78-76-25-68
(161.4)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Емельченковой Анны Сергеевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
78-76-25-68		+	+.	+	±	+	−	−	−

78-76-25-68 (161.4)

Черновик 1 2 3 4 5 6 7 8

70 (семьдесят)

$4x^2+12x+9 = (2x+3)^2$

$9x^2+12x+4 = (3x+2)^2$

$\sqrt{24} = \sqrt{8\cdot 3} = 2\sqrt{6}$

$1 + 2\sqrt{6} + 6 = (1+\sqrt{6})^2$

$|2x+3| + |3x+2| + (x+1) = |1+\sqrt{6}| - |1-\sqrt{6}|$

$2\left|x+\frac{3}{2}\right| + 3\left|x+\frac{2}{3}\right| + (x-(-1)) = 1+\sqrt{6} - (\sqrt{6}-1)$

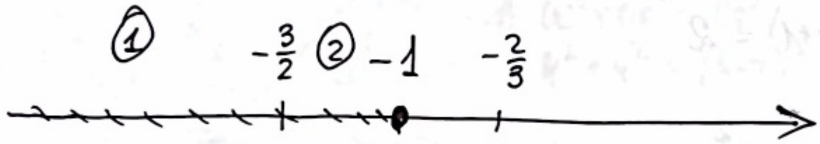
$1+\sqrt{6}-\sqrt{6}+1 = 2$

$\sqrt{-(x+1)}^2 = -(x+1) \Rightarrow x+1 \le 0$

$x \le -1$

$\frac{3}{2} \not> \frac{2}{3}$

$9 \not> 4$



$x \le -\frac{3}{2}$

$-\frac{3}{2} < x \le -1$

1) $-(2x+3)-(3x+2)+(x+1)=2$

$-2x-3-3x-2+x+1=2$

$-5x-5+x=1$

$-4x=6$

$x=-\frac{6}{4}$

$x=-\frac{3}{2}$

2) $(2x+3)-(3x+2)+(x+1)=2$

$\cancel{2x}+3-\cancel{3x}-2+\cancel{x}+1=2$

$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$

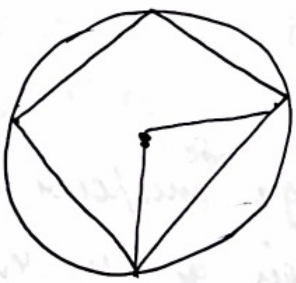
4+

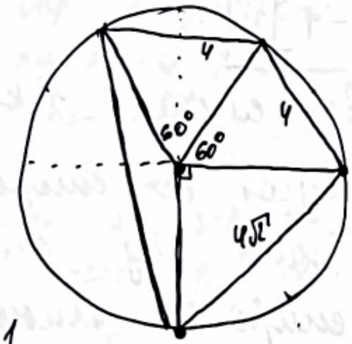
$2^{5-\frac{1}{x}} \ge a + \sin 2^x$

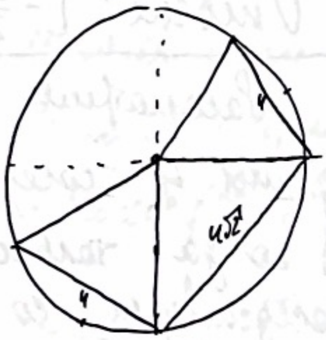
$2^{5-\frac{1}{x}} = 2^5 : 2^{\frac{1}{x}}$

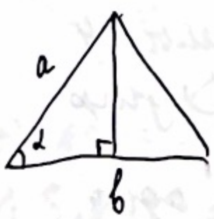
$\frac{32}{2^{\frac{1}{x}}}$

$360-120-90 =$
$= 240-90 = 150^\circ$









$b\cdot\sin\alpha\cdot a\cdot\frac{1}{2}$

Чистовик (чистовой лист)

№1 $\sqrt{4x^2+12x+9}+\sqrt{9x^2+12x+4}-\left(\sqrt{-(x+1)}\right)^2=\sqrt{7+\sqrt{24}}-\sqrt{7-\sqrt{24}}$

$$\begin{cases}\sqrt{(2x+3)^2}+\sqrt{(3x+2)^2}+(x+1)=\sqrt{1+2\sqrt6+6}-\sqrt{1-2\sqrt6+6}\\ x\le -1\end{cases}$$

$$\begin{cases}|2x+3|+|3x+2|+(x+1)=|1+\sqrt6|-|1-\sqrt6|\\ x\le -1\end{cases}$$

$1 \ngtr \sqrt6$

$\Downarrow$

$|1-\sqrt6|=\sqrt6-1$

$$\begin{cases}|2x+3|+|3x+2|+(x+1)=1+\sqrt6-\sqrt6+1\\ x\le -1\end{cases}$$

$$\begin{cases}|2x+3|+|3x+2|+(x+1)=2\\ x\le -1\end{cases}$$

$-\frac{3}{2}$ $\quad -1 \quad$ $-\frac{2}{3}$

① $x\le -\frac{3}{2}$

$-(2x+3)-(3x+2)+(x+1)=2$

$-2x-3-3x-2+x+1=2$

$-4x=6$

$x=-\frac{3}{2}$

② $-\frac{3}{2}<x\le -1$

$(2x+3)-(3x+2)+(x+1)=2$

$2x+3-3x-2+x+1=2$

$2=2$

$\Downarrow$

$-\frac{3}{2}<x\le -1$

$x\in\left[-\frac{3}{2};-1\right]$

$\boxed{\text{Ответ: } \left[-\frac{3}{2};-1\right]}$

№3 Рассмотрим два случая: 1) когда обе стороны длины 4 соседствуют со стороной длины $4\sqrt2$; 2) когда только одна из сторон длины 4 соседствует со стороной длины $4\sqrt2$. Других случаев быть не может, т.е. хотя бы одна

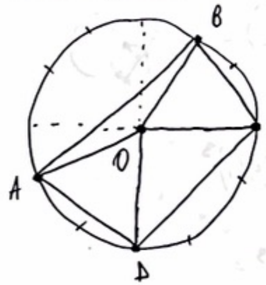
78-76-25-68
(161.4)

Чистовик (чистовой лист)

№3 (лист 2)

~~одна~~ из двух сторона длины 4 соседствует со стороной длины $4\sqrt2$ т.к. в четырехугольнике сторона не соседствует только с одной стороной

1 случай



Пусть четырехугольник ABCD вписан в окр. с центром O:

$BC=AD=4$; $AO=OB=OC=OD=4$

$CD=4\sqrt2$

1) $\left.\begin{array}{l}OC^2+OD^2=CD^2\\ 4^2+4^2=(4\sqrt2)^2\end{array}\right\}\Rightarrow \angle DOC=90^\circ$ (по обр. теореме Пифагора)

2) $AO=OD=AD \Rightarrow \triangle AOD$ - р/с (равн.) $\Rightarrow \angle AOD=60^\circ$ (св-во р/с $\triangle$-ка)

аналогично $\angle BOC=60^\circ$

3) $\angle AOB=360^\circ-90^\circ-60^\circ-60^\circ=150^\circ$

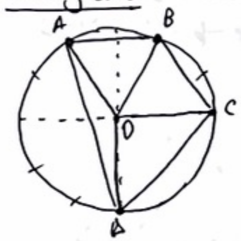
4) $S_{ABCD}=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle BOC}+S_{\triangle COD}+S_{\triangle DOA}=\frac12 AO\cdot OB\cdot\sin\angle AOB+$

$+\frac12 BO\cdot OC\cdot\sin\angle BOC+\frac12\cdot OC\cdot OD\cdot\sin\angle COD+\frac12\cdot AO\cdot DO\cdot\sin\angle AOD=$

$=\frac12\cdot4\cdot4\cdot\sin150^\circ+\frac12\cdot4\cdot4\cdot\sin60^\circ+\frac12\cdot4\cdot4\cdot\sin90^\circ+\frac12\cdot4\cdot4\cdot\sin60^\circ=$

$=\frac12\cdot4\cdot4\cdot\frac12+2\cdot\frac12\cdot4\cdot4\cdot\frac{\sqrt3}{2}+\frac12\cdot4\cdot4\cdot1=4+8\sqrt3+8=\boxed{12+8\sqrt3}$

2 случай



Пусть четырехугольник ABCD вписан в окр. с центром O:

$AB=BC=4$; $CD=4\sqrt2$; $AO=OB=OC=OD=4$

1) $\left.\begin{array}{l}OC^2+OD^2=CD^2\\ 4^2+4^2=(4\sqrt2)^2\end{array}\right\}\Rightarrow\angle DOC=90^\circ$ (по обр. т. Пифагора)

2) $AO=AB=OB\Rightarrow\triangle AOB$ - р/с (р/с) $\Rightarrow\angle AOB=60^\circ$ (по свойству р/с $\triangle$-ка)

аналогично $\angle BOC=60^\circ$

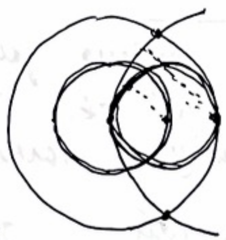
3) $\angle AOD=360^\circ-60^\circ-60^\circ-90^\circ=150^\circ$

4) S_{ABCD} аналогично случаю 1 $=\boxed{12+8\sqrt3}$

$\boxed{\text{Ответ: } 12+8\sqrt3}$

№4 Черновик

$\cos^3(\pi x) - \cos^3(2\pi x) + \cos^3(4\pi x) = (\cos(\pi x) - \cos(2\pi x) + \cos(4\pi x))^3$



$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$\cos(2\pi x) = 2\cos^2 \pi x - 1$

$\cos 4\pi x = 2\cos^2 2\pi x - 1 = 2(2\cos^2\pi x - 1)^2 - 1$

$(\cos\pi x - (2\cos^2\pi x - 1) + 2(2\cos^2\pi x - 1)^2 - 1) =$

$= \cos\pi x -$

$f^3(t) - f^3(2t) + f^3(4t) = (f(t) - f(2t) + f(4t))^3$

$f^3(t) + (-f(2t))^3 + f^3(4t)$

$(a+b+c)^3 - a^3 =$

$= (a+b+c-a)((a+b+c)^2 + (a+b+c)a + a^2)$

$a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)^3$

$(b+c)(b^2 \cancel{+} bc + c^2) = (b+c)$

$(b+c)(b^2 - bc + c^2) = (b+c)((a+b+c)^2 + (a+b+c)a + a^2)$

$b^2 - bc + c^2 = \cancel{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc} + \cancel{a^2} + ab + ac + a^2$

$\cancel{b^2} + \cancel{c^2} \cancel{- bc} = \cancel{2bc} + \cancel{3a^2} + \cancel{b^2} + 3ab + 3ac + \cancel{c^2}$

$\cancel{b^2 + c^2 - 3a^2 - a}$

$0 = 3a^2 + 3bc + 3ab + 3ac$ $\qquad 2r + r$

$a^2 + bc + ab + ac = 0$

$2a^2 + 2bc + 2ab + 2ac = 0$

$\cancel{2a^2}$ $\cancel{a}$ $2a^2 + b^2 - b^2 + c^2 - c^2 + 2bc + 2ab + 2ac = 0$

$a^2 + 2ab + b^2 + a^2 + 2ac + c^2 \cancel{+ b^2 + c^2} - (b^2 - 2bc + c^2) = 0$

$(a+b)^2 + (a+c)^2 = (b+c)^2$

$2^{5-\frac{1}{x}} \geq a + \sin 2^x$ $\qquad \sin 2^x \geq -1$

$2^{5-\frac{1}{x}} > 0 \Rightarrow$ $\qquad 0 > a - 1$

$2^{5-\frac{1}{x}} < a - 1$ $\qquad \frac{32}{2^{\frac{1}{x}}} + 1 < a$ $\qquad 32 + 2^{\frac{1}{x}} < a \cdot 2^{\frac{1}{x}}$

78-76-25-68
(161.4)

Черновик

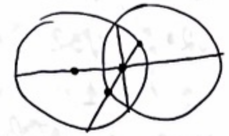
$2^{5-\frac{1}{x}}$

$(x + a_1)(x^2 + b_1 x + 12)$

$(x + a_2)(x^2 + b_2 x + 15)$

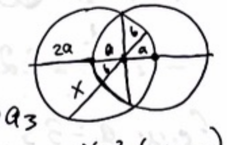
$2^a \nearrow$ $\qquad 2^{-a} \searrow$ $\qquad 2^{-\frac{1}{a}} \nearrow$

$2^{5-\frac{1}{x}} \nearrow$



Если $x \to \infty$ $\quad \frac{1}{x} \to 0 \Rightarrow 2^5 = 32$

Если $x \to 0$ $\quad \frac{1}{x} \to \infty \Rightarrow 2^{-\infty} = 0$



$12 a_1 = 15 a_2 = 20 a_3$

$a = 33$ $\qquad \cancel{4a_1 = 5a_2}$ $\qquad 0 = (a_2 - a_1)(a_1^2 - b_2 a_1 + 15)$

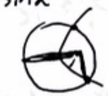
$\cancel{3a_2 = 4a_3}$ $\qquad a_1^2 - b_2 a_1 + 15 = 0$

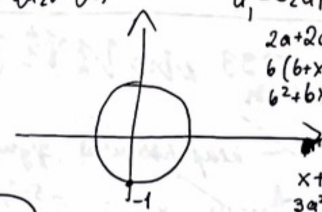
$2^{5-\frac{1}{x}} \geq 33 + \sin 2^{2x}$

$2a + 2a = 4a$

$6(b + x) = a \cdot 3a$

$b^2 + bx = 3a^2$





$x = \frac{3a^2 - b^2}{b}$

$\frac{2^5}{2^{\frac{1}{x}}} \ne 32$

$x + 2b \ne 4a$

$\frac{3a^2 - b^2}{b} + 2b$

$1 \ne 2^{\frac{1}{x}}$

$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ $\qquad \frac{3a^2 - b^2 + 2b^2}{b} \ne 4a$

$a_1 < 33$ $\qquad \frac{3a^2 + b^2}{b} \ne 4a$

$2^x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ $\qquad 3\frac{a^2}{b} + b \ne 4a$

$2^{5-\frac{1}{x}} - (a_1 - 1) \geq \sin 2^x + 1$

$\exists\, x_1$: $\cancel{2^{5-\frac{1}{x}} - (a_1 - 1)} = 0$ $\qquad 2^{5-\frac{1}{x_1}} = (a_1 - 1)$ $\qquad 2^x = \frac{3\pi}{2}$ $\qquad 3a \cdot \frac{a}{b} + b \ne 3a + a$

$x = \log_2\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$

$0 > \sin 2^x + 1$

$a - 1 \geq a + \sin 2^x$ $\qquad 3a\left(\frac{a}{b} - 1\right) \ne a - b$

$-1 \geq \sin 2^x$ $\qquad 3a\left(\frac{a-b}{b}\right) \ne a - b$

$2^{5-\frac{1}{x}} - a \geq -1$

$12 a_1 = 15 a_2 = 20 a_3$ $\qquad \frac{12}{a_2} = \frac{15}{a_1}$

$2^{5-\frac{1}{x}} \geq a \cancel{+} 1$

$a_1^2 - b_2 a_1 + 15 = 0$

$a_1(a_1 - b_2) = -15$ $\qquad 3a \ne b$

$2^{5-\frac{1}{x}} \geq a + \sin 2^x$

$a_1 b_2 = \frac{-15}{a_1}$ $\qquad b < \frac{\sqrt{3}}{2} a$

$a + 1$

$2^{5-\frac{1}{x}} \geq a + 1$ $\qquad a_3^2 - b_2 a_3 + 15 = 0$

$a_3(a_3 - b_2) = -15$

$a_3 - b_2 = -\frac{15}{a_3}$

Чистовик

№2

$$2^{5-\frac{1}{x}} \vee 32$$
$$32 \cdot 2^{-\frac{1}{x}} \vee 32$$
$$2^{-\frac{1}{x}} \vee 1$$
$$x>0 \Rightarrow \frac{1}{x}>0 \Rightarrow -\frac{1}{x}<0 \Rightarrow 2^{-\frac{1}{x}}<1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2^{5-\frac{1}{x}}<32$$

Если $a=33$, то $2^{5-\frac{1}{x}} \geq 33+\sin 2^x$

$\sin 2^x \geq -1 \Rightarrow 33+\sin 2^x \geq 32 \Rightarrow 2^{5-\frac{1}{x}} \geq 32$ - решений $x>0$ нет

~~Если $a<33$ тогда~~

~~$f(x)=2^{5-\frac{1}{x}}$ - непрерывная функция на $x>0$ $\Rightarrow$~~

~~Существует x_1 : $2^{5-\frac{1}{x_1}}=(a_1-1)$, т.к $a_1-1<32$.~~

~~Для любых $0<x<x_1$: $2^{5-\frac{1}{x}}<(a_1-1)$, т.к $f(x)$ возрастает на $x>0$~~

~~Тогда для любых $0<x<x_1$ $2^{5-\frac{1}{x}}-(a-1)<0$.~~

~~При это $2^{5-\frac{1}{x}}>$~~

Если $a<33 \Rightarrow a-1<32$

$$2^{5-\frac{1}{x}} \geq a+\sin 2^x$$

$f(x)=\sin 2^x$ - непрерывная на $x>0 \Rightarrow$ Существует серия x_k :

$\sin 2^{x_k}=-1 \Rightarrow 2^{x_k}=\frac{3\pi}{2}+2\pi k \Rightarrow x_k=\log_2(\frac{3\pi}{2}+2\pi k)$ $(k\geq 0)$ $(k\in\mathbb{Z})$

$g(x)=2^{5-\frac{1}{x}}$ - непрерывно возрастает $\Rightarrow$ Существует x' :

$2^{5-\frac{1}{x'}}=a-1$ $(a-1)<32$. Для $x>x'$: $2^{5-\frac{1}{x'}}>a-1$

$t(k)=\log_2(\frac{3\pi}{2}+2\pi k)$ - неограниченная возр. функция $\Rightarrow \exists k_1$:

$\log_2(\frac{3\pi}{2}+2\pi k)>x'$, тогда для x_{k_1} : $2^{5-\frac{1}{x_k}}>a-1=a+\sin 2^{x_k}$

Таким образом для $a<33$ всегда есть решение на $x>0$

Чистовик

№2 (лист 2)

Ответ: 33

№6

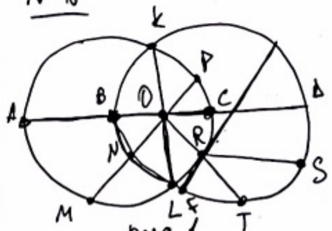


рис. 1

Пусть зона под душем 1 поливалки называется зона 1, а под 2ым - зона 2.

Внутри зоны кратчайшее время будет на кратчайшем расстоянии т.е. на прямой.

~~Если на границе зон мышь меняет направление,~~ Когда мышь оказывается на границе зон (Если это не точки K и L (см. рис 1)), то min расстояние до неполиваемой земли - отрезок касательной к зоне 2, лежащей внутри зоны 1 (min из двух).

Ответ: $8-4\sqrt{2}$

Черновик

$0{,}4 \quad 0{,}8 \quad 1 \quad \cancel{1}1{,}2 \quad 1{,}6$

$12a_1 = 15a_2 = 20a_3$

$a^2 + ab + ac + bc = 0$

$a(a+b+c) = -bc$

$x < 1$

$\cancel{a_2}\ a_1^2 \cancel{+} - b_2 a_1 \cancel{+} 15 = 0$

$a_1^2 - b_3 a_1 + 20 = 0$

$a_2^2 - b_1 a_2 + 12 = 0$

$a_2^2 - b_3 a_2 + 20 = 0$

$a_1(a_1 - b_3) = -20$

$a_2(a_2 - b_3) = -20$

$a_1 - b_3 = -\frac{20}{a_1}$

$a_2 - b_3 = -\frac{20}{a_2}$

$\cos\alpha \cdot \cos\beta$

$\cos\alpha+\beta = \cos\alpha \cdot \cos\beta -$

$\cos\alpha-\beta = \cos\alpha \cdot \cos\beta$

$\frac{\cos\alpha+\beta + \cos\alpha-\beta}{2}$

$\frac{12}{a_3} = \frac{20}{a_1}$

$\frac{15}{a_3} = \frac{20}{a_2}$

$a_3 = \frac{15}{20}a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{4}{3}a_3$

$a_3 = \frac{12}{20}a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{5}{3}a_3$

$a_1 + \frac{20}{a_1} = b_3 = a_2 + \frac{20}{a_2}$

$\frac{5}{3}a_3 + \frac{12}{a_3} = \frac{4}{3}a_3 + \frac{15}{a_3}$

$5a_3 + \frac{36}{a_3} = 4a_3 + \frac{45}{a_3}$

$a_3 = \frac{9}{a^3}$

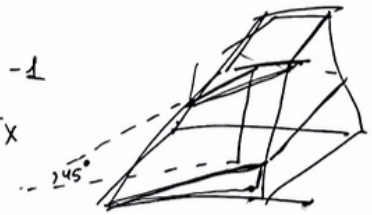
$a_3 = \pm 3$

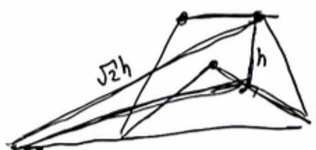
$\frac{18}{10} \vee \frac{t}{3}$

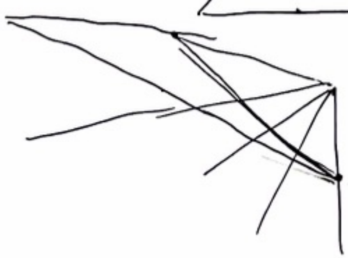
$48 \vee 40$

$\cos 2\pi x = 2\cos^2\pi x - 1$

$\frac{\cos 2\pi x + 1}{2} = \cos^2 \pi x$







Чистовик ~~№2~~

№5

Подставим $x = 0$:

$a_1 \cdot 12 = a_2 \cdot 15 = a_3 \cdot 20$

$\Downarrow$

$\frac{12}{a_3} = \frac{20}{a_1}$ $\qquad$ $\frac{15}{a_3} = \frac{20}{a_2}$

$\Downarrow$ $\qquad$ $\Downarrow$

$a_1 = \frac{20}{12}a_3$ $\qquad$ $a_2 = \frac{20}{15}a_3$

$\Downarrow$ $\qquad$ $\Downarrow$

$a_1 = \frac{5}{3}a_3$ $\qquad$ $a_2 = \frac{4}{3}a_3$

$\Rightarrow a_1, a_2, a_3 > 0 \Rightarrow$

$a_1 \neq a_2$

$a_2 \neq a_3$

$a_1 \neq a_3$

Подставим $x = -a_1$:

$f_1(-a_1) = 0$

$f_3(-a_1) = (a_3 - a_1)(a_1^2 - b_3 a_1 + 20) = 0 \Rightarrow a_1(a_1 - b_3) = -20 \Rightarrow b_3 = a_1 + \frac{20}{a_1}$

~~$f_3(-a_2) = (a_3 - a_2)(a_2^2 - b$~~

Подставим $x = -a_2$:

$f_2(-a_2) = 0$

$f_3(-a_2) = (a_3 - a_2)(a_2^2 - b_3 a_2 + 20) = 0 \Rightarrow b_3 = a_2 + \frac{20}{a_2}$

$a_1 + \frac{20}{a_1} = a_2 + \frac{20}{a_2}$

$\frac{5}{3}a_3 + \frac{12}{a_3} = \frac{4}{3}a_3 + \frac{15}{a_3}$

$5a_3 + \frac{36}{a_3} = 4a_3 + \frac{45}{a_3}$

$a_3^2 = 9$

$a_3 > 0 \Rightarrow a_3 = 3 \Rightarrow a_1 = 5;\ a_2 = 4$

$b_3 = 4 + \frac{20}{4} = 9$

~~$f_1(x) = (x+5)x^2$~~

Подставим $x = -a_3$ $\qquad$ $f_3(-a_3) = 0$

$f_1(-a_3) = (a_1 - a_3)(a_3^2 - b_1 a_3 + 12) = 0$ $\qquad$ $9 - b_1 \cdot 3 + 12 = 0$

$21 = b_1 3$

$b_1 = 7$

Чистовик

№5 (лист 2)

$f_2(-a_3) = (a_2 - a_3)(a_3^2 - b_2 a_3 + 15) = 0$

0^{*}

$9 - 3b_2 + 15 = 0$

$24 = 3b_2$

$b_2 = 6$

Таким образом

$a_1 = 5 \qquad b_1 = 7$

$a_2 = 4 \qquad b_2 = 6$

$a_3 = 3 \qquad b_3 = 9$

сумма равна $5 + \underbrace{4 + \overbrace{3 + 7}^{10} + 6}_{10} + 9 = 10 + 10 + 14 = 34$

$\boxed{\text{Ответ: } 34}$

№4

$(\cos(\pi x))^3 + (-\cos(2\pi x))^3 + (\cos(4\pi x))^3 =$

$= (\cos(\pi x) + (-\cos 2\pi x) + \cos(4\pi x))^3$

Пусть $a = \cos \pi x$; $b = -\cos 2\pi x$; $c = \cos 4\pi x$

$a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)^3$

$b^3 + c^3 = (a+b+c)^3 - a^3$

$(b+c)(b^2 - bc + c^2) = (b+c)((a+b+c)^2 + a(a+b+c) + a^2)$

Если $b + c = 0$, т.е. $-\cos 2\pi x + \cos 4\pi x = 0$

$\cos 4\pi x = \cos 2\pi x$

$4\pi x = 2\pi x + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$2\pi x = 2\pi k$

$x = k$

$\Downarrow$

Все $x \in \mathbb{Z}$ - решение

Аналогично $a + c = 0$

$b + a = 0$

$-\cos 2\pi x + \cos \pi x = 0$

$\cos \pi x = \cos 2\pi x$

$\Downarrow$

$x \in \mathbb{Z}$

Чистовик

№4 (лист 2)

$\cos \pi x + \cos 4\pi x = 0$

$\cos \pi x = -\cos 4\pi x$

$\cos \pi x = \cos(-4\pi x)$

$\pi x = -4\pi x + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$5\pi x = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{2}{5}k,\ k \in \mathbb{Z}$

$x = 0{,}4k,\ k \in \mathbb{Z}$

Если $b^2 + ab + bc + ac = 0$

$\cos^2 2\pi x - \frac{\cos 6\pi x + \cos 2\pi x}{2} = 0$

$\frac{\cos 4\pi x - 1 - \cos 6\pi x - \cos 2\pi x}{2} = 0$

$\cos 4\pi x = 1 + \cos 6\pi x + \cos 2\pi x$

Если $c^2 + ab + ac + bc = 0$

$\cos^2 4\pi x - \frac{\cos 6\pi x + \cos 2\pi x}{2} = 0$

$\cos 8\pi x = 1 + \cos 6\pi x + \cos 2\pi x$

Если $b + c \neq 0$

$b^2 - bc + c^2 = (a+b+c)^2 + a(a+b+c) + a^2$

$b^2 - bc + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac + a^2 + ab + ac + a^2$

$0 = 3a^2 + 3ab + 3bc + 3ac$

$0 = a^2 + ab + bc + ac$

~~аналогично~~

$\cancel{0 = b^2 + ba + bc + ac}$

$\cancel{0 = c^2 + ac + bc + ab}$

$0 = \cos^2(\pi x) + \cos(\pi x)\cos(4\pi x) - \cos(\pi x)\cos(2\pi x) - \cos(4\pi x)\cos(2\pi x)$

$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2}$

$0 = \cos^2(\pi x) + \frac{\cos \pi x + \cos 3\pi x}{2} - \frac{\cos 3\pi x + \cos \pi x}{2} - \frac{\cos 6\pi x + \cos 2\pi x}{2}$

$0 = \frac{\cos 2\pi x + 1 + \cancel{\cos \pi x} + \cancel{\cos 3\pi x} - \cancel{\cos 3\pi x} - \cancel{\cos \pi x} - \cos 6\pi x - \cancel{\cos 2\pi x}}{2}$

$0 = \frac{1}{2} - \frac{\cos 6\pi x}{2}$

$1 = \cos 6\pi x$

$6\pi x = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

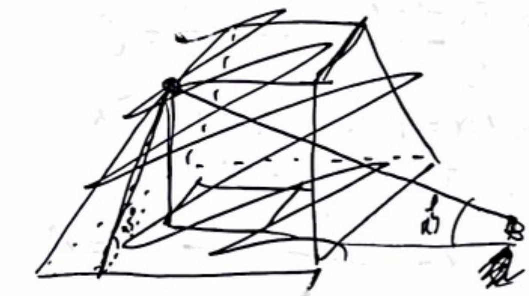
$3x = k$

$x = \frac{k}{3},\ k \in \mathbb{Z}$

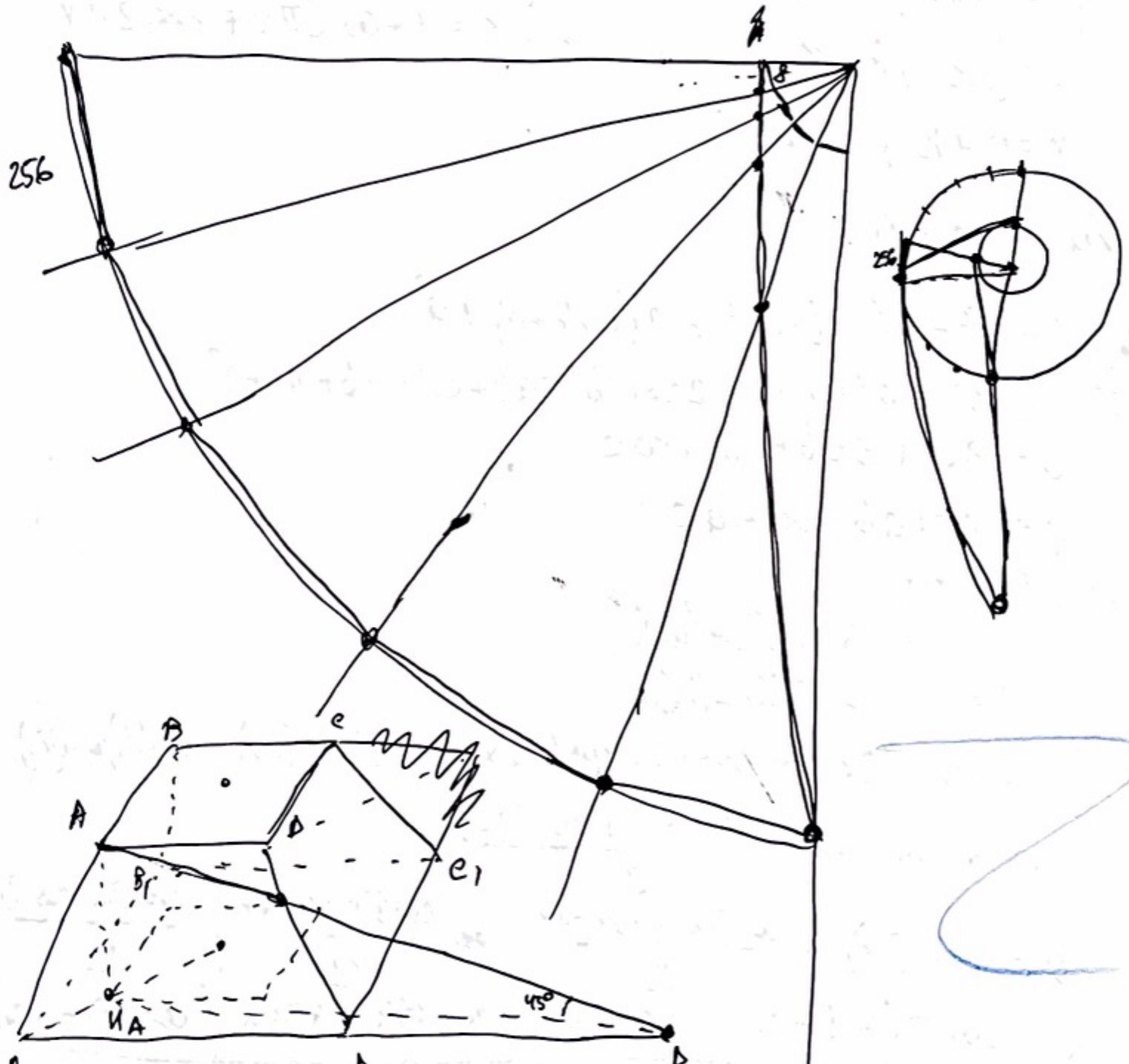
Ответ: $\{0{,}4;\ 0{,}8;\ 1;\ 1{,}2;\ 1{,}6;\ \frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ \frac{4}{3};\ 0{,}5\}$

Чистовик

№7



Рассмотрим развертку его пути, она выглядит как пять одинаковых боковых сторон четырехугольной пирамиды, а на них прямая.



Пусть пирамида $ABCDA_1B_1C_1D_1$, опустим из A высоту на $A_1B_1C_1D_1$ с основанием H_A, а прямая пути на грани ADD_1A_1 пересекает A_1D_1 в точке P. Тогда $AP = \sqrt{2}\, AH_A$