0 035553 540000

03-55-53-54
(162.7)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11

Место проведения Санкт-Петербург
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

Далингера Михаила Яковлевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Выход: 13:18 +1 лист

Вход: 13:21

Дата
«13» АПРЕЛЯ 2025 года

Подпись участника

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
03-55-53-54	70	+	+	+	∓	+	∓	0	0

03-55-5 54 (162.7)

Эстифф Шарыгя

Ю(семьдесят)

РЮЗЦ

Чистовик:

Задача 1:

Преобразуем левую часть:

$\sqrt{3+\sqrt{8}} - \sqrt{3-\sqrt{8}} = \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{(1+\sqrt{2})^2} -$

$- \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = 1+\sqrt{2} - (\sqrt{2}-1) = 2$

$\sqrt{4x^2-12x+9} + \sqrt{x^2-6x+9} + \left(\sqrt{-(x-2)}\right)^2 = 2$

$\sqrt{(2x-3)^2} + \sqrt{(x-3)^2} + \left(\sqrt{-(x-2)}\right)^2 = 2$

Ограничения: $(2x-3)^2 \geq 0$, $(x-3)^2 \geq 0$, $-(x-2) \geq 0$

$(x-2) \leq 0 \Rightarrow \underline{x \leq 2}$

$|2x-3| + |x-3| + \left(\sqrt{2-x}\right)^2 = 2$

$|2x-3| + |x-3| + 2 - x = 2$

$|2x-3| + |x-3| - x = 0$

Разберём случаи:

1) $x \geq 3$

$2x-3+x-3-x=0$

$x=3$ - подх. под огр. для случая

2) $\frac{3}{2} \leq x \leq 3$

$2x-3-x+3-x=0$

$0=0$ – значит любой $x \in \left[\frac{3}{2};3\right]$ - подходит

3) $x \leq \frac{3}{2}$

$-2x+3-x+3-x=0$

$4x=6$

$x=\frac{3}{2}$

Итого получим, что $x \in \left[\frac{3}{2};3\right]$.

Учтём ограничение $x \leq 2$.

Получаем, что $x \in \left[\frac{3}{2};2\right]$.

Ответ: $\left[\frac{3}{2};2\right]$

Чистовик:

Задача 5:

$f_1(x)=(x+a_1)(x^2+b_1x+6)=x^3+(a_1+b_1)x^2+(a_1b_1+6)x+6a_1$

$f_2(x)=(x+a_2)(x^2+b_2x+8)=x^3+(a_2+b_2)x^2+(a_2b_2+8)x+8a_2$

$f_3(x)=(x+a_3)(x^2+b_3x+12)=x^3+(a_3+b_3)x^2+(a_3b_3+12)x+12a_3$

Известно, что $\forall x\in\mathbb{R}: f_1(x)=f_2(x)=f_3(x)$, т.к. $f_i(x)$ - это многочлен, то у всех $f_i(x)$ коэффициенты при одинаковых степенях должны быть равны.

$\Downarrow$

$$\begin{cases} a_1+b_1=a_2+b_2=a_3+b_3 \\ a_1b_1+6=a_2b_2+8=a_3b_3+12 \\ 6a_1=8a_2=12a_3 \end{cases}$$

$a_2=\frac{3}{4}a_1;\ a_3=\frac{1}{2}a_1$

$a_2b_2=a_1b_1-2 \Rightarrow \frac{3}{4}a_1b_2=a_1b_1-2 \Rightarrow 3a_1b_2=4a_1b_1-8 \Rightarrow a_1(3b_2-4b_1)=-8^{(*)}$

$a_3b_3=a_1b_1-6$

$(*): a_1(3b_2-4b_1)=-8$

$a_1+b_1=a_2+b_2 \Rightarrow a_1+b_1=\frac{3}{4}a_1+b_2 \Rightarrow 4a_1+4b_1=3a_1+4b_2 \Rightarrow a_1=4b_2-4b_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1-b_2=3b_2-4b_1$

из $(*)$: $a_1^2-a_1b_2=-8 \Rightarrow a_1b_2=a_1^2+8$

Подставим в $a_2b_2=a_1b_1-2 \Rightarrow \frac{3}{4}a_1b_2=a_1b_1-2 \Rightarrow \frac{3}{4}(a_1^2+8)=a_1b_1-2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3a_1^2+24=4a_1b_1-8 \Rightarrow 3a_1^2+32=4a_1b_1$

$]\ a_1+b_1=a_2+b_2=a_3+b_3=c$

$b_1=c-a_1;\ b_2=c-a_2;\ b_3=c-a_3$

Из 3 условия знаем, что: $a_2=\frac{3}{4}a_1;\ a_3=\frac{1}{2}a_1$

$b_1=c-a_1;\ b_2=c-\frac{3}{4}a_1;\ b_3=c-\frac{1}{2}a_1$

Из 2 условия знаем, что:

$a_1b_1=a_2b_2+2=a_3b_3+6$ (вычли по 6)

$a_1(c-a_1)=\frac{3}{4}a_1(c-\frac{3}{4}a_1)+2=\frac{1}{2}a_1(c-\frac{1}{2}a_1)+6$

Чистовик!

Задача 5 (продолжение):

$a_1(c-a_1)=\frac{3}{4}a_1(c-\frac{3}{4}a_1)+2$ (1)

$a_1(c-a_1)=\frac{1}{2}a_1(c-\frac{1}{2}a_1)+6$ (2)

(1): $a_1c-a_1^2=\frac{3}{4}a_1c-\frac{9}{16}a_1^2+2$

(2): $a_1c-a_1^2=\frac{1}{2}a_1c-\frac{1}{4}a_1^2+6$

(1): $\frac{1}{4}a_1c-\frac{7}{16}a_1^2=2 \Rightarrow 4a_1c-7a_1^2=32$ (3)

(2): $\frac{1}{2}a_1c-\frac{3}{4}a_1^2=6 \Rightarrow 2a_1c-3a_1^2=24 \Rightarrow 4a_1c-6a_1^2=48$ (4)

(4)-(3): $4a_1c-6a_1^2-4a_1c+7a_1^2=16$

$a_1^2=16 \Rightarrow a_1=4$, т.к. a_1 – положительное число

Подставим $a_1=4$ в (3):

$16c-7\cdot16=16\cdot2$

$\Downarrow$

$c=9$

$a_1+b_1+a_2+b_2+a_3+b_3=3c=3\cdot9=27$

Ответ: 27

Задача 4:

Пусть $a=\sin(\pi x)$; $b=-\sin(2\pi x)$; $c=\sin(4\pi x)$

$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3 \quad |-3abc$

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)^3-3abc$

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=(a+b+c)^3-3abc$

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc-(a+b+c)^2)=-3abc$

$(a+b+c)(-3ab-3ac-3bc)=-3abc$

$abc=(a+b+c)(ab+ac+bc)$

$a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b+2abc=0$

$(a+b)(a+c)(b+c)=0$

Черновик:

9:

4 5 20

3 6 18 – подходит!

2 ~~8~~7 14

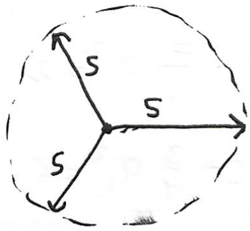
$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$

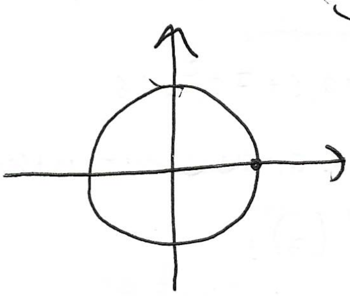
$a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}$

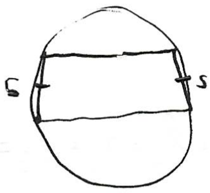
$\frac{ab+bc+ac}{3}\geq\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$

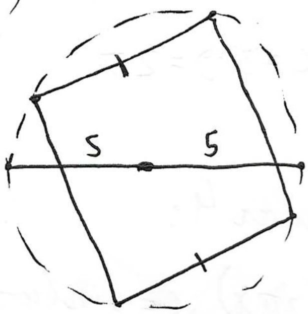
$ab+bc+ac\geq$

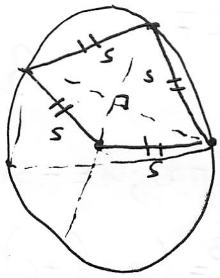
$(a+b)(a+c)(b+c)-$











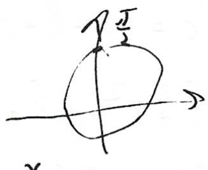
$3^{5-\frac{1}{x}}\geq a+\sin(4^x)$

$(x-a)^2$

$x>0$

$x(x-a)$

$3^{5-\frac{1}{x}}-\sin(4^x)\geq a\ \forall x>0.$



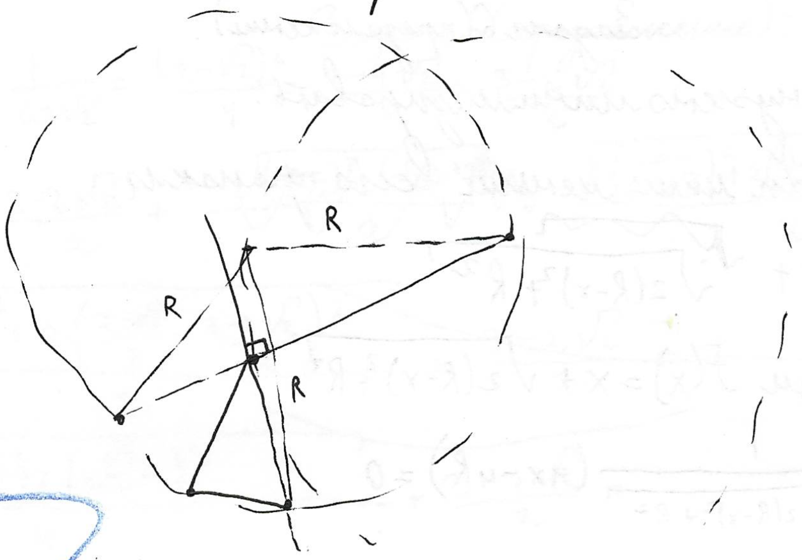
3^5

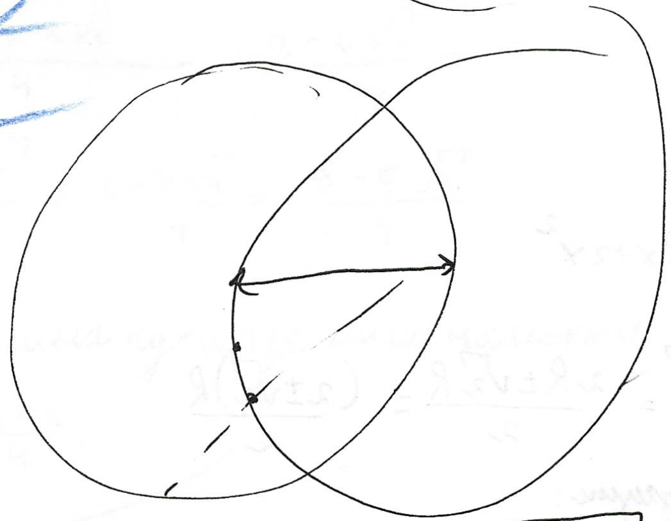
$4^x=\frac{\pi}{2}$

$x=\log_4(\frac{\pi}{4})$

$(a^2)'=2a$

Черновик:





$4a$

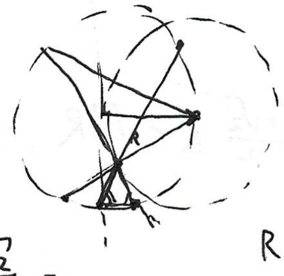
$2a^2-4Ra$

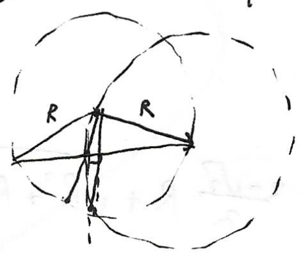
$f'(a)=\frac{1}{\sqrt{R^2+2(R-a)^2}}\cdot(4a-4R)+1$

$\sqrt{R^2+2(R-a)^2}+a=F(a)$

$\frac{\sqrt{R^2+2(R-a)^2}}{2}+a$

$4(R-a)=\sqrt{R^2+2(R-a)^2}$





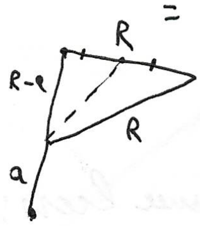
$R-\frac{(2-\sqrt{2})}{2}R$

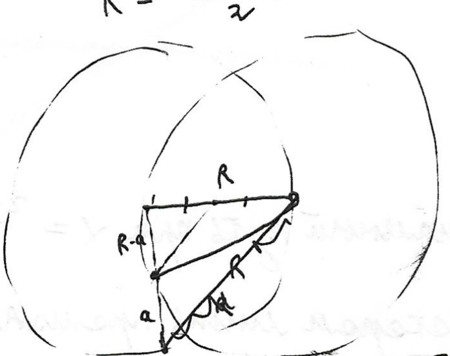
$4R^2+4a^2-8Ra=R^2+2R^2+2a^2-4Ra$

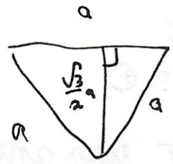
$R^2+2a^2-4Ra=0$

$\frac{2-\sqrt{2}}{2(2+\sqrt{2})}=$

$=(2-$







$2a^2-4Ra+R^2=0$

$a_{1,2}=\frac{4R\pm\sqrt{16R^2-8R^2}}{4}=$

$\frac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2}=m_a$

$=\frac{2R\pm\sqrt{2}R}{2}$

$R\frac{\sqrt{2}}{2}$

Чистовик:

Задача 6 (продолжение):

По условию нужно минимизировать:

$2BA+BX$, чтобы лишь меньше всего промокла.

$2BA+BX = x + \sqrt{2(R-x)^2+R^2}$

Ищем минимум $f(x) = x + \sqrt{2(R-x)^2+R^2}$

$f'(x) = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2(R-x)^2+R^2}}(4x-4R) = 0$

$\frac{2(R-x)}{\sqrt{2(R-x)^2+R^2}} = 1$

$2(R-x) = \sqrt{2(R-x)^2+R^2}$

$4R^2-8Rx+4x^2 = 3R^2-4Rx+2x^2$

$R^2-4Rx+2x^2=0$

$x_{1,2} = \frac{4R\pm\sqrt{16R^2-8R^2}}{4} = \frac{2R\pm\sqrt{2}R}{2} = \frac{(2\pm\sqrt{2})R}{2}$

т.к. $x<R$ для минимизации:

$x = \frac{(2-\sqrt{2})R}{2}$

$f(0) = \sqrt{3}R$

$f(R) = 2R$

$f\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}R\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{2}R + \sqrt{R^2+R^2} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}R < \sqrt{3}R$, т.к.

$2+\sqrt{2} < 2\sqrt{3}$

$4+2+4\sqrt{2} < 12$

$4\sqrt{2} < 6$

$\sqrt{2} < 1{,}5$ (+)

Значит, оптимальный путь при $x = \frac{2-\sqrt{2}}{2}R$.

Длина пути, на котором лишь промокнет меньше всего:

$BA+BX = \frac{\sqrt{2(R-x)^2+R^2}}{2} + x$

Чистовик:

Задача 6 (продолжение):

$$x=\frac{2-\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2+\sqrt{2}}=\frac{(2-\sqrt{2})^2}{4}=\frac{6-4\sqrt{2}}{4}=\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$$

$$BA+BX=\frac{3-2\sqrt{2}}{2}+\cancel{\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{2+\sqrt{2}}\right)^2+2\left(\frac{1}{2+\sqrt{2}}-\frac{3-2\sqrt{2}}{2}\right)^2}}{2}}\ \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{2+\sqrt{2}}\right)^2+2\left(\frac{1}{2+\sqrt{2}}-\frac{3-2\sqrt{2}}{2}\right)^2}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})^2}{4}+2\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}-\frac{3-2\sqrt{2}}{2}\right)^2}}{2}+\frac{3-2\sqrt{2}}{2}=$$

$$=\frac{\sqrt{(2-\sqrt{2})^2+2(\sqrt{2}-1)^2}}{4}+\frac{3-2\sqrt{2}}{2}=$$

$$=\frac{\sqrt{6-4\sqrt{2}+3-2\sqrt{2}}}{4}+\frac{3-2\sqrt{2}}{2}=$$

$$=\frac{\sqrt{(3-\sqrt{2})^2}}{4}+\frac{6-4\sqrt{2}}{4}=\frac{9-5\sqrt{2}}{4}$$

Ответ: длина пути, где мышь намокнет меньше всего равна $\frac{9-5\sqrt{2}}{4}$.

Чистовик:

Задача 4 (продолжение):

Значит:

$$\left[\begin{array}{ll} a+b=0 & 1) \\ a+c=0 & 2) \\ b+c=0 & 3) \end{array}\right.$$

$\cancel{1)\ \sin(\pi x)=\sin(2\pi x)}$ Пусть $\alpha=\pi x$.

$\cancel{\sin\alpha}$ 1) $\sin\alpha-\sin 2\alpha=0$

$\sin\alpha(1-2\cos\alpha)=0$

$\Downarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \sin\alpha=0 \\ \cos\alpha=\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \alpha=\pi k, k\in\mathbb{Z} \\ \alpha=\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in\mathbb{Z} \\ \alpha=-\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=k, k\in\mathbb{Z} \\ x=\frac{1}{3}+2k, k\in\mathbb{Z} \\ x=-\frac{1}{3}+2k, k\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$x=k, k\in\mathbb{Z}$ и $x\in[0,3;1,6] \Rightarrow x=1$

$x=\frac{1}{3}+2k, k\in\mathbb{Z}$ и $x\in[0,3;1,6] \Rightarrow x=\frac{1}{3}$

$x=-\frac{1}{3}+2k, k\in\mathbb{Z}$ и $x\in[0,3;1,6] \Rightarrow x\in\varnothing$, т.к. $1\frac{2}{3}>1,6$, $-\frac{1}{3}<0,3$.

3) $-\sin(2\alpha)+\sin(4\alpha)=0$

$-\sin(2\alpha)+\sin(2\alpha)\cdot\cos(2\alpha)\cdot 2=0$

$\sin(2\alpha)(2\cos(2\alpha)-1)=0$

$\Downarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \sin(2\alpha)=0 \\ \cos(2\alpha)=\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha=\pi k, k\in\mathbb{Z} \\ 2\alpha=\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in\mathbb{Z} \\ 2\alpha=-\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \alpha=\frac{\pi k}{2}, k\in\mathbb{Z} \\ \alpha=\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in\mathbb{Z} \\ \alpha=-\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{k}{2}, k\in\mathbb{Z} \\ x=1/6+k, k\in\mathbb{Z} \\ x=-1/6+k, k\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Чистовик:

Задача 4 (продолжение):

$x = k/2,\ k \in \mathbb{Z}$ и $x \in [0,3; 1,6] \Rightarrow x = \frac{1}{2},\ x = 1,\ x = \frac{3}{2}$

$x = \frac{1}{6} + k,\ k \in \mathbb{Z}$ и $x \in [0,3; 1,6] \Rightarrow x = \frac{7}{6}$

$x = -\frac{1}{6} + k,\ k \in \mathbb{Z}$ и $x \in [0,3; 1,6] \Rightarrow x = \frac{5}{6}$

2) $\sin\alpha + \sin(4\alpha) = 0$

$\sin\alpha + 2\sin(2\alpha)\cos(2\alpha) = 0$

$\sin\alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha\cos(2\alpha) = 0$

$\sin\alpha\,(1 + 4\cos\alpha\cos(2\alpha)) = 0$

$\sin\alpha\,(1 + 4\cos\alpha(2\cos^2\alpha - 1)) = 0$

$\sin\alpha\,(1 + 8\cos^3\alpha - 4\cos^2\alpha) = 0$

$\sin\alpha\,(2\cos\alpha - 1)(4\cos^2\alpha + 2\cos\alpha - 1) = 0$

$\Downarrow$

$\left[\begin{array}{l} \sin\alpha = 0 \\ \cos\alpha = \frac{1}{2} \\ 4\cos^2\alpha + 2\cos\alpha - 1 = 0 \end{array}\right.$ ← разобрано в случае 1.

Осталось разобрать $4\cos^2\alpha +$ 2ая $2\cos\alpha - 1 = 0$

] $t = \cos\alpha$

$4t^2 + 2t - 1 = 0$

$t_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+16}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$

$\Downarrow$

$\left[\begin{array}{l} \cos\alpha = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \\ \cos\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \end{array}\right.$

$\Downarrow$

$\left[\begin{array}{l} \alpha = \arccos\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right) + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ \alpha = -\arccos\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right) + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ \alpha = +\arccos\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right) + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ \alpha = -\arccos\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right) + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\arccos\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)}{\pi} + 2k,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{-\arccos\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)}{\pi} + 2k,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\arccos\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right)}{\pi} + 2k,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\arccos\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right)}{\pi} + 2k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

Чистовик:

Задача 4 (продолжение):

$\cancel{\frac{1+\sqrt{5}}{4} < \frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\cancel{2+2\sqrt{5} < 4\sqrt{3}}$

$\cancel{4+4\cdot 5+8\sqrt{5} > 16\cdot 3}$

$\cancel{8\sqrt{5} > 8\cdot 3}$

$\frac{1+\sqrt{5}}{4} < \frac{\sqrt{3}}{2}$ (1)

$1+\sqrt{5} < 2\sqrt{3}$

$1+5+2\sqrt{5} < 12$

$2\sqrt{5} < 6$

$\sqrt{5} < 3$ ⊕

$\frac{1+\sqrt{5}}{4} > \frac{1}{2}$ (2) $\frac{1+\sqrt{5}}{4} > \cos(54^\circ)$

$1+\sqrt{5} > 2$ ⊕

из (1) и (2) следует, что $\frac{\arccos\left(\frac{-1\mp\sqrt{5}}{4}\right)}{\pi} \in \cancel{\left(\frac{1}{6};\frac{1}{3}\right)} \left(-\frac{5}{3}; -\frac{1}{6}\right)$ 3/10

$x = \frac{\arccos\left(\frac{-1\mp\sqrt{5}}{4}\right)}{\pi} + 2k, k\in\mathbb{Z}$ и $x\in[0{,}3; 1{,}6] \Rightarrow x\in\varnothing$

$x = -\frac{\arccos\left(\frac{-1\mp\sqrt{5}}{4}\right)}{\pi} + 2k, k\in\mathbb{Z}$ и $x\in[0{,}3; 1{,}6] \Rightarrow x\in\varnothing$

$\frac{\sqrt{5}-1}{4} < \frac{1}{2}$ $\frac{\sqrt{5}-1}{4} > 0$

$\sqrt{5}-1 < 2$

$\sqrt{5} < 3$ ⊕

Значит, $\frac{\arccos\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)}{\pi} \in \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$.

$x = \frac{\arccos\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)}{\pi} + 2k, k\in\mathbb{Z}$ и $x\in[0{,}3; 1{,}6] \Rightarrow x = \frac{\arccos\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)}{\pi}$

$x = -\frac{\arccos\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)}{\pi} + 2k, k\in\mathbb{Z}$ и $x\in[0{,}3; 1{,}6] \Rightarrow x\in\varnothing$, т.к. $\frac{-1+\sqrt{5}}{4} < \frac{1}{3}$, т.к.

$3\sqrt{5} < 7$

$45 < 49$

Ответ: $\left\{\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; 7/6; 5/6; 1/3; \frac{\arccos\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)}{\pi}\right\}$

Задача 2:

наименьшее $a > 0$:

$3^{5-\frac{1}{x}} \geq a + \sin(4^x)$ не имеет решений при $x > 0$.

т.е. такое a, что $a > 3^{5-\frac{1}{x}} - \sin(4^x)$ $\forall x > 0$.

1) докажем, что $a = 3^5+1$ — подходит

Чистовик:

Задача 2 (продолжение):

$3^5+1 > 3^{5-\frac{1}{x}} - \sin(4^x)\ \forall x>0.$

$\sin(4^x) \in [-1;1]$

$\Downarrow$

$-\sin(4^x) \in [-1;1]$

$3^{5-\frac{1}{x}} < 3^5$ * при $x>0$

$\Rightarrow 3^5+1 > 3^{5-\frac{1}{x}} - \sin(4^x)$

* т.к. $\frac{1}{x} > 0$ при $x>0$.

Пусть есть $a < 3^5+1$ и которое удовлетворяет условию. Рассмотрим это a.

$a > 3^{5-\frac{1}{x}} - \sin(4^x)$

$\exists$ это $a = 3^5+1-c$, где $c>0$.

$3^5+1-c > 3^{5-\frac{1}{x}} - \sin(4^x).$

Рассмотрим только такие x, при которых $\sin(4^x) = -1$: таких x беск. много, т.к. $\sin x$ - периодична, поэтому существует сколь угодно большое x: $\sin(4^x) = -1$.

$\ll 3^5$ можно считать.

Выберем из этого множества x: $3^{5-\frac{1}{x}} > 3^5 - c \Rightarrow 5 - \frac{1}{x} > \log_3(3^5-c) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{x} < 5 - \log_3(3^5-c) \Rightarrow x > \frac{1}{5-\log_3(3^5-c)}.$

Тогда: $3^{5-\frac{1}{x}} > 3^5 - c$, $\sin(4^x) = -1$

$\Downarrow$

$-\sin(4^x) + 3^{5-\frac{1}{x}} \geqslant a$, т.е. нашлось решение $x>0$. Значит такое a — не подходит.

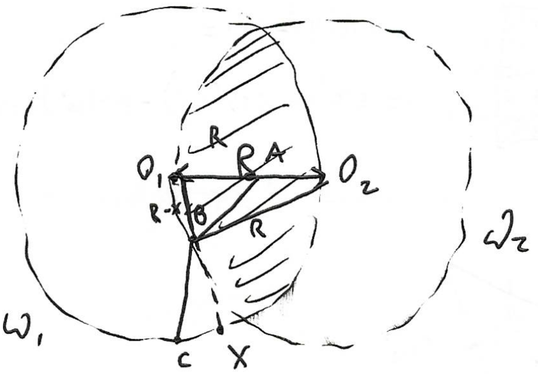
Значит, $a = 3^5+1 = 244$: наим. a, удовлетворяющее условию.

Ответ: $a = 244$

Чистовик:

Задача 6:

Пусть круги радиусов $R = \frac{1}{2+\sqrt{2}}$



В заштрихованной части мышь мокнет в 2 раза быстрее, чем в обычной части.

Заметим, что маршрут мыши можно разбить на 2 части: по зоне, где она мокнет с обычной скоростью и по зоне, где она мокнет с удвоенной скоростью.

Пусть т. C — точка старта, т. B — точка на границе зоны с обычной промокаемостью и удвоенной, т. A — точка финиша.

Очевидно, что кратчайшие пути проходят по отрезкам AB и BC.

Зафиксируем т. B и будем искать т. C: что для данного отрезка AB отрезок BC был минимальной длины.

] т. O_1, т. O_2 — центры окружн. кругов ω_1 и ω_2

Продлим O_1B до пересечения с ω_1 или O_2B до пересечения с ω_2, и получим т. X

$BX = O_1X - O_1B = R - O_1B$.

для любой другой точки т. C: $O_1C = R < O_1B + BC \Rightarrow BC > R - O_1B$.

Значит, т. X — такая точка, что отрезок BX — мин. длины.

] $BX = x \Rightarrow O_1B = R - x$

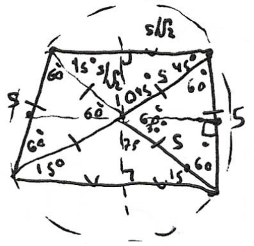
$O_1O_2 = R$; $O_2B = R$

Тогда, по формуле медианы:

$$BA = \frac{\sqrt{(R^2+(R-x)^2)\cdot 2 - R^2}}{2} = \frac{\sqrt{2(R-x)^2+R^2}}{2}$$

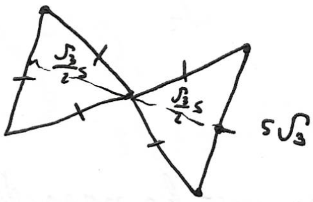
Черновик:

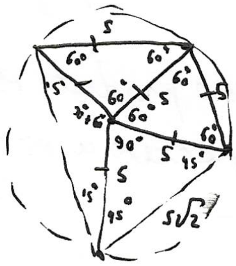
$5, 5, 5\sqrt{2}$

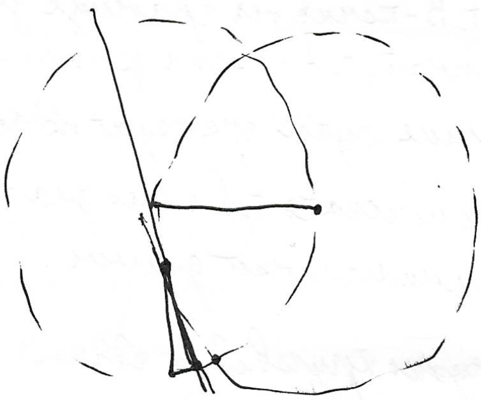


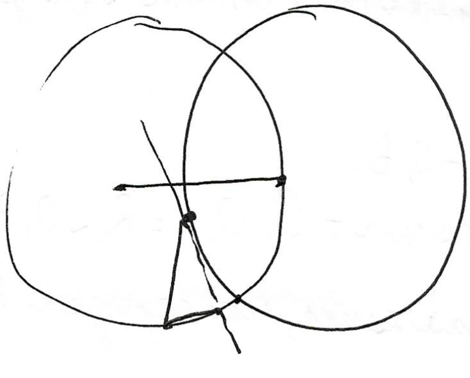
$\sin(45^\circ - 30^\circ) =$

$= \sin(45^\circ)\cos(30^\circ) - \sin(30^\circ)\cos(45^\circ)$









Чистовик:

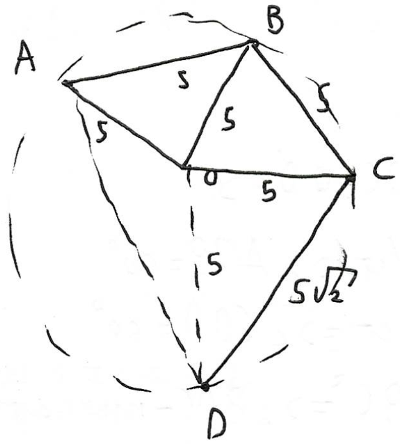
Задача 3:

Есть два случая:

1) стороны по 5 - соседние стороны

2) стороны по 5 - противоположные стороны.

1)] ABCD - впис. четырехуг., т. O - центр окружности.



$]\ AB = BC = 5;\ CD = 5\sqrt{2}$

По условию $R = 5 \Rightarrow AO = BO = CO = 5$, $DO = 5$

$AO = OB = AB = 5 \Rightarrow \triangle AOB$ - рв/ст $\Rightarrow \angle AOB = 60^\circ$

$OB = OC = BC = 5 \Rightarrow \triangle BOC$ - рв/ст $\Rightarrow \angle BOC = 60^\circ$

$OC^2 + OD^2 = 5^2 + 5^2 = 50 = (5\sqrt{2})^2 = CD^2$

$\Downarrow$

$\triangle ODC$ - прямоуг $\Rightarrow \angle COD = 90^\circ$. т.к. $60^\circ + 60^\circ + 90^\circ > 180^\circ \Rightarrow$ т. O лежит внутри

$\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle AOD = 360^\circ \Leftarrow ABCD$

$\Downarrow$

$\angle AOD = 360^\circ - 120^\circ - 90^\circ = 240^\circ - 90^\circ = 150^\circ$

$$S(ABCD) = S(AOB) + S(BOC) + S(COD) + S(AOD) = \frac{AO \cdot OB \cdot \sin\angle AOB}{2} +$$

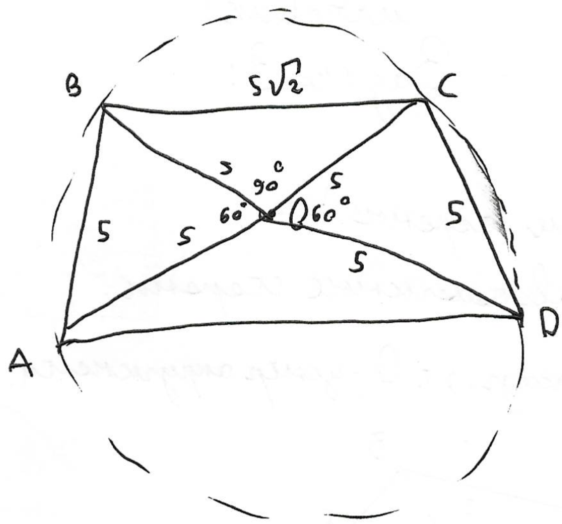
$$+ \frac{BO \cdot OC \cdot \sin\angle BOC}{2} + \frac{CO \cdot OD \cdot \sin\angle COD}{2} + \frac{AO \cdot OD \cdot \sin\angle AOD}{2} = \frac{25}{2}(\sin(60^\circ) +$$

$$+ \sin(60^\circ) + \sin(90^\circ) + \sin(150^\circ)) = \frac{25}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + 1\right) = \frac{25}{4}(2\sqrt{3} + 3)$$

2)] ABCD - впис. четырехуг., т. O - центр окружности.

$]\ AB = CD = 5;\ BC = 5\sqrt{2}$

ABCD - впис. четырехуг. и $AB = CD \Rightarrow ABCD$ - р/б трапеция.



По условию $R=5$; $AO=OB=OC=OD=5$

$AO=OB=AB=5 \Rightarrow \triangle AOB$ - рв/ст $\Rightarrow \angle AOB=60°$

$OC=OD=CD=5 \Rightarrow \triangle COD$ - рв/ст $\Rightarrow \angle COD=60°$

$BO^2+CO^2=25+25=50=(5\sqrt{2})^2=BC^2 \Rightarrow \triangle BOC$ - прямоуг $\Rightarrow \angle BOC=90°$.

Аналогично прошлой части задачи: $60°+60°+90°>180°$.

Значит:

$\angle AOB+\angle BOC+\angle COD+\angle AOD=360°$

$\Downarrow$

$\angle AOD=150°$.

Все углы не изменились, значит:

$S=S(AOB)+S(BOC)+S(COD)+S(AOD)=\frac{25}{2}(2\sqrt{3}+3)$

Ответ: максимальная площадь четырехугольника равна: $\frac{25}{2}(2\sqrt{3}+3)$.