



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 2

Место проведения г. Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

Даниленко Руслана Николаевна
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«13» апреля 2025 года

Подпись участника
[Подпись]

Мин

лист 11

Пусть $\angle ACO = \angle OCB = \alpha$
 $\angle ABO = \angle OBA = \beta$. Тогда:
 $\angle CAB + \angle ACB + \angle CBA = 180^\circ$
 $60^\circ + 2\alpha + 2\beta = 180^\circ$
 $\Rightarrow \alpha + \beta = 60^\circ$.

$\angle CBM = \angle MOC$ (внешний
 угол $\triangle AOC$) $= 30^\circ + \alpha$.

$\angle OBM = \angle OBC + \angle CBM =$

$= \beta + \alpha + 30^\circ = 90^\circ. \Rightarrow OM -$

- диаметр окружности. т.е. $OM = 2R$.

$\angle COB = 180^\circ - \angle OCB - \angle OBC = 180^\circ - \alpha - \beta = 120^\circ$.

то е. синусов для $\triangle COB$:

$$D = 2R = \frac{CB}{\sin \angle COB} = \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}.$$

$$OM = 2R = 4\sqrt{3}.$$

$$\text{Ответ: } OM = 4\sqrt{3}.$$

1/2

$$1) x^2 - x - 2 \geq 0$$

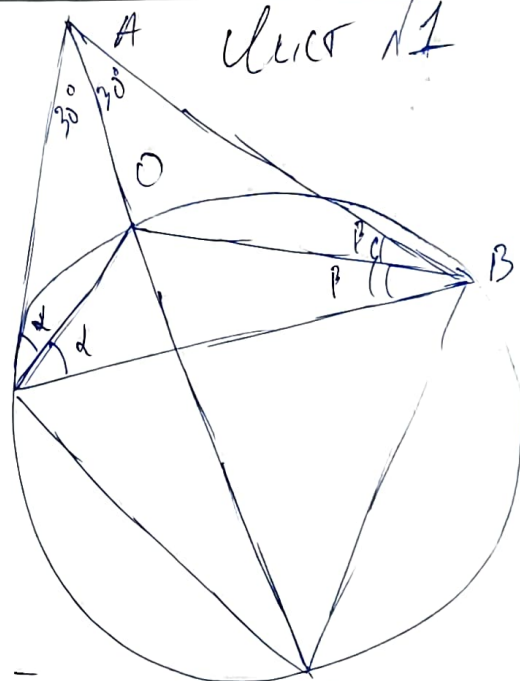
$$(x-2)/(x+1) \geq 0$$

+ - +

$$|x \in (-\infty; -1) \cup [2; +\infty)|$$

$$x^3 - x^2 + x + 2 = 12x - 13.$$

$$x^3 - x^2 - 11x + 15 = 0.$$



60 (шестьдесят)

Заметим, что $x=3$ является корнем уравнения. Проверка: $3^3 - 3^2 - 3 \cdot 11 + 15 = 27 - 9 - 33 + 15 = 0$. г.е. Многочлен из левой части уравнения : $x-3$ без остатка.

$$x^3 - x^2 - 11x + 15 = 0$$

$$(x-3)(x^2 + 2x - 5) = 0$$

$$x-3=0 \quad (1)$$

$$x^2 + 2x - 5 = 0 \quad (2)$$

$$(1): x_3 = 3$$

$$(2): x^2 + 2x - 5 = 0$$

$$D = 4 + 20 = 24$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{24}}{2} = -1 \pm \sqrt{6}$$

корень $x_1 = -1 + \sqrt{6}$ не входит в промежутки $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty) \Rightarrow$ он не подходит

$$2) x^2 - x - 2 \leq 0$$

$$(x-1)(x+1) \leq 0$$

$$\begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ \hline -1 \quad 2 \end{array}$$

$$x \in (-1, 2)$$

$$x^3 + x^2 - x - 2 = 11x - 13$$

$$x^3 + x^2 - 13x + 11 = 0$$

Заметим, что $x=1$ - корень.

$x^3 + x^2 - 13x + 11 = 0$ [испыт №3] $x^3 + x^2 - 13x + 11 \mid x-1$
 $\begin{array}{r} x^3 + x^2 - 13x + 11 \\ \underline{x^3 + x^2 - 11x + 11} \\ 2x - 11 \end{array}$

$(x-1)(x^2 + 2x - 11) = 0$

$\begin{cases} x-1=0 & ① \\ x^2 + 2x - 11=0 & ② \end{cases}$

①: $x_3 = 1$

②: $x^2 + 2x - 11 = 0$

$D = 4 + 44 = 48$

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{48}}{2} = -1 \pm \sqrt{12}$

корни $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{12}$ не входят в промежуток $(-1; 2) \Rightarrow$ они не подходят.

ответ: $x_1 = -1 - \sqrt{6}$; $x_2 = 1$; $x_3 = 3$.

№7

Пусть учитель ставит учебники на полки за решенные задачи. Пусть $n=10$. тогда т.к. учеников 100 плюсиков хотя бы 1000, а т.к. задач всего 20 то по принципу Дирихле, найдется задача, которую за которую было поставлено хотя бы 50 плюсиков (т.е. её решили не менее половины класс). Достанем, конечно $n < 10$ не подходят. Киреем таблицу учеников ~~класс~~ и задачи, в которую будем ставить плюсик. Каждому ученику за соответствующие задачи. приведем рассуждение для $n \leq 9$ в которой каждую задачу решили < 50 учеников: $\forall k \forall$

проделан по
Проконтроль учеников
с 3 задания.

Пусть все ученики,
чей номер $5 \leq 1$
остаток 1 при : 20
решили задачи [1-9],
остаток 2, [2-10],
3-[3-11]... 19-[19-20 и 1-2],
0-[20 и 1-8]

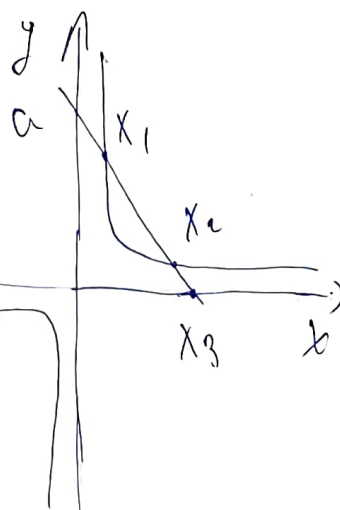
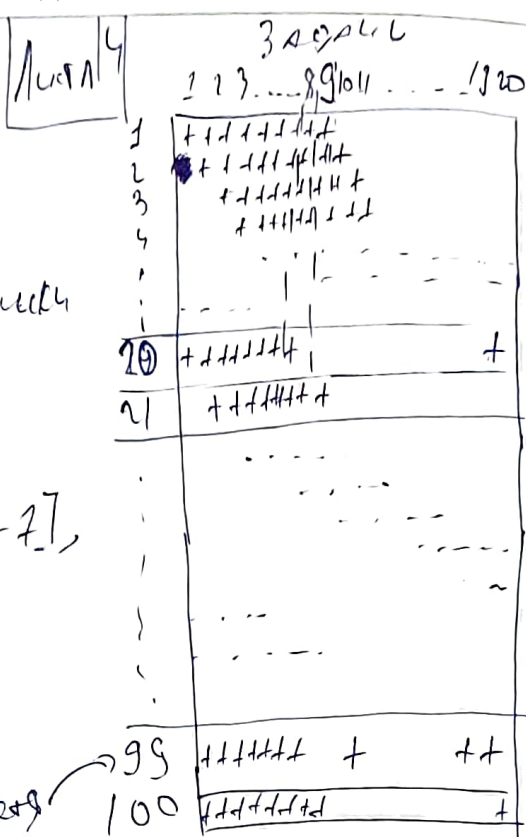
и 99 ученик (Петя)
в добавок к 9 заданиям
решил еще и 10-ю.

т.е. он решил 10 задач,
а все остальные - 9
 $\Rightarrow$ у Пети больше решенных, чем у Васи.

Всего задачи 1-9 и 11-20 решили 45
учеников, а 10 - 46. при таком рас-
пределении решенных задач не
хватает, чтобы каждый из 50 учеников
решил хотя бы одну задачу.

Пусть прямая $y = -18x + 18$
представляет собой декарто-
вы координаты $y = 1/x$ на
равных частях.

Пусть абсциссы пере-
сечения прямой с Ox - x_3
с гиперболой - x_1 и x_2 , причем
 $x_1 < x_2 < x_3$



Лист № 5

ГОДА Д.К. Годы наклон прямой всегда

осуществляется! ~~Всё~~ ~~всё~~

$x : y = 1 : 7 : 3.$

$$X_1 - 0 = X_2 - X_1 = X_3 - X_2 \quad \text{f.e.} \quad X_1, X_2, X_3 = 1, 0$$

$\lambda_1 - 0 = \lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_3 - \lambda_2$. Тогда $\lambda_1 = 0$,
~~тогда~~ ордината $X_3 - 0$ тогда $0 = -18\lambda_3 + 6$

Р.е. $x_3 = \frac{a}{18}$. Найдем x_1 и x_2 , откуда $x_3 = \frac{a}{18}$.
 $x_1 = -\frac{1}{18}x_3 + \frac{1}{18}a = -\frac{1}{18} \cdot \frac{a}{18} + \frac{1}{18}a = \frac{17}{324}a$

решив уравнения: $\frac{2}{3}x = -14x + 5$

g.e. $18x^2 - ax + 1 = 0$. No x. Break:

$\frac{1}{18} = x_1 \cdot x_2$. Согласно условиям $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$:
 $\frac{1}{18} = \frac{1}{2 \cdot 3^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$ Тогда $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{3}, x_3 = \frac{1}{3}$

$$X_1 = \frac{X_3}{3} - \frac{a}{54}; \quad X_2 = \frac{2}{3} X_3 = \frac{a}{27} \quad \text{покажем:}$$

$$1/14 = \frac{C}{54.22}$$

$$18a^2 = 54.27$$

$$C_1^2 = 81$$

$$a = \frac{1}{-}$$

$c_1^2 = 81$
 $a = \pm 9$. Проверим второе условие 8.

Вместо угла кауторого $\frac{9}{18} = \frac{9}{54} + \frac{9}{27}$ - верно. 2) $a = -9$

$-\frac{9}{18} = -\frac{9}{54} - \frac{9}{27} - 6.9 \text{ ав.}$

$-\frac{9}{18} = -\frac{9}{54} - \frac{9}{27} = -\frac{9}{54} - \frac{2}{3} = -\frac{9}{54} - \frac{40}{54} = -\frac{49}{54}$

$$x_1 = -46 \text{ , } x_2 = -13 \text{ - } \text{гелет}$$

Уравнения $18x^2 - 9x + 2 = 0$ и $8x^2 - 9x + 2 = 0$ являются уравнениями

мы пересечем пр.
ответ: $a = \pm 9$. $\sqrt{3}$

Итак всевозможные пары чисел a и b , где $a \in A$ и $b \in B$, образуют множество $A \times B$.
Назовем все возможные пары элементов множества A и B парами элементов множества A и B .
Получим множество $A \times B$.

Примеры:
 $\{1, 2\} \times \{a, b\} = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$
 $\{1, 2\} \times \{1, 2\} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$

Замечание: Если A и B — множества, то $A \times B$ — множество.

лист № 6.

$$2a + 2b = a + b$$

$$2a = a + b + 2b$$

$$2a = b(a + 1)$$

$$b = \frac{2a}{a+1} \text{ т.к. } b \in \mathbb{N} \text{ то } 2a : a+1 = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a \equiv 0 \pmod{a+1} \text{ т.к. } a \equiv -1 \pmod{a+1} \text{ то}$$

$$4 \equiv 0 \pmod{a+1} \text{ т.е. } 4 : a+1 \text{ т.к. } a \geq 1 \text{ то}$$

$$a+1 \geq -1 \Rightarrow \text{каждое } a+1 \text{ все } a+1$$

$$\text{таким, что } 4 : a+1 \text{ то } a+1 \in \{-1, 1, 2, 4\} \Rightarrow$$

$$\text{все значения } a \text{ это } 1, 3, 4, 6.$$

$$\text{при } a=1 \quad b=-2 \notin \mathbb{N} - \text{не подходит.}$$

$$\text{при } a=3 \quad b=6$$

$$\text{при } a=4 \quad b=4$$

$$\text{при } a=6 \quad b=3$$

одно и то же
прямоугольник

т.к. прямоугольники, согласно условию, равны то единственные возможные пары таких это 3×6 и 4×4 .

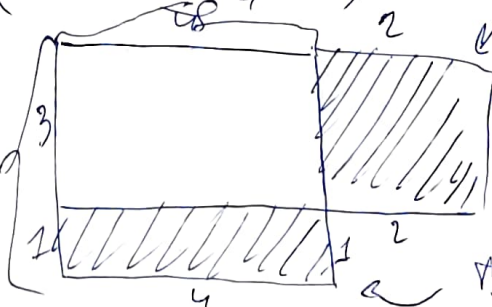
Чтобы площадь, покрывающая собой разницу между частями, покрывающей 2 раза область, покрытой частями, покрывающей 2 раза область, покрытой частями. т.к. у первого из прямоугольников длина = 4 и ширина = 4, а у второго ширина = 3 то во II прямоугольнике не помещается часть первого, равная хотя бы $4 \times 4 = 4$ кв. ед. т.е. макс.

$$\text{площадь части покрывающей 2 раза} - (2 \times 2) = 4 \text{ минимальная}$$

$$4 \text{ раз} - (6 \times 6) + (4 \times 4) = 10. \text{ т.е. } 6 \text{ кв. ед.}$$

Правильно!
Как можно
получить 10

Ответ: 10



т.е. 4
кв. ед.

Черновик

$$2a - 2b - a \cdot b = 0$$

$$2a = a \cdot b - 2b$$

$$2a = b(a - 2)$$

$$b = \frac{2a}{a-2}$$

6

$$2a : a - 2$$

$$2a \geq 0$$

$$a - 2$$

$$4 \geq 0$$

$$a - 2$$

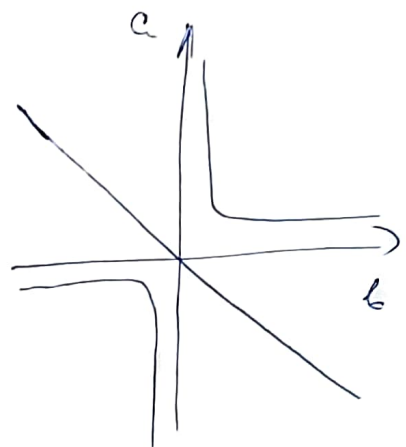
$$a - 1$$

$$4 : a - 2$$

$$2a + 2b - a \cdot b$$

$$a = \frac{1}{b}$$

$$a = -b$$



$$2b : a$$

$$2a : b$$

$$a = 2$$

$$a - 2$$

$$6 + 2b = 3b$$

$$a = 3 \quad b = 6$$

$$a = 4 \quad b = 4$$

$$a = 6 \Rightarrow b = 3$$

Черновик



$$p = 5$$



$$p = 5$$

$$x_3 = \frac{a}{18} = \frac{a}{54}; x_2 = \frac{a}{27}$$

$$\text{и тогда: } x_1 = \frac{a}{54}$$

$$a = 1$$

$$a + 2b = ab$$

$$a(a+b) = ab$$

$$a : b = a$$

$$2a : b$$

$$a = 2 \frac{a+b}{b}$$

$$b = 2 \frac{a+b}{a}$$



$$ux = x$$

$$y = x$$

$$1/2$$

$$1 = -18x^2 + ax$$

$$18x^2 - ax + 1$$

$$ux + 2b = 2b$$

$$a + 2b = b$$

$$1 : b$$

$$\frac{a}{54 \cdot 22} = \frac{1}{18}$$

$$18a^2 = 54 \cdot 22$$

$$a^2 = 81$$

$$a = \pm 9$$

Чирковск

$$x^2 - x - 2 \geq 0$$

$$(x+1)(x-2) \geq 0$$



$$x^3 + x^2 - x - 2 = 12x - 13$$

$$\begin{array}{r} x^3 + x^2 - 13x + 11 \\ \underline{x - x} \\ 2x^2 - 13x \\ \underline{2x^2 - 2x} \\ -11x + 11 \end{array} \quad \begin{array}{r} \frac{+x-1}{x^2+2x-11} \end{array}$$

$$\begin{aligned} D &= 4 + 44 = 48 \\ x_{1,2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{48}}{2} \end{aligned}$$

$$= -1 \pm \sqrt{12}$$

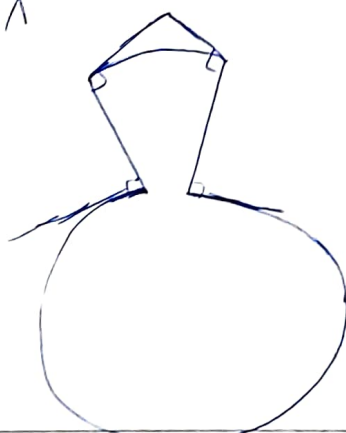
$$x^3 - x^2 + x + 2 = 12x - 13$$

$$x^3 - x^2 - 11x + 15 = 0$$

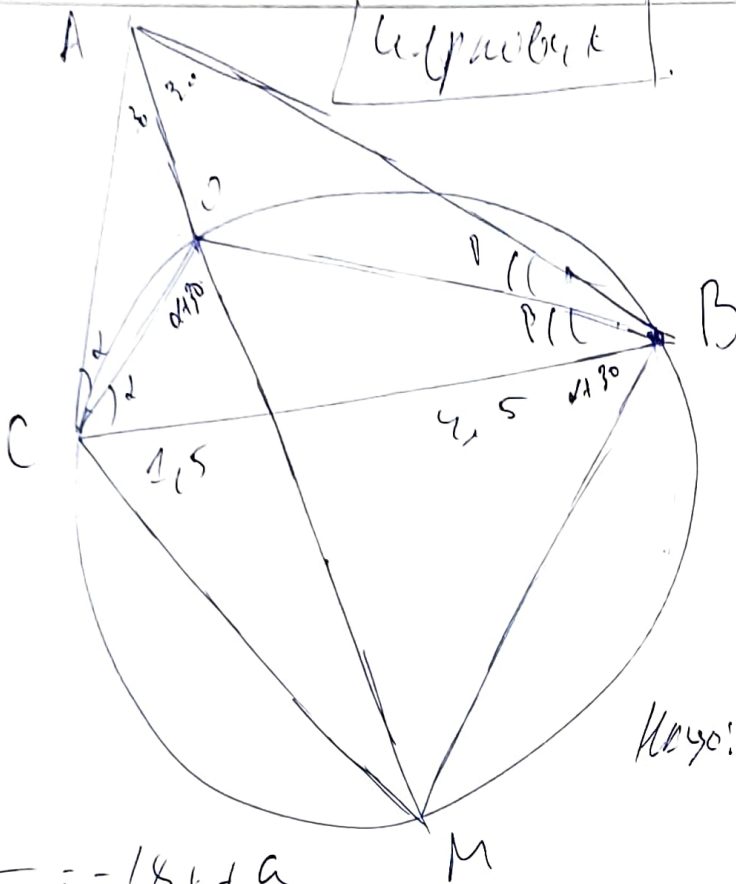
$$\begin{aligned} 27 - 9 - 33 + 15 &= \\ -42 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+1 \\ &-3 \\ &+5 \end{aligned}$$

X



К. Г. Г. Г. Г. Г.



$$x_3 = \frac{a}{18}$$

$$x_1 = \frac{a}{54} \quad x_2 = \frac{a}{36}$$

$$\frac{1}{x} = -18x + a$$

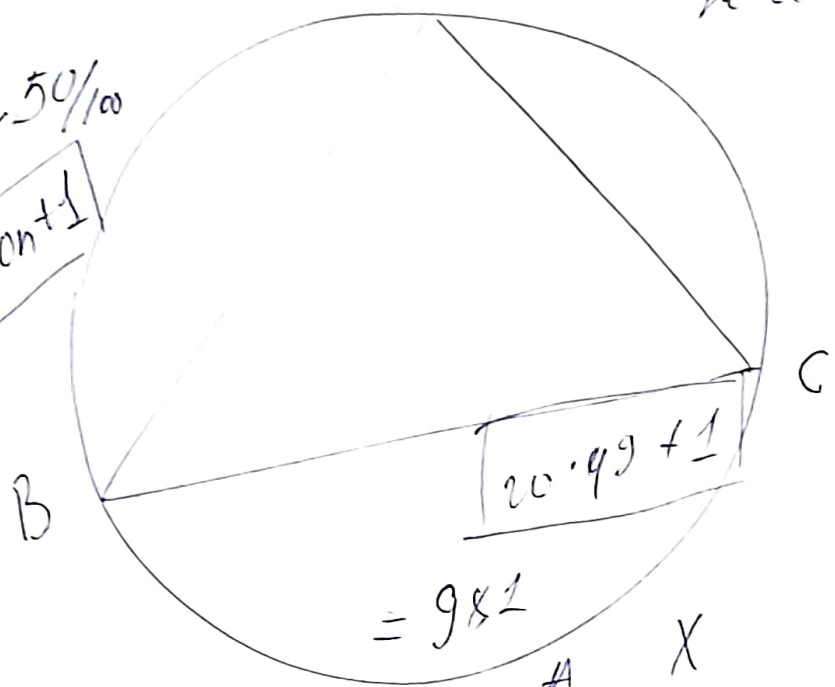
$$1 = -18x^2 + ax$$

Σ, N
pe bce A

100

1u 20: $\approx 50/100$

Beats $\frac{1}{100n+1}$



BC-6

$$AB:AC = 3:1$$
 $2x$

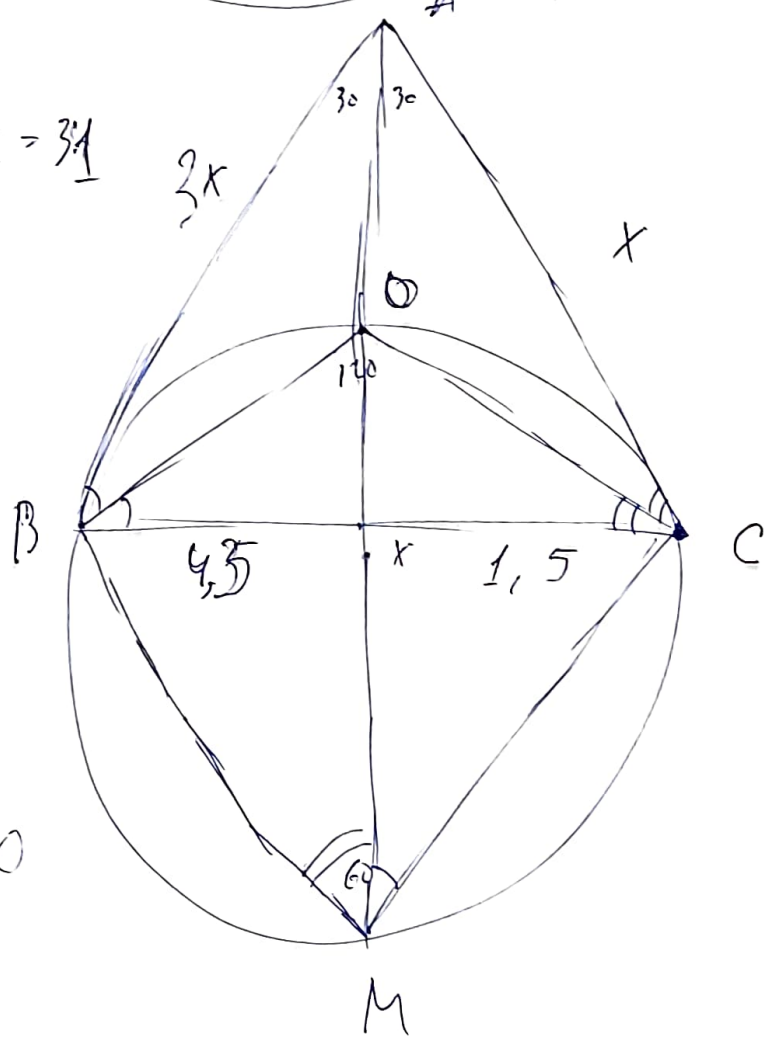
Q

120

$$n = 10$$

go 2

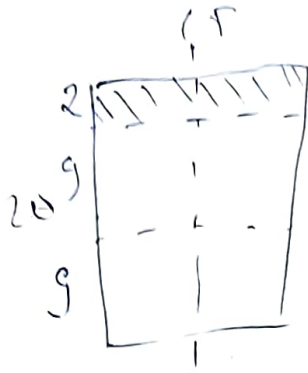
21000



ЧЕРТОВИЧКА

A и B

≤ 2
разрез
300 см²



B

$$x_3 = \frac{a}{18}$$

$$\leq 1/10$$

$$\pm 1$$

$$\leq 300 \text{ см}^2$$

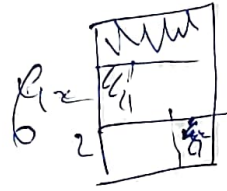
$$\pm 3$$

$$\pm 5$$

разрез, width less than 3 cm²

$$x^3 - 13x^2 - x - 15 = 0$$

B



125 -

15

9

