0 060806 150002

06-08-06-15
(161.9)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 КЛАСС

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов по математике
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Дубасова Сергея Александровича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
06-08-06-15 (161.9)	65	15	15	15	15	0	5	0	0

06-08-06-15 (161.9)

[illegible] [illegible]

Шестовских

Задача 1

$$\sqrt{4x^2+12x+9}+\sqrt{x^2+6x+9}+\left(\sqrt{x+2}\right)^2=\sqrt{4+\sqrt{12}}-\sqrt{4-\sqrt{12}}$$

$$k=\sqrt{4+\sqrt{12}}-\sqrt{4-\sqrt{12}}$$

$$k^2=4+\sqrt{12}+4-\sqrt{12}-2\sqrt{16-12}$$

$$k^2=8-2\sqrt{4}=8-4=4$$

$$k>0 \Rightarrow k=2$$

$$\begin{cases}\sqrt{(2x+3)^2}+\sqrt{(x+3)^2}+(x+2)=2\\ x\geq-2\end{cases}$$

$$|2x+3|+|x+3|+x=0$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geq-\frac{3}{2}\\ x\geq-3\\ 2x+3+x+3+x=0\end{cases}\\ \begin{cases}x\leq-\frac{3}{2}\\ x\geq-3\\ -2x-3+x+3+x=0\end{cases}\\ \begin{cases}x\leq-\frac{3}{2}\\ x\leq-3\\ -2x-3-x-3+x=0\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geq-\frac{3}{2}\\ 4x+6=0\end{cases}\\ \begin{cases}-3\leq x\leq-\frac{3}{2}\\ 0=0\end{cases}\\ \begin{cases}x\leq-3\\ -2x-6=0\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geq-\frac{3}{2}\\ x=-\frac{3}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}-3\leq x\leq-\frac{3}{2}\\ 0=0\end{cases}\\ \begin{cases}x\leq-3\\ x=3\end{cases}\\ x\geq-2\end{array}\right.$$

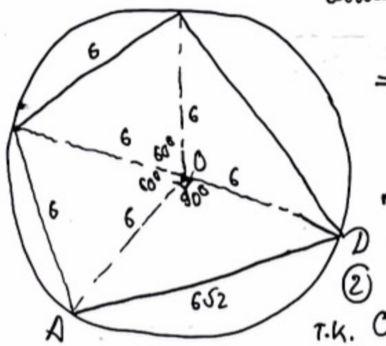
$$\Rightarrow \quad x\in\left[-2;-\frac{3}{2}\right]$$

Ответ: $x\in\left[-2;-\frac{3}{2}\right]$

Задача 3

Чистовик

① Рассмотрим первый случай, когда две стороны четырехугольника, равные 6, являются соседними сторонами



$AB = BC = 6$

$\Rightarrow AD$ или $DC = 6\sqrt{2}$,

Обе эти ситуации симметричны (на значение площади не повлияют).

$\Rightarrow$ Пусть $AD = 6\sqrt{2}$

② Несложно заметить, что т.к. $OB = OC = OD = OA = 6$ (Радиусы)

$\Rightarrow \triangle ABO = \triangle BCO$ (по трем сторонам) $\Rightarrow \angle AOB = \angle BOC = 60°$

также несложно заметим, что $\angle AOD = 90°$ т.к. $AD^2 = AO^2 + OD^2$

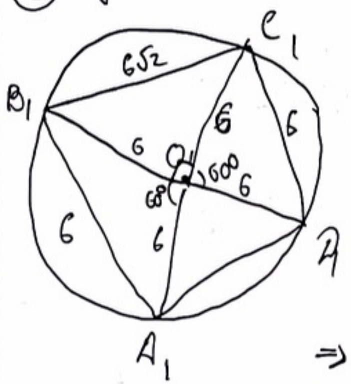
$\Rightarrow \angle COD = 360° - 60° - 60° - 90° = 360° - 90° - 90° - 30° = 150°$

⑤ если разбить $ABCD$ на 4 треугольника, то

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\left(OA \cdot OB \cdot \sin 60° + OB \cdot OC \cdot \sin 60° + OA \cdot OD \cdot \sin 90° + OD \cdot OC \cdot \sin 150°\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(36\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{1}{2}\right)\right) = 18 \cdot \left(\sqrt{3} + \frac{3}{2}\right) = 18\sqrt{3} + 27$$

② Случай когда стороны, равные 6 не являются соседними



$AB_1 = C_1D_1 = 6$. По аналогии с пунктом 1

$\angle B_1C_1A_1 = \angle O_1C_1D_1 = 60°$

$\angle BOC_1 = 90° \Rightarrow \angle A_1OD_1 = 150°$

$\Rightarrow \triangle AOB_1 = \triangle AOB$ (по трем сторонам)

$\triangle C_1D_1O_1 = \triangle COB$ (по трем сторонам)

$\triangle B_1OC_1 = \triangle ADO$ (по трем сторонам)

$\triangle COD = \triangle A_1O_1D_1$ (по двум сторонам и углу)

$\Rightarrow S_{ABCD} = S_{A_1B_1C_1D_1} = 18\sqrt{3} + 27$

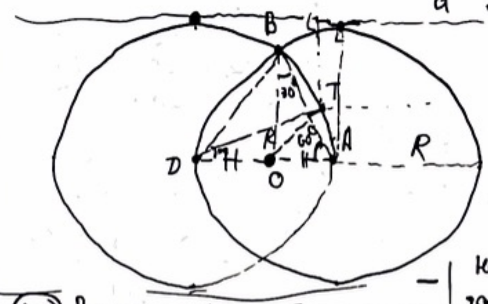
$\Rightarrow$ Максимальная площадь $18\sqrt{3} + 27$

Ответ: $18\sqrt{3} + 27$

06-08-06-15
(161.9)

Задача №6

Чистовик



① Рассмотрим возможные маршруты мыши.

(1.1) Мышь бежит только в зоне пересечения кругов, тогда кратчайший маршрут – это $BO = R \cdot \sin 60° = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

За этом маршрут мышь намокнет на $N_1 = 2k \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2}$,

где k – это показатель намокание от одной поливалки за единицу пути.

(1.2) Второй очевидный маршрут – когда мышь добегает до A по зоне одной поливалки и пробегает AO в зоне двух.

$N_2 = k \cdot R + 2k \cdot R \cdot \cos 60°$

$N_2 = k \cdot R + k \cdot R = 2kR$, что уже больше чем $R\sqrt{3} \cdot k$

(1.3) теперь нужно как-то исследовать оставшиеся маршруты. Достаточно рассмотреть случай, когда мышь пробегает на одну из точек дуги AB в зоне одной поливалке и потом по прямой бежит в точку O в зоне двух поливалок.

① Очевидно что первая часть маршрута будет кратчайшей только если направлена перпендикулярно к прямой a (общей касательной этих окружностей)

② $\angle AOT \in (0°; 60°)$ т.к. $\triangle ADB$ (равносторонний)

$$OT^2 = R^2 + \frac{R^2}{2} - 2\cos\alpha \cdot \frac{R^2}{2} = \frac{3R^2}{2} - 2\cos\alpha \cdot R^2$$

$\alpha = \frac{\angle AOT}{2}$ $\quad$ $OT^2 = R^2\left(\frac{3}{2} - \cos\alpha\right)$

$\Rightarrow \alpha \in (0; 30°)$

OT^2 возрастает с возрастанием α

$\Rightarrow$ ③ Путь по которому должна бежать мышь будет путем из пункта ① и равняется $\frac{R\sqrt{3}}{2}$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (4 - 2\sqrt{2}) = \sqrt{3} \cdot (2 - \sqrt{2}) = 2\sqrt{3} - \sqrt{6}$$

$\boxed{\text{Ответ: } 2\sqrt{3} - \sqrt{6}}$

Задача 2 Чистовик

$2^{5-\frac{1}{x}} \geq a + \sin 2^x$

При $x>0$

$2^{5-\frac{1}{x}}$ – монотонно возрастает

2^x – монотонно возрастает.

$\sin(2^x) \in [-1;1]$

$f(x) = 2^{5-\frac{1}{x}}$

$\varphi(x) = \sin 2^x + a$

$\Rightarrow$ ~~f(x) должна возрастать~~ $\varphi(x)$

$a>0$ по условию

$\varphi(x)$ имеет первый максимум

при $2^x = \frac{\pi}{2}$ $\varphi(\frac{\pi}{2}) = a+1$ $\frac{2}{\pi} < \frac{2}{3} \Rightarrow 5-\frac{2}{3} > 3$

$f(\frac{\pi}{2}) = 2^{5-\frac{1}{\frac{\pi}{2}}} = 2^{5-\frac{2}{\pi}} > 8$

Т.к при $x \to +\infty$

$2^{5-\frac{1}{x}}$ будет стремиться к 32 сверху

а $\varphi(x) = a + \sin 2x$ стремиться к 32 снизу

$\Rightarrow a = 33$ подходит

$\Downarrow$

$\boxed{\text{Ответ } a = 33}$

Получается, чтобы небыло решений

$f(x) < \varphi(x)$ должно выполняться при всех x

при $x \to +\infty$

$2^{5-\frac{1}{x}} \to 2^5 = 32$

$2^x \to +\infty$ $\sin 2^x \in [-1;1]$

$\Rightarrow f(+\infty) < \varphi(+\infty)$ т.к при очень больших икс $\sin(2^x) \in [-1;1]$ и минимальное значение -1

$32 <$ $a-1$ ~~необходимо условие~~

$a \geq 33$ $\Rightarrow$ ~~Ответ: $a \geq 33$~~

06-08-06-15 (161.9)

Задача 4 Чистовик

$\cos^3(\pi x) - \cos^3(2\pi x) + \cos^3(4\pi x) = (\cos(\pi x) - \cos(2\pi x) + \cos(4\pi x))^3$

$\pi x = t$

$(a-b+c)^3 = (a-b+c)(a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ac) =$

$= a^3 + b^2a + c^2a - 2a^2b - 2abc + 2a^2c - a^2b - b^3 - bc^2 + 2ab^2 + 2b^2c - 2abc + a^2c + b^2c + c^3 - 2abc - 2bc^2 + 2ac^2 =$

$= a^3 - b^3 + c^3 + 3a^2(-b+c) + 3b^2(a+c) + 3c^2(a-b) - 6abc$

$a^3 - b^3 + c^3 = (a-b+c)^3$

$a^3 - b^3 + c^3 = a^3 - b^3 + c^3 + 3a^2(c-b) + 3b^2(a+c) + 3c^2(a-b) - 6abc$

$3a^2(c-b) + 3b^2(a+c) + 3c^2(a-b) = 6abc$

$a^2c - a^2b + b^2a + b^2c + c^2a - c^2b = 2abc$

$ac(a+c) + ab(b-a) + bc(b-c) = 2abc$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$

$\Rightarrow \cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$\cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$

$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$

$\cos\pi x \cdot \cos 2\pi x = \frac{1}{2}(\cos 3\pi x + \cos \pi x)$

$\cos t + \cos 4t = 2\cos\left(\frac{5t}{2}\right)\cdot\cos\frac{3t}{2}$

$\cos^3 t - \cos^3(2t) = (\cos t - \cos 2t + \cos 4t)^3 - \cos^3 4t$

$(\cos t - \cos 2t)(\cos^2 t + (\cos t \cdot \cos 2t) + \cos^2 2t) = (\cos t - \cos 2t)($здесь остаток от разности кубов$)$

$\Rightarrow$

$(\cos t - \cos 2t)(\cos^2 2t + \cos^2 t + \cos t\cdot\cos 2t - ((\cos t - \cos 2t + \cos 4t)^2 + (\cos t - \cos 2t + \cos 4t)\cdot\cos 4t + \cos^2 4t))$

Продолжение дальше.

Задача 5

Чистовик

$f_1(x) = (x+a_1)(x^2+b_1x+6)$

$f_2(x) = (x+a_2)(x^2+b_2x+14)$

$f_3(x) = (x+a_3)(x^2+b_3x+21)$

$$\begin{cases} (x+a_1)(x^2+b_1x+6) = (x+a_2)(x^2+b_2x+14) \\ (x+a_2)(x^2+b_2x+14) = (x+a_3)(x^2+b_3x+21) \\ (x+a_1)(x^2+b_1x+6) = (x+a_3)(x^2+b_3x+21) \end{cases}$$

Для любых действительных x

① Подставим $x=0$

$$\begin{cases} 6a_1 = 14a_2 \\ 14a_2 = 21a_3 \\ 6a_1 = 21a_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a_1 = 7a_2 \\ 2a_2 = 3a_3 \\ 2a_1 = 7a_3 \end{cases}$$

② Подставим $x=1$

$(a_1+1)(b_1+7) = (a_2+1)(b_2+15)$

$(a_2+1)(b_2+15) = (a_3+1)(b_3+22)$

③ каждая функция представляет из себя кубическую параболу $\Rightarrow$ чтобы при всех действительных x ~~значение~~ функций были равными функции должны быть равны.

$f_1(x) = x^3 + b_1x^2 + 6x + a_1x^2 + a_1b_1x + 6a_1$

$f_1(x) = x^3 + x^2(a_1+b_1) + x(a_1b_1+6) + 6a_1$

$f_2(x) = x^3 + x^2(a_2+b_2) + x(a_2b_2+14) + 14a_2$

$f_3(x) = x^3 + x^2(a_3+b_3) + x(a_3b_3+21) + 21a_3$

Необходимое условие

$$\begin{cases} 6a_1 = 14a_2 = 21a_3 \\ a_1b_1 + 6 = a_2b_2 + 14 = a_3b_3 + 21 \\ a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = a_3 + b_3 \end{cases}$$

Получается необходимо найти $3(a_1+b_1)$

① если $a_3 \cdot b_3$ нечетно, то $a_2 \cdot b_2$ четно, $a_1 \cdot b_1$ четно, a_3 нечетно, b_3 нечетно

$\Rightarrow a_2; b_2; a_1; b_1$ четны

$\Rightarrow 6a_1$ - четно, $21a_3$ нечетно $\Rightarrow$ равенства быть не может

② если $a_3 \cdot b_3$ - четно $\Rightarrow a_2 \cdot b_2$ и $a_1 \cdot b_1$ нечетны

$\Rightarrow a_2; b_2; a_1; b_1$ нечетны $\Rightarrow$ тогда равенство возможно

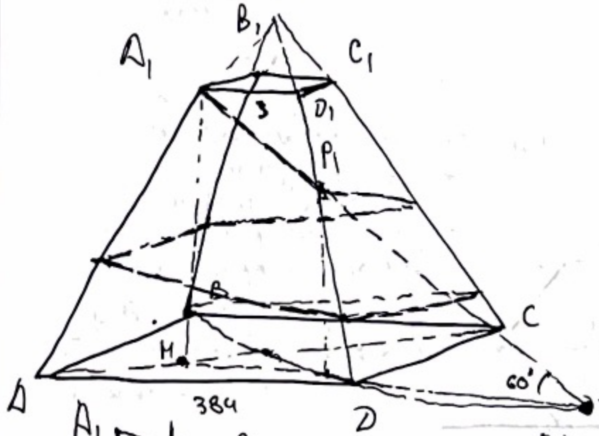
$\Rightarrow a_1; b_1; a_2; b_2$ - нечетны

$a_3; b_3$ - четны

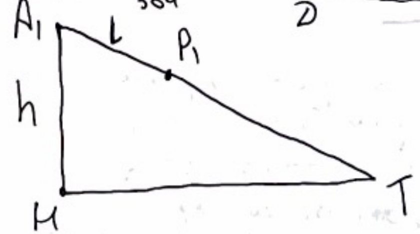
Задача 7

Чистовик

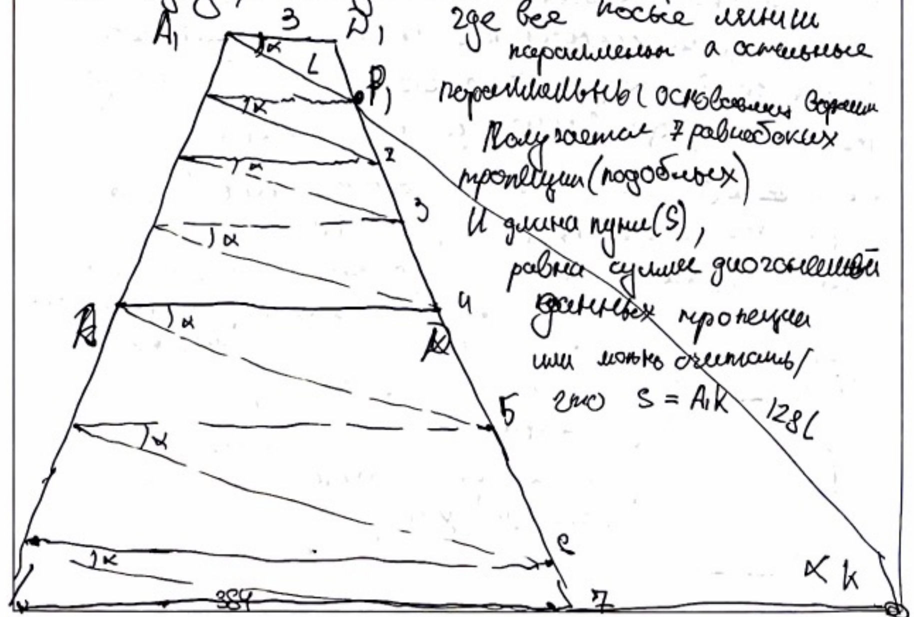
h - высота пирамиды



A_1H является высотой пирамиды



если перенести путь по каждой плоскости на одну, то получим такую картину.



где все косые линии параллельны а остальные параллельны основаниям боковых граней

Получается 7 равнобоких трапеций (подобных)

И длина пути (S), равна сумме диагоналей данных трапеций

или можно считать, что $S = A_1K$

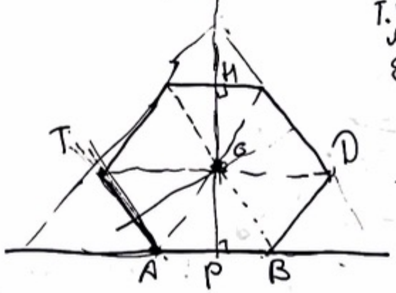
Задача 8 Рассмотрим в случае правильного n-угольника

Чистовик

~~Если n четное~~

1) Если n четно как в нашем случае

Рассмотрим на случае шестиугольника



Т.к. эта фигура имеет много осей симметрии достаточно рассмотреть количество треугольников в которых одна из сторо лежит на одной заданной стороне многоугольника

2) Причем также достаточно рассмотреть все треугольники у которых вторая сторона лежит на одно из сторон многоугольника, лежащих по одну сторону от оси симметрии многоугольника перпендикулярной первой стороне треугольника на моем рисунке это прямая PH

3) Чтобы при пересечении получился треугольник, нужно взять 3 сторону так, чтобы она пересекала вторую стойкие стороны от первой, удлиним многоугольник (на представленном рисунке выше),

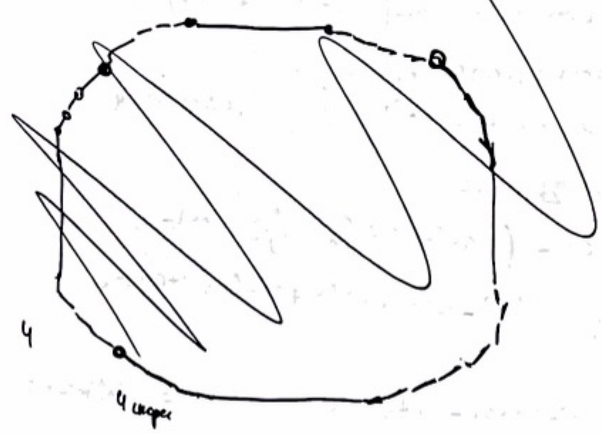
~~...~~ 4) также достаточно рассмотреть вторую сторону так чтобы она была левее PH и ниже TD

5) Теперь перенесем все эти данные на 36-угольник 36 делится на четыре => есть перпендикулярные стороны то есть многоугольник выглядит так

пунктиром здесь обозначено несколько сторон, причем в каждой пунктирной области попадает $(36-4):4 = 8$ сторон

6) Причем 8 четно => нет сторон под углом 45°

Чистовик



Задача 7 продолжение

Т.к $\triangle AP_1D_1 \sim \triangle KP_1D$

$\Rightarrow \frac{AP_1}{KP_1} = \frac{3}{384} \Rightarrow \frac{KP_1}{A_1P_1} = 128$

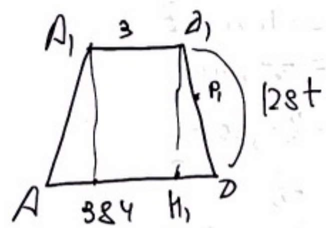
из $\triangle HAT$ получаем

$h = A_1T \cdot \sin 60° = \cancel{\ldots}$

$\boxed{h = A_1T \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$ где A_1T — длина пути $\Rightarrow$ $\boxed{h = S \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$

$D_1P_1 = t \Rightarrow P_1D = 128t$

$H_1D = \frac{384-3}{2} = \frac{381}{2} = 190,5$



Ответ $\frac{S\sqrt{3}}{2}$ где S — длина пути

Номер 4 Продолжение

Черновик

$(\cos t-\cos 2t)\left(\cos^2 2t+\cos^2 t+\cos t\cdot\cos 2t-\left((\cos t-\cos 2t+\cos 4t\right)^2+\right.$

$\left.+(\cos t-\cos 2t+\cos 4t)\cdot\cos 4t+\cos^2 4t\right)=0$

$\cancel{(\cos t-\cos 2t)\left(\cos^2 t+\cos^2 t+\cos t\cos 2t-\left(\cos^2 t+\cos^2 2t+\cos^2 4t+\cos t\cos 4t\right.\right.}$

$\cancel{-\cos t\cdot\cos 2t-\cos 2t\cdot\cos 4t}$

$(a-b)\left(a^2+b^2+ab-\left((a-b+c)^2+(a-b+c)\cdot c+c^2\right)=0\right.$

$(a-b)\left(a^2+b^2+ab-\left(a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc+ac-bc+c^2+c^2\right)\right)=0$

$\boxed{(a-b+c)(a-b+c)=a^2-ab+ac-ab+b^2-bc+ac-bc+c^2=a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc}$

$(a-b)\left(\cancel{a^2}+\cancel{b^2}+ab-\cancel{a^2}-\cancel{b^2}-3c^2+2ab-3ac+3bc\right)=0$

$(a-b)\left(3ab-3ac+3bc-3c^2\right)=0$

$(a-b)\left(ab-ac+bc-c^2\right)=0$

$(a-b)\left(b(a+c)-c(a+c)\right)=0$

$(a-b)(a+c)(b-c)=0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\pi x=\cos 2\pi x\\ \cos\pi x=-\cos 4\pi x\Rightarrow\cos(\pi x)=\cos(\pi-4\pi x)\\ \cos 2\pi x=\cos 4\pi x\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}\pi x=2\pi x+2\pi n,\ n\in Z\\ \pi x=-2\pi x+2\pi k,\ k\in Z\\ \pi x=\pi-4\pi x+2\pi d,\ d\in Z\\ \pi x=4\pi x-\pi+2\pi l,\ l\in Z\\ 2\pi x=4\pi x+2\pi r,\ r\in Z\\ 2\pi x=-4\pi x+2\pi m,\ m\in Z\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=2n_1,\ n_1\in Z\\ x=\frac{2k}{3}\\ x=\frac{2d+1}{5}\\ x=\frac{1-2l_1}{3},\ l_1\in Z\\ x=-r_1,\ r_1\in Z\\ x=\frac{m}{3},\ m\in Z\end{array}\right.$

Достаточно рассмотреть $\left[\begin{array}{l}x=\frac{m}{3},\ m\in Z\\ x=\frac{2d+1}{5},\ m\in Z\\ x=\frac{1-2l_1}{3},\ t_1\in Z\end{array}\right.$

Номер 4 продолжение

Чистовик

① $x=\frac{m}{3}$ $\quad 1{,}8\cdot 3=5{,}4$

$0{,}3\le\frac{m}{3}\le 1{,}8$

$m=1$
$m=2$
$m=3 \Rightarrow$
$m=4$
$m=5$

$x=\frac{1}{3}$
$x=\frac{2}{3}$
$x=1$
$x=\frac{4}{3}$
$x=\frac{5}{3}$

② $x=\frac{2d+1}{5}$

$0{,}3\le\frac{2d+1}{5}\le 1{,}8$

$1{,}5\le 2d+1\le 9$

$0{,}5\le 2d\le 8$

$d=1$
$d=2$
$d=3$
$d=4$

$x=\frac{3}{5}$
$x=1$
$x=\frac{7}{5}$
$x=\frac{9}{5}$

③ $x=\frac{1-2l_1}{3}$

$0{,}3\le\frac{1-2l_1}{3}\le 1{,}8$

$0{,}9\le 1-2l_1\le 5{,}4$

$-0{,}1\le -2l_1\le 4{,}4$

$0{,}1\ \ge 2l_1\ge -4{,}4$

$-2{,}2\le l_1\le 0{,}05$

$l_1=0$
$l_1=-1 \Rightarrow$
$l_1=-2$

$x=\frac{1}{3}$
$x=1$
$x=\frac{5}{3}$

Объединив 3 случая получаем

$\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{3}\\ x=\frac{2}{3}\\ x=1\\ x=\frac{4}{3}\\ x=\frac{5}{3}\\ x=\frac{3}{5}\\ x=\frac{7}{5}\\ x=\frac{9}{5}\end{array}\right.$

Ответ