37-60-97-16

0 376097 160003

37-60-97-16
(158.3)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 7-8

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Даниловой Веры Владимировны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

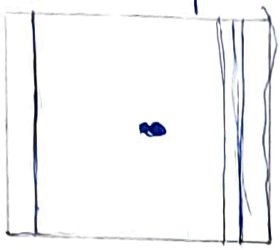
Дата

«13» апреля 2025 года

Подпись участника

37-60-97-16 (158.3)

Лист 1. Черновик.



$b+$ $a+$ 10

шестьсот пять

$a=b+1$

$\overline{ab9}$ $\overline{abc}$ $\overline{ab+1\,0}$

$a+b+1$

$a+b+9$

$a+1+b+1$

$a+b+$

$64 \times 64 = 256$

581

a ...9 0

279 280

289 300

99 189 190

$b+1$ b 9

$b+1+b \geq 9$

$b \geq 4$

$4^{3^a} = 4^9$

$4096 \times 8 = 32768$

79

549 550

8^{2025}

$2025 \equiv 0 \mod 25$

5 10 20 25 30 35

8 4 2 6 8 4

$512 \times 8 = 4096$

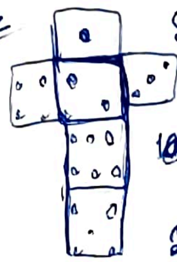
11

$99 \times 9 = 891$

8

n

20



$100n+1 =$ $20n+1$

$1+\ldots+6=21-7=14$

21 жук всего.

10×100

1	8
2	64
3	512
4	6
5	8
6	4
7	2
8	6
9	8
10	4
11	2
12	6
13	8
14	4
15	2
16	6

2

$\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$

могли на $1-2+3+4+5=14$

могли на 2 –

$50 \cdot 19 + 51 =$

50 51 $=950+51=1001$

$9 \cdot 99 + 10 =$

~~891+10~~ $=$ ≥ 901 балл. 44 45

$900 / 20 = 45$

2

45×19

$\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{6}{7}$ $\frac{7}{8}$ $\frac{8}{9}$

2 где снаружи.

ПЛЛПЛЛПЛПП

ЛЛ ПЛП ПЛП П Л ПЛЛПЛ

ЛЛ П П ЛЛП ЛЛП Л

ПП.

ЛЛ ПЛЛП Л ПЛП П 4

12

ЛЛ ПЛЛП ПЛП ЛП 1

ЛЛ П ПЛЛП П Л П 1

Лист 2. Чистовик

№2. Заметим, что у счастливых чисел всегда чётная сумма цифр. У двух последовательных чисел сумма цифр у каждого может быть чётной тогда и только тогда, когда одно из них заканчивается на 9, а другое — на 0. Докажем, что суперсчастливых двузначных чисел нет. Если следующее за ним — двузначное, то оно имеет вид $\overline{a0}$, и не может быть счастливым. Если 100, то оно также не счастливое. Теперь рассмотрим трёхзначные числа. Заметим, что следующее за суперсчастливым не имеет вид $\overline{a00}$. Тогда наше суперсчастливое имеет вид $\overline{ab9}$, а следующее — $\overline{a\,b{+}1\,0}$. Т.к. следующее — счастливое, $a=b+1$. Т.к. $\overline{ab9}$ — счастливое, $a+b$ не меньше 9, т.е. $b+b+1 \geq 9 \Rightarrow 2b \geq 8 \Rightarrow b \geq 4$. Значит, минимальное суперсчастливое число — 549.

Ответ: 549.

№3. Посмотрим на степени числа 8. $8^1=8$, $8^2=64$, $8^3=512$, $8^4=4096$, $8^5=32768$. Далее 8^6 будет заканчиваться на 4, т.к. $8\cdot 8=64$, 8^7 — на 2 т.к. $4\times 8=32$ и т.д. Таким образом, степени 8 с показателем $\equiv 1 \bmod 4$ заканчиваются на 8, $\equiv 2 \bmod 4$ — на 4, $\equiv 3 \bmod 4$ — на 2, $\equiv 0 \bmod 4$ — на 6. Посмотрим на степени 8 с показателями, кратными 5. $5\equiv 1 \bmod 4$, $10 \equiv 2 \bmod 4$, $15 \equiv 3 \bmod 4$, $20 \equiv 0 \bmod 4$, $25 \equiv 1 \bmod 4$, $30 \equiv 2 \bmod 4$ и т.д. Значит, все степени, показатели которых ~~кратны 25~~ $\equiv 5 \bmod 20$, заканчиваются на 8.

2025^{2025} ~~кратно 25~~ $\equiv 5 \bmod 20$ $\Rightarrow 8^{2025^{2025}}$ заканчивается на 8.

Ответ: на 8.

№5. Всего жуков $1+2+3+4+5+6=21$. Заметим, что максимальное число жуков, которые переползли на какую-то грань, равно количеству жуков до броска кубика на соседних с ней гранях. Для любой грани это число — 14. Жуки, которые раньше сидели на этой грани, теперь сползли, значит, максимум жуков на одной грани — 14. Это возможно, например, все с граней, где было 2, 3, 4, 5, ушли на грань, где был 1, а он и 6 жуков с грани, где было 6, ушли туда, где раньше было 2.

Ответ: 14.

Лист 3. Чистовик.

№6. Пусть за решение одной задачи даётся 1 балл. Если есть задача, которую решило не менее половины класса, то всего за какую-то задачу дети получили ≥ 10 баллов. Из условия также следует, что не все дети решили поровну задач, т.е. всего баллов $\geq 20n+1$. Теперь предположим, что такой задачи не нашлось. Тогда за каждую задачу было получено ≤ 9 баллов, и всего баллов $\leq 9 \cdot 100 = 900$. Если было бы ≥ 901 балл, то по принципу Дирихле нашлась бы нужная задача. Значит, минимум баллов всего $- 901 = 20n+1$. Значит, $n=45$.

Ответ: при $n=45$.

№7. Для начала просто поставим правые пальцы: П П.П П П. Теперь посмотрим как мы можем расставить левые пальцы. Если между никакими двумя правыми пальцами нет левых, то есть 2 такие расстановки: ЛЛЛЛ ППППП и симметричная ей. Если один левый стоит между двумя правыми, ~~то там~~ а все остальные левые по краям, то такое невозможно, т.к. какие-то ≥ 3 правые пальца будут стоять между двумя левыми. ~~Если 2 левых стоят внутри, а остальные по краям, есть 4 расстановки: ЛЛПЛППЛППЛ ЛЛППЛППЛПЛ~~ ~~Если 3 левых стоят внутри, а 2 по краям, есть~~ Если 2 левых стоят внутри, а 3 по краям, то есть несколько вариантов: ЛЛПЛППЛППЛ, ЛЛППЛППЛПЛ, ЛЛЛПЛППЛПП, ЛЛЛППЛПЛПП, ЛЛЛППЛППЛП и симметричные — всего 10 вариантов. Если 3 левых стоят внутри, а 2 ~~снаружи~~ по краям, возможен случай, когда ~~все~~ левые внутри стоят по одному в промежутках между правыми. Таких ситуаций 12. Если два внутренних стоят вместе а один где-то ещё, таких ситуаций 12. ~~Ещё возможна расстановка ЛП ЛЛЛ Л~~ Всего таких $12+12=24$. Если один с краю, а 4 внутри, вариантов всего 30. Если все внутри, то таких возможных ситуаций 16.

Всего способов $2+10+24+30+16=40+40+2=82$

Ответ: 82 способа.

Лист 4. Чистовик.

Б4. Козе выгодно пойти через центр одной из окружностей до края этой окружности. Она пройдёт 3 м. Если на 1 метре получится одной половинкой x травы, то она съест $4x$.

Лист 5. Черновик.

4×2

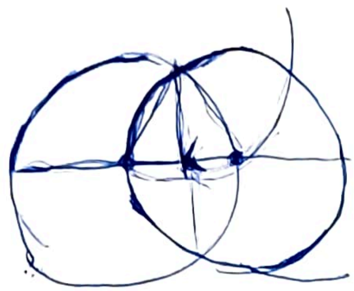
$2\times2\times2$

2

$(1+12+2)\cdot 2=30$

4

~~4+12~~=16 4+



1 $2+2=4$

$2\cdot2=4$

2 2 $\sqrt{3\cdot2}$ 2x