac{1}{x}} \leq 1025 \end{array}$$

Черновик

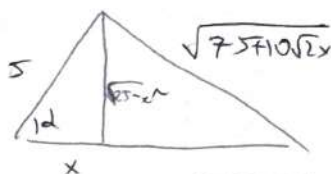
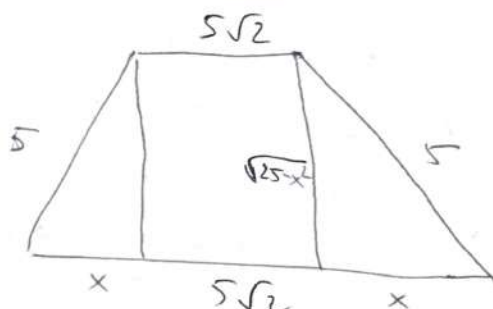
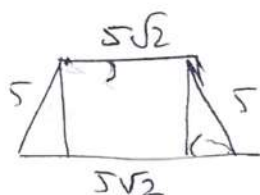
23

$$R=5$$

$$5, 5, 5\sqrt{2}$$

$$S_{max} = ?$$

1)



$$2 \sin 30^\circ \cos 60^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$S_{md} = \frac{\sqrt{25-x^2}}{5}$$

$$\frac{a}{2 S_{md}} = 2R$$

$$\frac{\sqrt{75+10\sqrt{2}x}}{\sqrt{25-x^2}} \cdot \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} (x+5\sqrt{2})^2 + 25 - x^2 &= \\ &= x^2 + 50 + 10\sqrt{2}x + 25 - x^2 = \\ &= 75 + 10\sqrt{2}x \end{aligned}$$

$$75 + 10\sqrt{2}x = 4(25 - x^2)$$

$$75 + 10\sqrt{2}x = 100 - 4x^2$$

$$10\sqrt{2}x = 25 - 4x^2$$

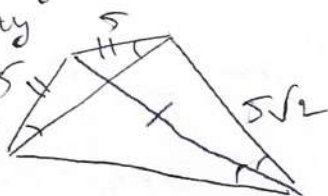
$$4x^2 + 10\sqrt{2}x - 25 = 0$$

$$D = 250 + 4 \cdot 4 \cdot 25 = 600$$

$$\begin{aligned} \sin 120^\circ - \sin 60^\circ &= \\ \sin 20^\circ - \sin 30^\circ &= \\ 1 - \frac{1}{2} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= x \\ \alpha - \beta &= y \end{aligned} \quad | +$$

$$\begin{aligned} 2\alpha &= x+y \\ \alpha &= \frac{x+y}{2} \\ \beta &= \frac{x-y}{2} \end{aligned}$$



$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2}$$

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y &= \sin x - \sin(-y) = \\ &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin x - \sin y &= \sin \left(\frac{\alpha+\beta}{2} \right) - \sin \left(\frac{\alpha-\beta}{2} \right) \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha - \\ &\quad - \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha \\ \sin x - \sin y &= 2 \sin \beta \cos \alpha = \\ &= 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} \end{aligned}$$

[illegible]

Числовой лст

$$(a+b-c)^3 = a^3 + b^3 - c^3 - 6abc + 3ab^2 + 3ac^2 + 3a^2b + 3b^2c - 3a^2c - 3b^2c$$

$$a^3 + b^3 - c^3 = (a+b-c)^3$$

$$-6abc + 3ab^2 + 3ac^2 + 3a^2b + 3b^2c - 3a^2c - 3b^2c = 0$$

$$ab^2 + ac^2 + a^2b + b^2c - a^2c - b^2c - 2abc = 0$$

Заметим, что

$$(a+b)(b-c)(c-a) = (a+b)(bc - c^2 - ab + ac) = 2abc + b^2c + a^2c - ac^2 - bc^2 - a^2b - ab^2$$

$$(a+b)(b-c)(c-a) = 0$$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ b-c=0 \\ c-a=0 \end{cases}$$

Вернёмся к замечанию:

$$\sin(\pi x) + \sin(2\pi x) = 0$$

$$\sin(2\pi x) = \sin(4\pi x) = 0$$

$$\sin(4\pi x) = \sin(\pi x) = 0$$

$$2\sin\frac{3\pi x}{2} \cdot \cos\frac{\pi x}{2} = 0$$

$$2\sin\left(\frac{2\pi x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{6\pi x}{2}\right) = 0$$

$$2\sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0$$

$$\sin(\pi x) = 0$$

$$\cos(3\pi x) = 0$$

$$\cos\left(\frac{5\pi x}{2}\right) = 0$$

$$\frac{3\pi x}{2} = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\pi x = \pi l, l \in \mathbb{Z}$$

$$3\pi x = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{5\pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi q, q \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{3x}{2} = n$$

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{2} + k$$

$$x = l$$

$$3x = \frac{1}{2} + m$$

$$\frac{5x}{2} = \frac{1}{2} + q$$

$$n, k, l, m, q \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{2n}{3}$$

$$x = 1 + 2k$$

$$x = l$$

$$x = \frac{1}{6} + \frac{m}{3}$$

$$x = \frac{1}{5} + \frac{2q}{5}$$

$$k, l, m, n, q \in \mathbb{Z}$$

Чистовик №6
л 4 (урод.)

$$\begin{cases} x = \ell \\ x = \frac{2n}{3} \\ x = \frac{1}{6} + \frac{m}{3} \\ x = \frac{1}{5} + \frac{2q}{5} \end{cases} \quad m, n, \ell, q \in \mathbb{Z}$$

корни хотам $[0, 3, 1, 8]$

$x = \ell, \ell \in \mathbb{Z} \quad x = 1$ подходит

$x = \frac{2n}{3}, n \in \mathbb{Z} \quad x = \frac{2}{3} \quad x = 1\frac{1}{3}$ - подходит

$x = \frac{1}{6} + \frac{m}{3}, m \in \mathbb{Z} \quad x = \frac{1}{2} \quad x = \frac{5}{6} \quad x = 1\frac{1}{6} \quad x = 1\frac{1}{2}$
подходит

$x = \frac{1}{5} + \frac{2q}{5}, q \in \mathbb{Z} \quad x = \frac{3}{5} \quad x = 1 \quad x = 1,4 \quad x = 1,8$
подходит

$x = 1$; $x = \frac{2}{3}$; $x = 1\frac{1}{3}$; $x = \frac{1}{2}$; $x = \frac{5}{6}$; $x = 1\frac{1}{6}$; $x = 1\frac{1}{2}$;
 $x = \frac{3}{5}$; $x = 1,4$; $x = 1,8$

Answer: $\frac{1}{2}; \frac{3}{5}; \frac{2}{3}; \frac{5}{6}; 1; 1\frac{1}{6}; 1\frac{1}{3}; 1,4;$
 $1,5; 1,8$

(22)
 $4^{5-\frac{1}{x}} \geq a + 5m 2^x$

$x > 0$

при $x \rightarrow 0$

$5^{-\frac{1}{x}} \rightarrow -\infty$

$4^{-\infty} \rightarrow 0$

при $x \rightarrow +\infty$

$5^{-\frac{1}{x}} \rightarrow 5$

Частовик № 7
№ 2 (уров.)

$$4^{5-\frac{1}{x}} \rightarrow 4^5 = 1024$$

$$-1 \leq \sin 2^x \leq 1$$

$$0 < 4^{5-\frac{1}{x}} < 1024$$

$$-1 \leq \sin 2^x \leq 1 \rightarrow 15 - \sin 2^x \leq 1$$

$$4^{5-\frac{1}{x}} - \sin 2^x \geq a$$

$$-1 \leq 4^{5-\frac{1}{x}} - \sin(2^x) \leq 1025$$

взяв $a = 2025$ решений не будет

Выставки №8

№8

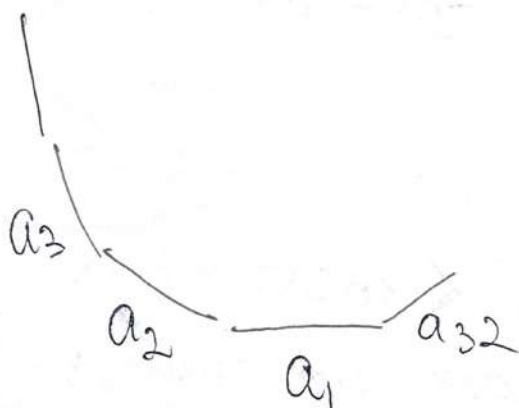
Правильный 32-угольник:

a_{16}, a_{17}, a_{18}



$1 \leq i \leq 32, i \in \mathbb{N}$

a_i - стороны
много.



С выбором 1-ой стороны проблем нет

Пусть НЧО 1-ой стороны - a_1

т.к. если возьмем другую сторону,
то Δ будут отличаться поворотами.

Если теперь будем брать 2-ую сторону
и считать кол-во Δ разн. Δ для каждого.

~~а2, а3, ..., а16, т.к.~~

Итак, что брать сторону a_{17} мы не
можем, т.к. она паралл. a_1 .

Пусть у нас есть левые стороны -
 $a_2, a_3, \dots, a_{16}$ и правые:

$a_{18}, a_{19}, \dots, a_{32}$

Вторую сторону будем брать только
среди левых сторон ~~т.к.~~



a_i и a_{n-i} при $2 \leq i \leq 16$ одинаковы
лишь ~~это~~ сражением (и.e. одинаковы)

A_2 : кет, т.к. остальные стороны либо
напрям., либо обр. Δ внутри некоторого
кет 32-г.

$a_4 : a_{18}, a_{19}$ (2Δ со смежными: (a_1, a_4, a_{18}) , (a_1, a_4, a_{19}));

$a_5: a_{13}, a_{19}, a_{20}$

$$a_6 : a_{18}, a_{19}, a_{20}, a_{21}$$
$$Q_{15} = Q_{18}, Q_{19}, Q_{20} \dots Q_{30}$$

Q₁₆ : $a_{18}, a_{19}, a_{20} \dots, a_{30}, a_{31}$

Остановившись проверить нет ли среди них Δ $\S$ одинаковых.

Ясно, что (a_i, a_i, a_j) и $(a_1, a_{34-i}, a_{34-j})$ — одни. трансп. стр. мн. отражением

$(a_1; a_3; a_{18})$ и $(a_1; a_{31}; a_{16})$ - ∞ и не не

В дальнейшем я, Ф. Ке Лунг и са, з

Чистовик №10

т.к. a_1 испол. везде.

$$a_3 : a_{13}$$

$$a_4 : a_{16}, a_{19}$$

$$a_5 : a_{13}, a_{19}, a_{20}$$

$$a_6 : a_{13}, a_{19}, a_{20}, a_{21}$$

$$a_7 : a_{13}, a_{19}, a_{20}, a_{21}, a_{22}$$

$$a_8 : a_{13}, a_{19}, a_{20}, a_{21}, a_{22}, a_{23}$$

$$a_9 : a_{13}, a_{19}, a_{20}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}$$

$$a_{31} : a_{16}$$

$$a_{30} : a_{16}, a_{15}$$

$$a_{29} : a_{16}, a_{15}, a_{14}$$

$$a_{28} : a_{16}, a_{15}, a_{14}, a_{13}$$

$$a_{27} : a_{16}, a_{15}, a_{14}, a_{13}, a_{12}$$

$$a_{26} : a_{16}, a_{15}, a_{14}, a_{13}, a_{12}, a_{11}$$

~~$$a_{25} : a_{16}, a_{15}, a_{14}, a_{13}, a_{12}, a_{11}, a_{10}$$~~

Мы их уже считали до

т.е. считали a_{10}

Итого всего:

~~$$\frac{13 \cdot 14}{2} - \frac{4 \cdot 6}{2} = 137 - 12 = 125$$~~

~~$$\frac{13 \cdot 14}{2} - \frac{6 \cdot 5}{2} = 137 - 15 = 122$$~~

$$= 91 - 15 = 76$$

Ответ: 76

~~Числовые~~

Числовые

$$1+2+3+\dots+14=13$$



- $a_3: 18$
- $a_4: 18 \ 19$
- $a_5: 18 \ 19 \ 20$
- $a_6: 18 \ 19 \ 20 \ 21$
- $a_7: 18 \ 19 \ 20 \ 21 \ 22$
- $a_8: 18 \ 19 \ 20 \ 21 \ 22 \ 23$
- $a_9: 18 \ 19 \ 20 \ 21 \ 22 \ 23 \ 24$
- $a_{10}: 18 \ 19 \ 20 \ 21 \ 22 \ 23 \ 24 \ 25$
- $a_{11}: 18 \ 19 \ 20 \ 21 \ 22 \ 23 \ 24 \ 25 \ 26$
- $a_{12}: 18 \ 19 \ 20 \ 21 \ 22 \ 23 \ 24 \ 25 \ 26 \ 27$
- $a_{13}: 18 \ 19 \ 20 \ 21 \ 22 \ 23 \ 24 \ 25 \ 26 \ 27 \ 28$
- $a_{14}: 18 \ 19 \ 20 \ 21 \ 22 \ 23 \ 24 \ 25 \ 26 \ 27 \ 28 \ 29$
- $a_{15}: 18 \ 19 \ 20 \ 21 \ 22 \ 23 \ 24 \ 25 \ 26 \ 27 \ 28 \ 29 \ 30$
- $a_{16}: 18 \ 19 \ 20 \ 21 \ 22 \ 23 \ 24 \ 25 \ 26 \ 27 \ 28 \ 29 \ 30 \ 31$

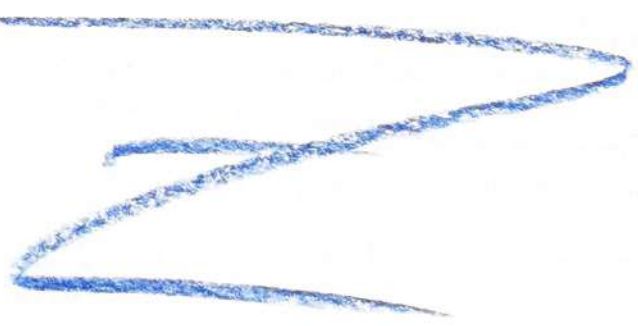
оргиналье

оргиналье

Всего $7+6+5+\dots+1 = \frac{7 \cdot 8}{2} = 28$

Ответ: 21

Всего: $(7+6+5+4+\dots+1) \cdot 2 = 42$



Черновик

~4

$$\sin^3(\pi x) + \sin^3(2\pi x) - \sin^3(4\pi x) = (\sin(\pi x) + \sin(2\pi x) - \sin(4\pi x))^3$$

$$a = \sin(\pi x)$$

$$b = \sin(2\pi x)$$

$$c = \sin(4\pi x)$$

~~$$(a-b)(b-c)(c-a)$$~~

$$(a+b)(b-c)(c-a)$$

$$a^3 + b^3 - c^3 = (a+b-c)^3$$

$$\Rightarrow (a+b-c)^3 = (a+b-c)^2(a+b-c) =$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ac)(a+b-c) =$$

$$= \underline{a^3} + \underline{ab^2} + \underline{ac^2} + \underline{2a^2b} - \underline{2abc} - \underline{2a^2c} + \underline{a^2b} + \underline{b^3} + \underline{bc^2} +$$

$$+ \underline{2ab^2} - \underline{2b^2c} - \underline{2abc} - \underline{a^2c} - \underline{b^2c} - \underline{c^3} - \underline{2abc} + \underline{2bc^2} + \underline{2ac^2} =$$

$$= a^3 + b^3 - c^3 - 6abc + 3ab^2 + 3ac^2 + 3a^2b + 3bc^2 -$$

$$- 3a^2c - 3b^2c$$

$$- 6abc + 3ab^2 + 3ac^2 + 3a^2b + 3bc^2 - 3a^2c - 3b^2c = 0.$$

$$- 2abc + ab^2 + ac^2 + a^2b + bc^2 - a^2c - b^2c = 0.$$

$$ab^2 + ac^2 + a^2b + bc^2 = 2abc + a^2c + b^2c$$

~~$$a^2b$$~~

$$(a+b)(b-c)(c-a) = (a+b)(bc - c^2 - ab + ac) =$$

$$= \underline{abc} + \underline{b^2c} - \underline{ac^2} - \underline{bc^2} - \underline{a^2b} - \underline{ab^2} + \underline{a^2c} + \underline{abc} =$$

$$= 2abc + b^2c + a^2c - ac^2 - bc^2 - a^2b - ab^2$$

$$(a+b)(b-c)(c-a) = 0.$$

$$\begin{cases} a = -b \\ b = c \\ c = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(\pi x) + \sin(2\pi x) = 0 \\ \sin(2\pi x) = \sin(4\pi x) \\ \sin(4\pi x) = \sin(2\pi x) \end{cases}$$

$$2\pi x = 4\pi x$$

$$\sin \frac{2\pi x}{2} \cdot \cos \frac{6\pi x}{2} = 0.$$

$$\sin \pi x \cdot \cos 3\pi x = 0.$$

$$\pi x = \pi n$$

$$x = n$$

Черновик

25

$$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 > 0.$$

$$f_1(x) = (x+a_1)(x^2+b_1x+6)$$

$$f_2(x) = (x+a_2)(x^2+b_2x+8)$$

$$f_3(x) = (x+a_3)(x^2+b_3x+12)$$

$$S: a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3$$

$$f_1(x) = f_2(x) = f_3(x)$$

$$f_1(x) = f_2(x)$$

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^3 + b_1x^2 + 6x + a_1x^2 + a_1b_1x + 6a_1 = \\ &= x^3 + (a_1+b_1)x^2 + (a_1b_1+6)x + 6a_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^3 + (a_1+b_1)x^2 + (a_1b_1+6)x + 6a_1 &= \\ &= x^3 + (a_2+b_2)x^2 + (a_2b_2+8)x + 8a_2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a_1+b_1 = a_2+b_2 \\ a_1b_1+6 = a_2b_2+8 \\ 6a_1 = 8a_2 \end{cases}$$

$$a_2 = \frac{6}{8}a_1 = \frac{3}{4}a_1$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4}a_1 + b_1 = b_2 \\ a_1b_1 = \frac{3}{4}a_1b_2 + 2 \end{cases}$$

$$a_1 = (b_2 - b_1) \cdot 4$$

$$(b_2 - b_1) \cdot 4 \cdot b_1 = \frac{3}{4} \cdot (b_2 - b_1) \cdot 4 \cdot b_2 + 2$$

$$4b_1b_2 - 4b_1^2 = 3b_2^2 - 3b_1b_2 + 6$$

$$\begin{cases} a_1+b_1 = a_2+b_2 = a_3+b_3 \\ a_1b_1+6 = a_2b_2+8 = a_3b_3+12 \end{cases}$$

$$\cancel{6a_1 = 8a_2 + 12a_3}$$

$$3a_1 = 4a_2 = 6a_3$$

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = \frac{3}{4}a_1$$

$$a_3 = \frac{1}{2}a_1$$

$$a_1+b_1 = \frac{1}{2}a_1+b_3$$

$$\frac{1}{2}a_1 = b_3 - b_1$$

$$b_3 = \frac{1}{2}a_1 + b_1$$

$$a_1+b_1 = \frac{3}{4}a_1+b_2$$

$$\frac{1}{4}a_1 = b_2 - b_1$$

$$b_2 = \frac{1}{4}a_1 + b_1$$

Черновик

~5 (ураф.)

$$a_1 b_1 + 6 = \frac{3}{4} a_1 \left(\frac{1}{4} a_1 + b_1 \right) + 8 = \frac{1}{2} a_1 \left(\frac{1}{2} a_1 + b_1 \right) + 12$$

$$a_1 b_1 + 6 = \frac{3}{16} a_1^2 + \frac{3}{4} a_1 b_1 + 8$$

$$\frac{1}{4} a_1 b_1 = \frac{3}{16} a_1^2 + 2 \quad | \cdot 16$$

$$4 a_1 b_1 = 3 a_1^2 + 32$$

$$b_1 = \frac{3 a_1^2 + 32}{4 a_1}$$

$$a_1 b_1 + 6 = \frac{1}{2} a_1 \left(\frac{1}{2} a_1 + b_1 \right) + 12$$

$$a_1 b_1 = 6 + \frac{1}{4} a_1^2 + \frac{1}{2} a_1 b_1$$

$$\frac{1}{2} a_1 b_1 = 6 + \frac{1}{4} a_1^2$$

$$\frac{1}{2} a_1 \cdot \frac{3 a_1^2 + 32}{4 a_1} = 6 + \frac{1}{4} a_1^2$$

$$\frac{3 a_1^2 + 32}{8} = 6 + \frac{1}{4} a_1^2 \quad | \cdot 8$$

$$3 a_1^2 + 32 = 48 + 2 a_1^2$$

$$a_1^2 = 16$$

$$a_1 = 4$$

$$b_1 = \frac{3 a_1^2 + 32}{4 a_1} = \frac{3 \cdot 16 + 32}{4 \cdot 4} = \frac{48 + 32}{16} = \frac{80}{16} = 5$$

$$a_1 + b_1 = 9 = a_1 + b_1 = a_3 + b_3 \rightarrow \boxed{a+b: 27}$$

$$\frac{5x}{2} = \frac{1}{2} + 9$$

$$5x = 1 + 18$$

$$x = \frac{1}{5} + \frac{18}{5}$$

$$x \geq 8 \ln 2^x$$

$$a+x \geq a + \ln 2^x$$

$$4^{5-\frac{1}{x}} \geq a + 2^x$$

$$4^{5-\frac{1}{x}} - 2^x \geq a$$

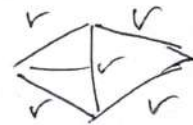
$$\begin{aligned} 2^x & \uparrow \\ -2^x & \downarrow \end{aligned} \quad f'(x) = 4^{5-\frac{1}{x}} \cdot \ln 4 \cdot \frac{1}{x^2} - 2^x \ln 2 =$$

$$= \ln 2 \left(2 \cdot 4^{5-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} - 2^x \right)$$

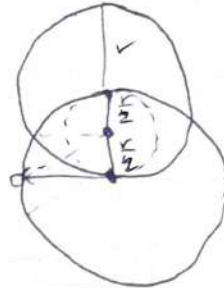
Черновик

~6

$$V = \frac{3}{2+\sqrt{2}}$$



$$\frac{r\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = r\sqrt{3}$$



$$r \approx 1 \frac{r}{2} \approx 2$$

$$4^{5-\frac{1}{x}} \geq a + 8m2^x$$

$$4^{5-\frac{1}{x}} \geq a + 2^x \geq a + 8m2^x$$

$$2^{10-\frac{2}{x}} \geq a + 2^x \quad | \cdot 2^x$$

$$2^{10} \cdot 2^{\frac{2}{x}} \geq a \cdot 2^x + 2^x \cdot 2^x$$

$$2^{10} \cdot 2^{\frac{2}{x}} \geq a \cdot 2^x + 2^{2x}$$

$$2^{10} \cdot 2^{\frac{2}{x}} \geq a \cdot 2^x + 2^{2x}$$

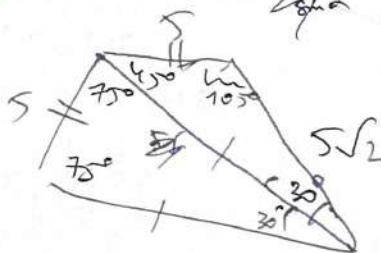
Если $a < 1025$, то

$$4^{5-\frac{1}{x}} \geq a + 8m2^x$$

$$x \rightarrow \infty$$

$$a = 1025$$

$$8m75 =$$



$$\frac{5}{2\sin 75^\circ} = R = 5$$

$$5 = 5 \cdot 2 \sin 75^\circ$$

$$\sin 75^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$\alpha \text{ near } 150^\circ!$$

$$\frac{5\sqrt{2}}{2\sin 75^\circ} = R = 5$$

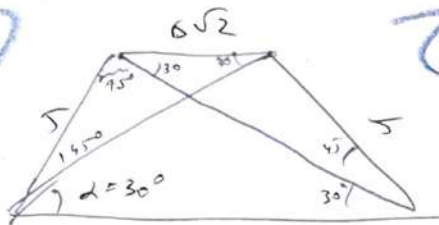
$$5\sqrt{2} = 5 \cdot 2 \cdot \sin 75^\circ$$

Черновик

n 3 (сред.)

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

①.



$$\frac{5}{2\sin 2} = 5$$

$$m d = \frac{d}{2}$$

$$d = 200$$

$$\frac{7\sqrt{2}}{2\sin d} = 7$$

$$\sin d = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

1+
3+
5+
5+

①.

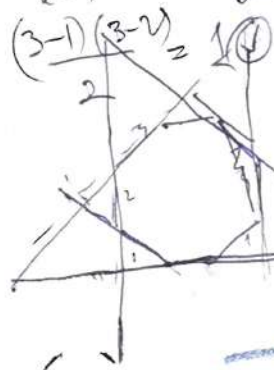
n 8



1/4
k=4

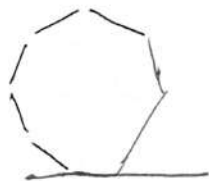


$$k=6 \quad n=6 \Rightarrow k=7$$



$$(4-1)(4-2) = 3$$

$$(3-1)(3-2) = 2$$



13
13-6=7

15 способ
выбрать 2-ую
сторону

1:2



$$13-6+1=7$$

$$n=32=2k$$

$$0+1+2+3+\dots +13$$

$$1+\dots+14 = \frac{15 \cdot 14}{2} = \frac{(k-1)(k-2)}{2}$$

10-ая 11-ая

2-ая - 10
3-ья - 1
15-ая - 13
16-ая - 14

3-ья
2-ая
1-ая

Черновик

$$6144 = a$$

$$1458 = b$$

$$\alpha = 30^\circ$$



$$b\sqrt{2} - \frac{a\sqrt{2}}{2}$$



$$\frac{(b-a)\sqrt{2}}{2} h$$



$$2h = (x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}$$

Числовые ~1

(~1)

$$\sqrt{4x^2-12x+9} + \sqrt{x^2-6x+9} + (\sqrt{-(x-2)})^2 = \sqrt{3+\sqrt{8}} - \sqrt{3-\sqrt{8}}$$

ОДЗ:

$$-(x-2) \geq 0$$

$$-x+2 \geq 0$$

$$x \leq 2$$

$$\sqrt{(2x-3)^2} + \sqrt{(x-3)^2} + -(x-2) = \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$$

$$|2x-3| + |x-3| - x + 2 = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$$

$$|2x-3| + |x-3| - x + 2 = \sqrt{2} + 1 - (\sqrt{2} - 1)$$

$$|2x-3| + |x-3| - x + 2 = 2$$

$$|2x-3| + |x-3| = x$$

Если $1,5 \leq x \leq 2$, то:

$$2x-3 + 3-x = x$$

$$x = x$$

$$x \in [1,5; 2]$$

Если $x < 1,5$

$$3-2x + 3-x = x$$

$$6-3x = x$$

$$6 = 4x$$

$$x = 1,5$$

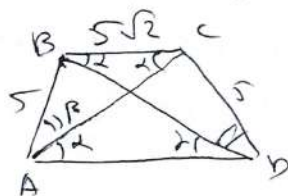
- не подходит т.к. $x < 1,5$

Ответ: $[1,5; 2]$

(~3)

Есть 2 варианта:

1В) 5, $5\sqrt{2}$, 5 - в таком порядке $R=5$



т.к. четырехугольник. Вписан, то $\angle CAO = \angle ACB = \alpha \Rightarrow ABCD$ - вписан.

$$\frac{CD}{\sin \alpha} = 2R$$

$$\frac{5}{\sin \alpha} = 2 \cdot 5 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\alpha \neq 150^\circ \text{ т.к. } \angle BCD + \angle BAD = 180^\circ$$

$$\angle BCA + \angle ACD + \angle BAC + \angle CAD = 180^\circ$$

$$2\alpha + \angle ACD + \angle BAC = 180^\circ \Rightarrow \alpha \neq 150^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

$$\frac{BC}{\sin \angle BAC} = 2R$$

$$\frac{5\sqrt{2}}{\sin \beta} = 2 \cdot 5 \Rightarrow \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\beta \neq 135^\circ \text{ т.к. } \angle BAD + \angle BCD > 180^\circ \Rightarrow \beta = 45^\circ$$

Чистовик 2

13 (чирок.)

$$\angle BAD = 75^\circ \quad \angle BCA = \angle BDA = \angle CAD = \angle CBD = 30^\circ = \alpha$$

$$\angle ABD = 75^\circ$$

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} = \sin 105^\circ$$

$$\frac{AD}{\sin 75^\circ} = 2R = 10$$

$$AD = 10 \cdot \sin 75^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} = \frac{5}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{6}) = BD$$

т.к. $\triangle ABD$ - $\mu\sqrt{\Delta}$

$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot AD \cdot \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CD \cdot \sin 105^\circ =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{6}) \cdot \frac{5}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{6}) \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} =$$

$$= \frac{25(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2}{16} + \frac{25\sqrt{2}}{8}(\sqrt{2}+\sqrt{6}) =$$

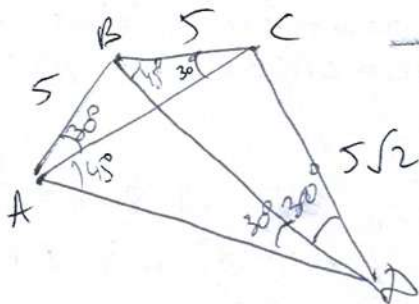
$$= \frac{25}{16}(2+6+2\sqrt{2}) + \frac{25\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{8} + \frac{25\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}}{8} =$$

$$= \frac{25}{16}(8+4\sqrt{3}) + \frac{50}{8} + \frac{25 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}}{8} =$$

$$= \frac{25}{2} + \frac{25\sqrt{3}}{4} + \frac{25}{4} + \frac{50\sqrt{3}}{8} = \frac{50}{4} + \frac{25}{4} + \frac{25\sqrt{3}}{4} \cdot 2 =$$

$$= \frac{75}{4} + \frac{25\sqrt{3}}{2} = \frac{75+50\sqrt{3}}{4} = \frac{25}{4}(3+2\sqrt{3})$$

28.)



т.к. $AB=BC$, то
 $\angle BAC = \angle BCA = \angle BDA =$
 $= \angle BDC = \alpha$

$$\frac{BC}{\sin \alpha} = 2R$$

$$\frac{5}{\sin \alpha} = 10 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\alpha \neq 150^\circ, \text{ т.к. } \angle BAC + \angle BCA < 180^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

$$\angle CBD = \angle CAD = \beta$$

$$\frac{CD}{\sin \beta} = 2R = 10$$

$$\frac{5\sqrt{2}}{\sin \beta} = 10 \Rightarrow \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \beta = 45^\circ$$

2

Числовые

n3 (чирок.)

$$\beta \neq 145^\circ \text{ н.к. } \angle DBC + \angle ADC < 180^\circ$$

Заметим, что $\triangle ABD$ во 2-х вариантах и $\triangle ABD$ в 1-м варианте н.к. и там, и там $AB=5$ и $\angle ABD = \angle ADB = 75^\circ$
 $\triangle BCD$ в 1-м и во 2-м вариантах равен н.к.

$$\text{в 1-м)} S_{BCD} = \frac{1}{2} BC \cdot CD \cdot \sin 105^\circ = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \sqrt{2} \cdot \sin 105^\circ$$

$$\text{во 2-м)} S_{BCD} = \frac{1}{2} BC \cdot CD \cdot \sin 105^\circ = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \sqrt{2} \cdot \sin 105^\circ$$

$\Rightarrow$ площади в 1 и во 2-х вариантах равны, других вариантов быть не может $\Rightarrow S_{\max} = \frac{25}{4} (3 + 2\sqrt{3})$

$$\text{Ответ: } \frac{25}{4} (3 + 2\sqrt{3})$$

(25)

$$f_1(x) = (x+a_1)(x^2+b_1x+c_1)$$

$$f_2(x) = (x+a_2)(x^2+b_2x+c_2)$$

$$f_3(x) = (x+a_3)(x^2+b_3x+c_3)$$

$$f_1(x) = x^3 + (a_1+b_1)x^2 + (a_1c_1+b_1x+c_1)x + 6a_1$$

$$f_2(x) = x^3 + (a_2+b_2)x^2 + (a_2c_2+b_2x+c_2)x + 8a_2$$

$$f_3(x) = x^3 + (a_3+b_3)x^2 + (a_3c_3+b_3x+c_3)x + 12a_3$$

н.к. $f_1(x) = f_2(x) = f_3(x)$ при любых x , то

$$\begin{cases} (1) a_1+b_1 = a_2+b_2 = a_3+b_3 \\ (2) a_1c_1+6 = a_2c_2+8 = a_3c_3+12 \\ (3) 6a_1 = 8a_2 = 12a_3 \end{cases}$$

$$a_2 = \frac{3}{4}a_1$$

$$a_3 = \frac{1}{2}a_1$$

$$a_1+b_1 = a_2+b_2$$

$$a_1+b_1 = \frac{3}{4}a_1+b_2$$

$$\frac{1}{4}a_1 = b_2 - b_1$$

$$b_2 = \frac{1}{4}a_1 + b_1$$

$$a_1+b_1 = a_3+b_3$$

$$a_1+b_1 = \frac{1}{2}a_1+b_3$$

$$\frac{1}{2}a_1 = b_3 - b_1$$

$$b_3 = b_1 + \frac{1}{2}a_1$$

Подставим a_2, a_3, b_2, b_3 во 2-е равенство

$$a_1b_1+6 = \frac{3}{4}a_1(\frac{1}{4}a_1+b_1)+8 = \frac{1}{2}a_1(\frac{1}{2}a_1+b_1)+12$$

$$a_1b_1+6 = \frac{3}{4}a_1(\frac{1}{4}a_1+b_1)+8$$

$$a_1b_1+6 = \frac{3}{16}a_1^2 + \frac{3}{4}a_1b_1+8$$

$$\frac{1}{4}a_1b_1 = \frac{3}{16}a_1^2 + 2 \quad | \cdot 16$$

$$4a_1b_1 = 3a_1^2 + 32$$

Кистовик № 4
№ 5 (чужой)

$$a_1 b_1 = \frac{3a_1^2 + 32}{4}$$

$$a_1 b_1 + 6 = \frac{1}{2} a_1 \left(\frac{1}{2} a_1 + b_1 \right) + 12$$

$$a_1 b_1 + 6 = \frac{1}{4} a_1^2 + \frac{1}{2} a_1 b_1 + 12$$

$$\frac{1}{2} a_1 b_1 = \frac{1}{4} a_1^2 + 6$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3a_1^2 + 32}{4} = \frac{1}{4} a_1^2 + 6 \quad | \cdot 8$$

$$3a_1^2 + 32 = 2a_1^2 + 48$$

$$a_1^2 = 16 \quad \text{т.к. } a_1 > 0$$

$$a_1 = 4$$

$$\frac{1}{2} a_1 b_1 = \frac{1}{4} a_1^2 + 6$$

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot b_1 = \frac{1}{4} \cdot 4^2 + 6$$

$$2b_1 = 4 + 6$$

$$b_1 = 5$$

$$a_1 + b_1 = 4 + 5 = 9 = a_2 + b_2 = a_3 + b_3$$

$$a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 = 9 \cdot 3 = 27$$

Ответ: 27

№ 4

$$\sin^3(\pi x) + \sin^3(2\pi x) - \sin^3(4\pi x) = (\sin(\pi x) + \sin(2\pi x) - \sin(4\pi x))^3$$

Замени: $\sin(\pi x) = a$
 $\sin(2\pi x) = b$
 $\sin(4\pi x) = c$

$$a^3 + b^3 - c^3 = (a + b - c)^3$$

$$\begin{aligned} (a + b - c)^3 &= (a + b - c)^2 (a + b - c) = \\ &= (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ac)(a + b - c) = \\ &= a^3 + ab^2 + ac^2 + 2a^2b - 2abc - 2a^2c + \\ &+ a^2b + b^3 + bc^2 + 2ab^2 - 2b^2c - 2abc - a^2c - b^2c - c^3 - \\ &- 2abc + 2bc^2 + 2ac^2 \end{aligned}$$