

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10 КЛАСС

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников "Ломоносов"
наименование олимпиады

по МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

Дроздова Дарья Дмитриевна
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

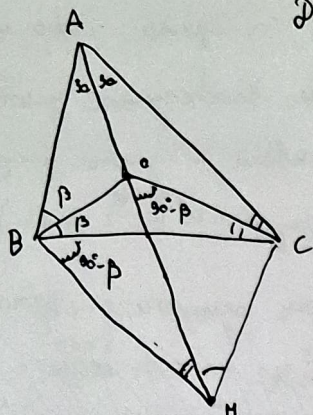
«13» апреля 2025 года

Подпись участника

Дм

70 (семьдесят)

Чистовик



Дано: $\angle CAB = 60^\circ$; $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$; $BC = 6$; $BOCH$ - вписанный четырехугольник

Итого: Держу 0 М

Решение: Пусть $\angle ABO = \beta = \angle CBO$
 $\angle ACO = \alpha = \angle BCO$

$$\angle BCC = 90^\circ + \frac{\angle BAC}{2} = \underline{120^\circ}$$

По т. Синуса в $\triangle BOC$, $\frac{BC}{\sin \angle BOC} = 2R$,

где R - радиус тисаковой окружности $\Delta\theta_{\text{пол}}$.

$$2R = \frac{6}{\sqrt{3/2}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = \underline{4\sqrt{3}}; \quad \angle AOC = 90^\circ + \frac{\angle ABC}{2} = 90^\circ + \beta \Rightarrow$$

$\angle COH = 90^\circ - \beta$, как смежные с $\angle AOC$. $\Rightarrow$ Т.к. четырехугольник

Восм $\rightarrow$ вписанный, $\angle CCM = \angle CBM = 90^\circ - \beta \Rightarrow \angle CBM = 90^\circ - \beta + \beta = 90^\circ$

ОН - диаметр в описанной окружности $\triangle BOC \Rightarrow OH = 2R = 4\sqrt{3}$

Orbit : $4\sqrt{3}$

3. $\sqrt{\cos x} + 2\sqrt{-3 \sin x} > 2\sqrt{\cos x} - \sqrt{-3 \sin x}$

Пусть $\sqrt{\cos x} = a$; $\sqrt{-3 \sin x} = b$ $a, b \geq 0 \Rightarrow$

$$\text{QD3: } \begin{cases} \cos x \geq 0 \\ \sin x \leq 0 \\ c + 2b \geq a \\ a - b \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [\frac{3\sqrt{c}}{2}; 2\sqrt{c}] + 2\sqrt{c}k, k \in \mathbb{Z} \\ \sqrt{\cos x + 2\sqrt{3}\sin x} \geq 0 \Rightarrow \forall x, \sqrt{c} \cdot \cos x \geq 0 \Rightarrow x \in [\arctg(-\frac{1}{3}); 0] + 2\sqrt{c}k, k \in \mathbb{Z} \\ x \geq -\frac{1}{3} \Rightarrow x \geq \arctg(-\frac{1}{3}) \end{cases}$$

$$\sqrt{a+2b} > 2\sqrt{a-b}$$

$$a + 2b > 4(a - b)$$

$$6b > 3a$$

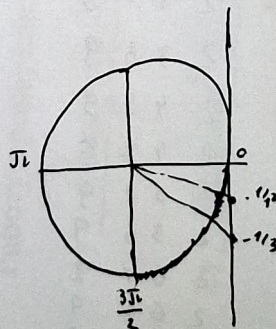
$2b > a$

$$2\sqrt{-3\sin x} > \sqrt{\cos x}$$

$$-1 \leq \sinh x < \cosh x$$

$$t_{gx} < -1/12$$

$$x < \arctan(-1/2)$$



$$(1) \quad a - b \geq 0$$

$$\sqrt{\cos x} \geq \sqrt{-3e^{4x}}$$

$$\cos x \geq -3 \sin^4 x$$

$$x_3 \geq -1/3$$

1

$$x \geq \text{outg}(-1/3)$$

Antwort: $\left(x \in \left[\arctan\left(-\frac{1}{5}\right), \arctan\left(-\frac{1}{12}\right) \right) \right)$

$$x \in [\arctg(-1/3) + 2\pi k; \arctg(-1/2) + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}$$

Условие

12

Задача 7

Если число x не оканчивается на 9, то сумма цифр чисел x и $(x+1)$ имеет разную чётность. Требуется найти условие для того, чтобы число x было суперсчастливым — суммы цифр x и $(x+1)$ должны быть чётными (чтобы разделить на 2 части)

Для трёхзначных чисел, по 2-м цифрам однозначно строится

Трёхзначное число	Суперсчаст.?
4 5 9	X
5 4 9	✓
6 3 9	X
7 2 9	X
8 1 9	X
9 0 9	X

Число

1 0 8 9	X
1 1 7 9	X
1 1 9 9	X
1 2 6 9	X
1 2 8 9	X
1 3 5 9	X
1 3 7 9	X
1 4 4 9	✓
1 4 6 9	X
1 5 3 9	✓
1 5 5 9	✓
1 6 2 9	X
1 6 4 9	✓
1 7 1 9	X
1 7 3 9	X
1 8 0 9	X
1 8 2 9	X
1 9 1 9	X

Число	Суперсчаст.?
1 0 8 9	
1 1 9	
1 2 9	
1 3 9	
1 4 9	
1 5 9	
1 6 9	
1 7 9	
1 8 9	
1 9 9	

Аналогично и для чисел $\in [2000; 2400]$

2 0 7 9	X
2 1 6 9	X
2 1 8 9	X
2 2 5 9	X
2 2 9 9	X
2 3 4 9	✓
2 3 8 9	X
2 4 3 9	X
2 4 7 9	X
2 5 2 9	✓
2 5 6 9	✓
2 6 1 9	X
2 6 5 9	X
2 7 0 9	X
2 7 4 9	✓
2 8 1 9	X
2 8 3 9	X
2 9 2 9	X

Если мы знаем, что у четырёхзначного числа 1-я цифра — 1, а последняя — 9, то по 2-й цифре x мы получаем два счастливых числа $1x(10-x)9$ и $1x(8-x)9$ если $x \neq 0, 9$

мы получаем 2 числа, в зависимости от того, находится ли 1-я цифра (аналогично 2-й)

В одной группе чисел.

Ответ: 9

Задача 8 Улитовик

ПОКАЖИ

Пусты $\{O\}$ — ВСИДА*, а ω_1, ω_2 — окружности, чьи

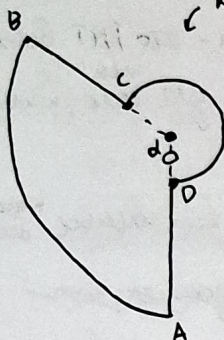
Т.к. BC и $DA \perp AB$ и CD , то центры ω_1 и ω_2 совпадают с O .

(т.к. перпендикуляр к окружности всегда проходит через её центр)

ω_1 и ω_2 — концентрические с центром в O .

ω_2 лежит внутри ω_1 , т.к. длины AB и CD равны, но CD составляет большую часть от ω_2 , чем AB от ω_1 .

Кривая выглядит вот так, с тангентой же угла α и касательной в разном направлении.



Пусть R_1, R_2 — радиусы ω_1 и ω_2 соответственно.
Т.к. $AB = BC = CD = DA$, $R - r = \alpha R = (2\sqrt{2} - \alpha)r \Rightarrow$

$$\alpha = 1 - \frac{r}{R} = (2\sqrt{2} - \alpha) \frac{r}{R} \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{\alpha}{2\sqrt{2} - \alpha} \Rightarrow$$

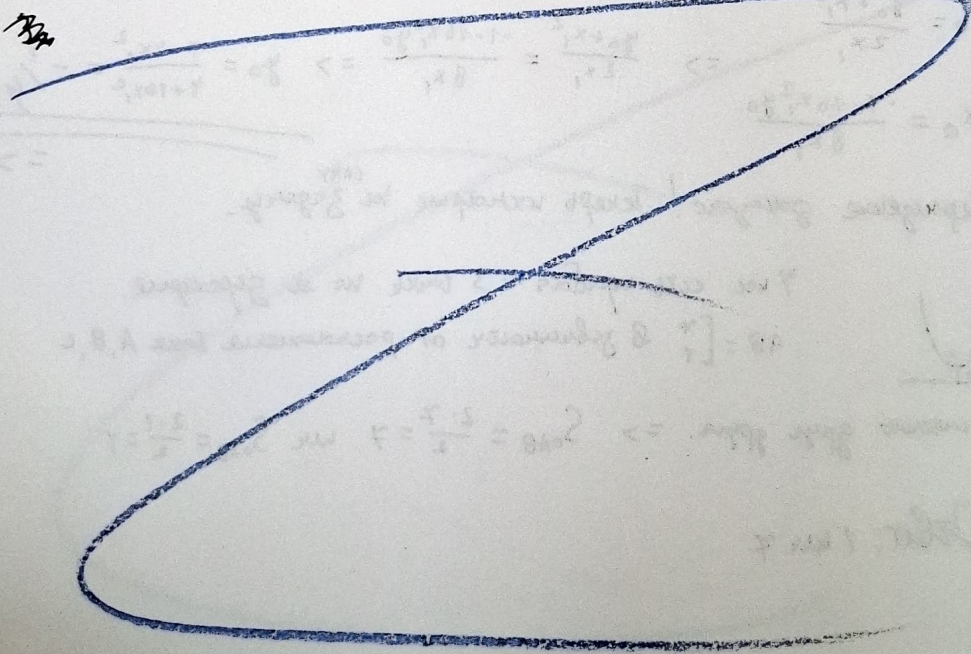
$$\alpha = 1 - \frac{\alpha}{2\sqrt{2} - \alpha} \Rightarrow 2\sqrt{2} \cdot \alpha - \alpha^2 = 2\sqrt{2} - \alpha \Rightarrow$$

$$\alpha^2 - \alpha(2 + 2\sqrt{2}) + 2\sqrt{2} = 0 \quad D = 4 + 4\sqrt{2}^2 + 8\sqrt{2} - 8\sqrt{2} = 4 + 4\sqrt{2}$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{2 + 2\sqrt{2} \pm 2\sqrt{1 + \sqrt{2}}}{2} = 1 + \sqrt{2} \pm \sqrt{1 + \sqrt{2}} \quad \text{Т.к. } 1 + \sqrt{2} + \sqrt{1 + \sqrt{2}} > 2\sqrt{2},$$

Фактически, этот угол $1 + \sqrt{2} + \sqrt{1 + \sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{1 + \sqrt{2}} - 2\sqrt{2} = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{1 + \sqrt{2}} \Rightarrow$

Ответ: $(\sqrt{2} - 1 + \sqrt{1 + \sqrt{2}}; 1 + \sqrt{2} - \sqrt{1 + \sqrt{2}})$ или $(\sqrt{2} - 1 - \sqrt{1 + \sqrt{2}}; 1 - \sqrt{2} + \sqrt{1 + \sqrt{2}})$ — длины $(AB; CD)$



Чистовик
Задача 6

Введем Декартову систему координат так, что парабола будет иметь уравнение $y = x^2$. Это возможно, т.к. все параболы подобны друг другу.

Ось параболы $y = x^2$ проходит в точке $(0; 1/4)^*$ $\Rightarrow$

Директриса параболы $y = x^2$ имеет ^{уравнение} ~~выг~~ $y = -1/4$, т.к. касательная в вершине имеет уравнение $y = 0$.

* Этот факт можно проверить, используя факт, что парабола — это ГМТ всех точек равноудаленных от фокуса и директрисы, проверив это для точек, используя Т. Паскаля.

Докажем утверждение: ГМТ всех точек, ^у ~~х~~ которых касательные ^{к пара-} ~~боле~~ перпендикулярны — директриса. ~~Разные способы доказать, что~~

Возьмем произвольную Т. (x_0, y_0) , у которой кас. $\perp$.

Пусть точки касаний — (x_1, x_1^2) и (x_2, x_2^2)

Ур-ние касательных:

$$1) y - y_0 = (x - x_0)2x_1, \text{ т.к. } (x^2)' = 2x \text{ т.к. кас. перпендикулярна,}$$

$$2) y - y_0 = (x - x_0)2x_2$$

$$2x_1 = -\frac{1}{2x_2} \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{4x_1} \Rightarrow 2) y - y_0 = (x - x_0) \cdot \left(-\frac{1}{2x_1}\right)$$

Выразим x_0 из 1) и 2) ~~откуда~~ в точках (x_1, x_1^2) и $(x_2, x_2^2) = (-\frac{1}{4x_1}, \frac{1}{16x_1^2})$ соотв.

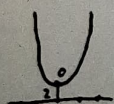
$$1) x_0 = \frac{y_0 + x_1^2}{2x_1} \Rightarrow \frac{y_0 + x_1^2}{2x_1} = \frac{-1 - 16x_1^2 y_0}{8x_1} \Rightarrow y_0 = \frac{-1 - 4x_1^2}{4 + 16x_1^2} = -\frac{1}{4}$$

$$2) x_0 = \frac{-1 - 16x_1^2 y_0}{8x_1} \Rightarrow \underline{\underline{y_0 = -\frac{1}{4}}}$$

Утверждение доказано! Теперь можно не ^{саму} записывать.

У нас есть парабола и 3 точки на ее директрисе.

$AB = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$ в зависимости от расположения точек A, B, C



Относительно друг друга. $\Rightarrow S_{OAB} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$ или $S_{OAB} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$

Ответ: 1 или 7

Числовик

Задача 1

Пусть $x = \log_2 X \Rightarrow$
 $\#$ ОДЗ: $x \geq 0$

$$\sqrt{\log_2^2 X + 3 \log_2 X} - \sqrt{\log_2^2 X + 3 \log_2 X - 4} \geq \log_2 X + 1$$

$$\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 3x - 4} \geq x + 1$$

$$(x^2 + 3x \geq x^2 + 3x - 4) \quad x^2 + 3x - \sqrt{x^2 + 3x - 4} \geq x^2 + 2x + 1$$

ОДЗ: $(x-1)(x+1) \geq 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq -1/16 \end{cases}$$

$$x - 1 \geq \sqrt{(x-1)(x+4)} \quad \text{если } x \geq 1$$

$$0 \geq \sqrt{x-1}(\sqrt{x+4} - \sqrt{x-1})$$

(иначе
точно
нет
решения)

$$\sqrt{x-1} \geq 0 \quad \text{всегда} \Rightarrow$$

*

$$\sqrt{x+4} \leq \sqrt{x-1}$$

$$x+4 \leq x-1$$

$$5 \leq 0$$

Противоречие

$$\Rightarrow \sqrt{x+4} - \sqrt{x-1} > 0 \quad \forall x$$

$$\sqrt{x-1} = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow \underline{\underline{x = 2}}$$

Проверка: $\sqrt{1+3} - \sqrt{0} = 2 = 1+1$

Ответ: 32

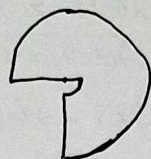
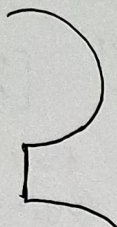
ЗАДАЧА 5

Одного из жуков раздвигает над весом кубика и 5 его сторон, а другой кубик тоже изгибает свой вид. Ответ: 0

Черновики

Также перекоп. - СКАТ. $\Rightarrow$ Лист ... 9
... 0

$$\begin{cases} S(x) : 2 \\ S(x+1) : 2 \end{cases}$$



$$\nearrow \frac{1}{4} + \frac{2}{4}$$

$$R = z$$

||

$$dR = (2\sqrt{L} - d)z$$

$$R = z(2\sqrt{L} - d + 1)$$

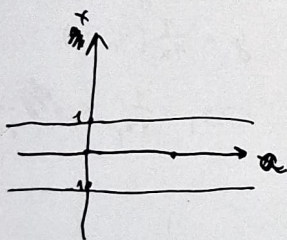
$$z = R(1 - d)$$

$$d = 1 - \frac{z}{R} = (2\sqrt{L} - d) \frac{z}{R}$$

$$d + 1 = 2\sqrt{L}$$

$$d = 2\sqrt{L} - 1$$

$$|x + 1 - a| + |4^x - a| = 4^x - x - 1$$



400
Конец + Влеза?

459 X

549 ✓

6.3 X

72 X

81 X

909 ✓

1809

089

71

17

62

26

1799 X

1919 X

2189

81

29

92

70

Черныш

$$\log_2^2 x + 3 \log_2 x - \sqrt{\log_2^2 x + 3 \log_2 x - 4} > x+1$$

$$\sqrt{x^2 + 3x - 4} > x+1$$

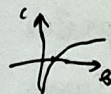
$$x^2 + 3x - \sqrt{(x+1)(x-1)} > x^2 + 2x + 1$$

$$x-1 \geq \sqrt{(x+1)(x-1)}$$

$$\log_2 b = c$$

$$2^c = b$$

$$y = \log_2 x$$



$$\begin{cases} x \leq -4 \\ x > 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 1/16 \\ x \geq 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{Округляем} \\ x > 0 \Rightarrow \boxed{x \geq 2} \end{matrix}$$

$$0 \geq \sqrt{x-1}(-\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1})$$

$$0 \geq \sqrt{x-1} \Rightarrow x \geq 1$$

$$\log_2 x \geq 1 \Rightarrow x \geq 2$$

$$\sqrt{x+1} \leq \sqrt{x-1}$$

$$x+1 \leq x-1$$

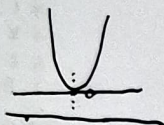
$$\log_2 x + 1 \leq \log_2 x - 1$$

$$(x_0, y_0)$$

$$y = Kx$$

$$(y - y_0) = (x - x_0)K$$

$$y - y_0 = (x - x_0) \cdot \frac{1}{K}$$



$$K+1 = \sqrt{1 + (K-1)^2}$$

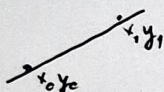
$$K^2 + 2K = K^2 - 2K + 1$$

$$K = 1/4$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad y = x^2$$

$$2x_1 = K$$

$$-\frac{1}{K} = 2x_2 \quad \boxed{x_2 = -\frac{1}{4x_1}}$$



$$y - y_0$$

ПРИМЕР..

$$\begin{cases} y = 2x_1, x + (-2x_1, x_0 + y_0) \\ y = -\frac{1}{x_1}, x + (\frac{x_0}{x_1} + y_0) \end{cases}$$

$$y_0 = y - 2x_1, + 2x_1, x_0 = y + 2x_1(x_0 - x)$$

$$y + \frac{1}{4x_1}(x_0 - x)$$

$$2x_1 = \frac{1}{4x_1} \quad x_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{\cos x} + 2\sqrt{-3 \sin x} > 2\sqrt{\cos x - \sqrt{-3 \sin x}}$$

$$a, b \quad \sqrt{-a} + 2b > 2\sqrt{a-b}$$

$$\begin{cases} a+2b \geq 0 \\ a-b \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a+2b > 4(a-b) \\ a \geq b \end{cases}$$

$$a \geq b \quad 6b > 3a$$

$$x \in [1; 2\sqrt{2}] + 2\pi k \quad 2b > a$$

$$x \in \quad 2\sqrt{-3 \sin x} > \sqrt{\cos x}$$

!!

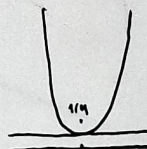
$$-12 \sin x > \cos x \quad -\tan x > 1/12$$

$$x \in [\frac{3\sqrt{2}}{2}; 2\sqrt{2}] + 2\pi k$$



$$\tan x < -1/12$$

ВНИМАНИЕ?



$$y = x^2 \quad (x_0, y_0)$$

$$(x_1, x_1^2)$$

$$2x_1$$

$$-1 - 8x_0x_1 = (2x_0x_1 - x_1^2) 16x_1^2$$

$$x_0 = \frac{-1 - 16x_1^2 y_0}{8x_1} = \frac{y_0 + x_1^2}{2x_1}$$

$$-1 - 16x_1^2 y_0 = 4y_0 + 4x_1^2$$

$$y_0 = \frac{-1 - 4x_1^2}{4 + 16x_1^2} = -\frac{1}{4}$$

$$y - y_0 = (x - x_0) \cdot \frac{1}{2x_1} \quad y - y_0 = (x - x_0) 2x_1$$

$$\frac{1}{16x_1^2} - y_0 = \frac{1}{4x_1} + x_0 \cdot \frac{1}{2x_1} \quad x_1^2 - y_0 = 2x_1^2 - 2x_0x_1$$

$$y_0 = \frac{-1 - 8x_1x_0}{16x_1^2} \quad y_0 = 2x_0x_1 - x_1^2$$

$$x_0 = \frac{y_0 + x_1^2}{2x_1}$$