0 116324 320004

11-63-24-32

(162.16)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 9

Место проведения Екатеринбург
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников имени Ломоносова
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Ермакова Никиты Дмитриевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«13» апреля 2025 года

Подпись участника

11-63-24-52 (162.16)

Чистовик

Задача №1

Ответ: побеждает Аля

Стратегия:

1) Ход Али:

Отрезаем полоски 2×15, 9×15 и 9×15 двумя параллельными прямыми и съедаем 2×15. Тем самым останутся два одинаковых куска

2) Ход Вали:

Как бы не сходила Валя, Аля сможет сходить симметрично, относительно второго разреза в первом ходе (прямая между 9×15 и 9×15)

1) Если Валя сходит в одной из частей симметрии, Аля сходит ~~т~~ также в другой

2) Если Валя сходит в обеих частях, то либо Аля сможет сходить симметрично, либо нет (если разрезы итак симметричны), во втором случае Аля не будет делать разрезов, а просто съест кусок, симметричный тому, который съела Валя (симметрия сохранилась после Вали, значит Аля сможет так сделать и симметрия все равно останется)

В любом случае Аля сможет съесть кусок после Вали, а значит она победит.

90 (ДЕВЯНОСТО).

Чистовик

Задача №2

$x^3 - |x^2 - x - 2| = 12x - 13$

1) $x^2 - x - 2 \geq 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$

$x^3 - |x^2 - x - 2| = \underline{x^3 - x^2 + x + 2 = 12x - 13}$

$x^3 - x^2 - 11x + 15 = 0$

$(x-3)(x^2 + 2x - 5) = 0$

$D = 4 + 5 \cdot 4 = 24$

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{6}}{2} = -1 \pm \sqrt{6}$

$\left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -1 + \sqrt{6} \\ x = -1 - \sqrt{6} \end{array}\right.$ (не подходит, т.к. $-1+\sqrt{6} \notin (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$).

$\boxed{\begin{array}{l} -1 + \sqrt{6} > -1 \\ -1 + \sqrt{6} < -1 + \sqrt{9} = 2 \end{array}}$

$\Downarrow$

$\left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -1 - \sqrt{6} \end{array}\right.$

2) $x^2 - x - 2 < 0 \Rightarrow x \in (-1; 2)$:

$x^3 - |x^2 - x - 2| = \underline{x^3 + x^2 - x - 2 = 12x - 13}$

$x^3 + x^2 - 13x + 11 = 0$

$(x-1)(x^2 + 2x - 11) = 0$

$D = 4 + 11 \cdot 4 = 48$

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{12}}{2} = -1 \pm \sqrt{12}$

$-1 - \sqrt{12} \notin (-1; 2)$, значит не подходит

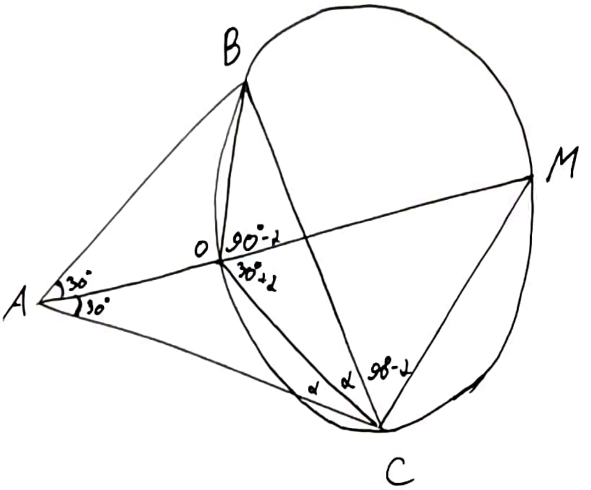
$-1 + \sqrt{12} > -1 + \sqrt{9} = 2 \Rightarrow -1 + \sqrt{12} \notin (-1; 2)$

Значит $x = 1$

Ответ: $x = -1 - \sqrt{6}$; 1; 3

Задача №4

Чистовик



$BC = 6$

$AB : AC = 3$

$\angle BAC = 60°$

$OM - ?$

$\angle BAC = 60°$, значит $\angle BAO = \angle OAC = 30°$ (AO-биссектриса)

Пусть $\angle ACO = \alpha$, тогда $\angle OCB = \alpha$ (CO-биссектриса)

$\angle MOC = 30° + \alpha$ (смежный с $\angle AOC = 180° - 30° - \alpha$ по сумме углов в треугольнике, значит $\angle MOC = 180° - \angle AOC = 180° - 180° + 30° + \alpha = 30° + \alpha$)

$\angle BOC = 180° - \frac{1}{2} \cdot (\angle ABC + \angle ACB) = 180° - \frac{1}{2} \cdot (180° - \angle BAC) =$

$= 180° - \frac{1}{2} \cdot (180° - 60°) = 180° - 60° = 120°$, значит $\angle BOM =$

$= 120° - \angle MOC = 120° - 30° - \alpha = 90° - \alpha$.

$\angle BOM = \angle BCM$ (опираются на одну дугу), значит

$\angle OCM = \angle OCB + \angle BCM = \alpha + 90° - \alpha = 90°$

По т. синусов для $\triangle OBC$:

$$\frac{\sin \angle BOC}{BC} = \frac{\sin \angle OBC}{OC} \Rightarrow \frac{\sin 120°}{6} = \frac{\sin \angle OBC}{OC}$$

По т. синусов для $\triangle OMC$

$$\frac{\sin \angle OMC}{OC} = \frac{\sin \angle OCM}{OM} \Rightarrow \frac{\sin \angle OBC}{OC} = \frac{\sin 90°}{OM}$$

($\angle OBC$ и $\angle OMC$ опираются на одну дугу, а значит равны)

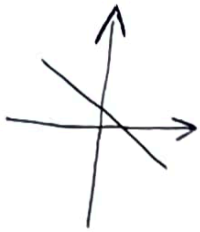
$$\frac{\sin 120°}{6} = \frac{\sin 90°}{OM} \Rightarrow OM \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6 \Rightarrow OM = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$$

Ответ: $OM = 4\sqrt{3}$

Чистовик

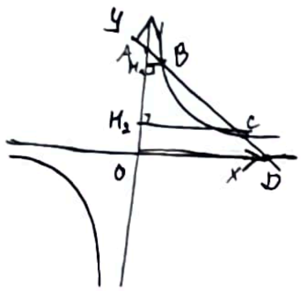
Задача №5

У функции $y=-18x+a$ $k<0$, а значит она имеет вид:



- данные прямые пересекают гиперболу в одной из четвертей (то есть только одну из ветвей)

1) $a \geq 0$



$A(0;a)$, т.к. $y=-18x+a=a$

$D(\frac{a}{18};0)$, т.к. $y=-18x+a=0 \Rightarrow a=18x$

$x=\frac{a}{18}$

Можно заметить, что если опустить перпендикуляры из точек B и C к OY, то образованные треугольники будут подобны и коэффициент подобия $\triangle ABH_1$ и $\triangle ADO$ равен $\frac{1}{3}$, т.к. $AB=BC=CD$ и $AB:AD=AB:3AB=1:3$.

Значит $B(\frac{a}{54};\frac{2}{3}a)$, аналогично у $C(\frac{2a}{54};\frac{1}{3}a)$

значит $AB=BC=CD$ и точки $(\frac{a}{54};\frac{2}{3}a)$ и $(\frac{2a}{54};\frac{1}{3}a)$ принадлежат $y=-18x+a$ и $y=\frac{1}{x}$.

$\frac{2}{3}a=-18\cdot\frac{a}{54}+a=-\frac{a}{3}+a=\frac{2}{3}a$ (+)

$\frac{1}{3}a=-18\cdot\frac{2a}{54}+a=-\frac{2}{3}a+a=\frac{1}{3}a$ (+)

$\frac{2}{3}a=\frac{54}{a} \Rightarrow 2a^2=54\cdot3,\ a^2=81.\ a=9$ (т.к. $a\geq0$)

$\frac{1}{3}a=\frac{54}{2a} \Rightarrow 2a^2=54\cdot3,\ a^2=81.\ a=9.$

2) При $a<0$ рассуждения аналогичны, получаем $a=-9$

Ответ: $a=\pm9$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Задача №7 Чистовик

Ответ: 45

Почему подходит:

Если ни одна задача не решена хотя бы половиной класса, то всего решенных задач $\leq 100 \cdot 9$ (всего задач × max человек решили ~~эту~~ одну задачу)

С другой стороны всего решенных задач $\geq 45 \cdot 20 + 1$ (каждый min решил 45 × кол-во людей и +1, т.к. у Пети больше чем у Васи, а значит хотя бы 46).

Значит $100 \cdot 9 \geq X \geq 45 \cdot 20 + 1 \Rightarrow 900 \geq 901$, противоречие. Значит какую-нибудь задачу решило 10 человек (или больше)

Почему не меньше:

~~Если n хотя бы 44, то пусть первую задачу решили 1-9 школьники, вторую 2-10, ..., двадцатую 20 и 1-8, и так далее. Тогда получится, что~~

Если n хотя бы 44, то пусть первый решил 1-45 задачу, второй 46-90, и т.д. кроме ~~Пети~~ Васи, который решил всего 44 задачи. Тогда получится, что ни одну задачу не решило 10 человек (если $n < 44$, то данный расклад также работает)

Ответ: $n = 45$

Чистовик

Задача №3

$S = P \Rightarrow ab = 2(a+b)$, где a, b - стороны. $(a \geq b)$

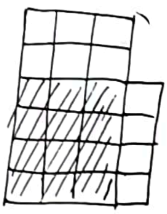
$\min b_1 = 3$, т.к. если $b_1 \leq 2$, то $a_1 b_1 \leq 2a_1 < 2a_1 + 2b_1$

$b_1 = 3 \Rightarrow 3a_1 = 2a_1 + 6$, $a_1 = 6$.

$\min b_2 = 4$, $4a_2 = 2a_2 + 8$, $a_2 = 4$.

$\boxed{b_1 \neq b_2}$

~~$S = 2\cdot 3 + 3 \cdot 4 = 18$ $S =$~~



$\min S = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 10$

Заметим, что чем больше стороны, тем больше S незакрашенной области, т.к. нужно будет прибавить хотя бы $\cancel{\max}$ $\min(a_1; a_2)$ и $\cancel{\max}$ $\min(b_1; b_2)$. $b \neq 5$, т.к. $5a = 2a + 10 \Rightarrow 3a = 10$ $(\notin N)$, значит следующее $\min b_1 = 6$, значит прибавляться будет хотя ~~бы 12, т.к. $\min(b_1; b_2) \geq b_1 = 6$ и $\max(a_1, a_2) \geq a_1 \geq b_1 = 6$~~

бы 12, т.к. $\min(b_1; b_2) = b_1 \geq 6$ и $\min(a_1; a_2) \geq a_1 \geq b_1 = 6$.

Ответ: 10

Задача №6 Чистовик

Всего вариантов ~~4 · 6 = 24~~ 4^6 (кол-во жуков ~~=~~ и варианты стороны у каждого)

Благоприятных $4 \cdot (3+3+3) = 36$

$$\frac{36}{4^6} = \frac{9}{4^5}$$

Ответ: шанс $\frac{9}{4^5}$

Черновик

1, 12-20

1 — 1-44

3 — 89-100, 1-32

$\boxed{9}$

11-20

2 — 45-88

4 — 33-76

5 — 77-100, 1-20

28

~~20x=2a+4~~ ~~[illegible]~~

~~1100~~

6 — 21-64

4·3.

7 — 65-100, 1-8

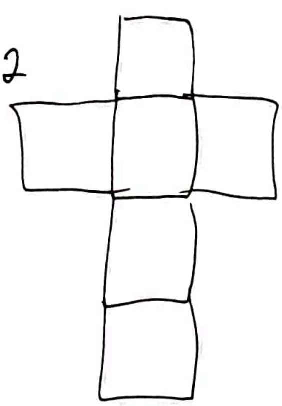
$ab=2a+2b$

~~min~~

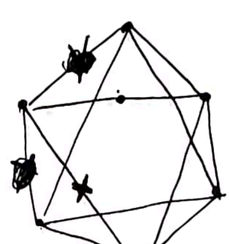
$a(b-2)=b$

$a=\frac{2b}{b-2} \Rightarrow 2b \vdots b-2$

$\underline{\min b=3,\ a=6}$



$b=4$



$4\cdot3.3=36$

$4\cdot(3+3+3$

Черновик

$\cancel{20n+1 \geq 100 \cdot 9}$

$\cancel{100 = 45 \cdot 20 + 1}$

$\boxed{n \geq 45}$

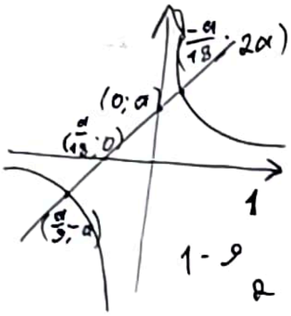
$y = \frac{1}{x}$

$y = -18x + a$

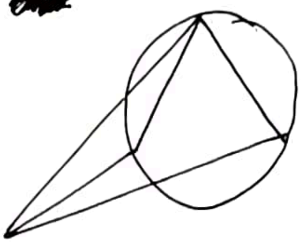
$\left(\frac{2a}{18}; -a\right)$

$-a = \frac{18}{2a} \Rightarrow \cancel{-2a^2 = 18}$

$\cancel{a^2 = 9}$



$\left(\frac{a}{9}; -a\right)$



1 – 9

2

2 – 20

10

10 – 20

$\frac{9}{a} = -a$

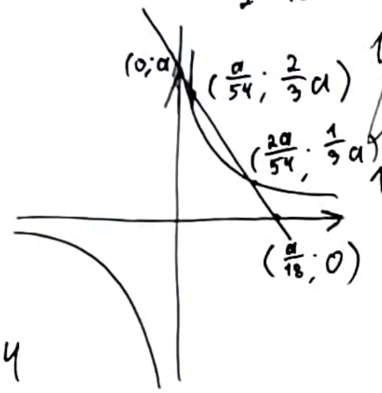
$9 = -a^2$

11

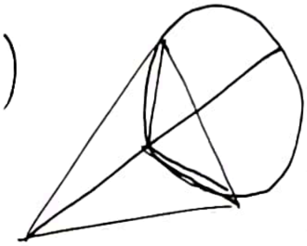
11 – 20, 1

12

12 – 20, 1 – 2



$\left(\frac{a}{54}; \frac{2}{3}a\right)$



$\frac{54}{a} \times \frac{2a}{3}$

$54 \cdot 3 = 2a^2$

$27 \cdot 3 = a^2$

$81 = a^2$

$\pm 9 = a$

1

1 – 9

11

11 – 19

$\boxed{n = 9}$

12

12 – 20

13

13 – 20

$n \geq 9$

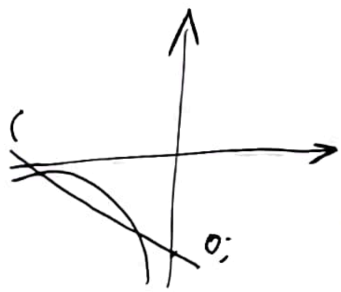
1 – 44

45 – 88

$6 \cdot 4$

24

$\geq n$



20 уч.

П > В

$\underbrace{n; n; n; \ldots; n; n+1}_{20}$

20n + 1   1

V

$\cancel{9 \cdot 20 = 180}$

$20n > 898$

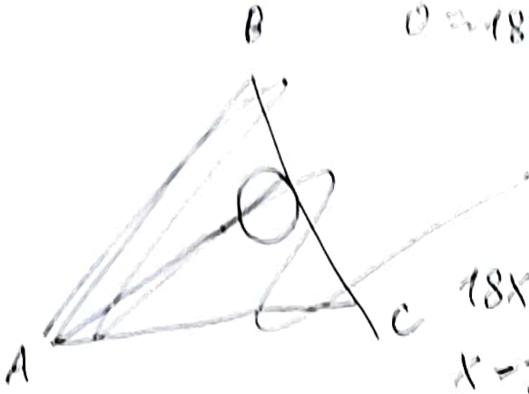
$n \geq 45$

$9 \cdot 100 = 900$

8.

Черновик

$0 = -18x + a$



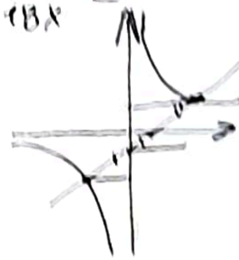
$$\frac{1}{x} = -18x + a$$

$$\frac{1}{x} = 2a$$

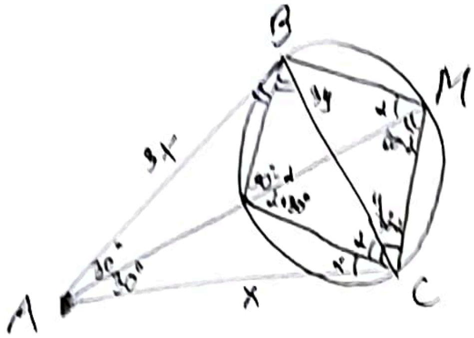
$$\frac{-18}{a} =$$

$18x = a \qquad x = \frac{1}{a - 18x}$

$x = \frac{a}{18}$



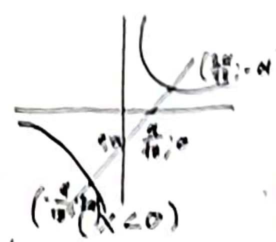
$4y = 6$



$2y = 3$

$y = 1{,}5$

1) $\left(\frac{a - \sqrt{a^2-72}}{36};\right.$



$1{,}5 \cdot 4{,}5 =$

OM-?

$BC = 6$

$AB = 3AC$

$\angle BAC = 60°$

$$\frac{36}{a - \sqrt{a^2-72}} = \frac{\sqrt{a^2-72} - a}{2}$$

1) $\frac{1}{x} = -18x + a$

~~$\beta = 60° - \alpha$~~

2) $(0; a)$

$$\frac{\sin 120°}{} - \frac{\sin \alpha}{BO}$$

3) $\left(\frac{a}{18}; 0\right)$

$$\frac{36}{a - \sqrt{a^2-72}} = \frac{\sqrt{a^2-72} + a^6}{2}$$

$$\frac{\sin \alpha}{BO} = \frac{\sin 90°}{OM}$$

4) $\frac{1}{x} = -18x + a \quad (x > 0)$

$72 = a^2 - (a^2 - 72)$

$$\sqrt{\left(\frac{a}{18}\right)^2 + a^2}$$

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{6} \times \frac{1}{OM} \qquad 6 = \frac{\sqrt{3}}{2} OM$$

$$OM = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = \boxed{4\sqrt{3}}$$

$1 = -18x^2 + ax \qquad D = a^2 - 18 \cdot 4 = a^2 - 72$

$18x^2 - ax + 1 = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2-72}}{36}$

Черновик

$x^3 - |x^2 - x - 2| = 12x - 13$

1) $x^2 - x - 2 \geq 0$

$(x-2)(x+1) \geq 0$

$x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$

$x^3 - x^2 + x + 2 = 12x - 13$

$x^3 - x^2 - 11x + 15 = 0$

$(x-3)(x^2 + 2x - 5) = 0$

$D_2 = 4 + 5 \cdot 4 = 24$

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{24}}{2} = -1 \pm \sqrt{6}$

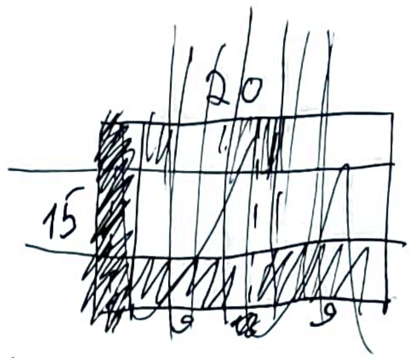
2) $x \in (-1; 2)$

$x^3 + x^2 - x - 2 = 12x - 13$

$x^3 + x^2 - 13x + 11 = 0$

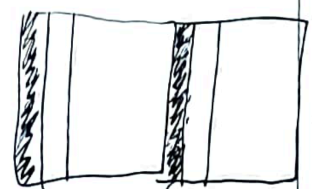
$(x-1)(x^2 + 2x - 11) = 0$

$D_2 = 4 + 44 = 48$



≤ 30

≥ 3



$P = S$

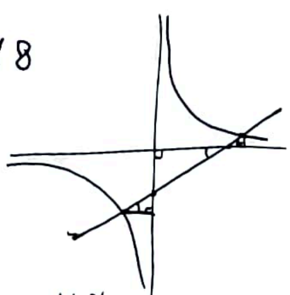
$ab = a + b$

$ab - a = b$

$a(b-1) = b$

$a = \frac{b}{b-1} \Rightarrow b \vdots b-1$

$b = 2 \Rightarrow a = 2$



$2(a+b) = ab$

$2a + 2b = ab$

$2b = ab - 2a$

$2b = a(b-2)$

$a = \frac{2b}{b-2}$ $\qquad b = \frac{2a}{a-2}$

$2b = x(b-2)$

$2b = xb - x$ $\qquad b(x-2) = x$