0 892559 180001

89-25-59-18
(161.25)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по Математике
профиль олимпиады

Жирновой Ирины Андреевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«13» 04. 2025 года

Подпись участника

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
89-25-59-18		+	+	+	+	+	−	∓	+
							0		

95 (девяносто пять)

89-25-59-18 (161.25)

Чистовик

№1) $\sqrt{4x^2+12x+9}+\sqrt{b^2+6x+9}+(\sqrt{x+2})^2=\sqrt{4+\sqrt{12}}-\sqrt{4-\sqrt{12}}$

$\begin{cases}\sqrt{4x^2+12x+9}+\sqrt{(x+3)^2}+x+2=\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}-\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}\\ \cancel{\sqrt{4x^2+12x+9}}\ x+2\geq 0\end{cases}$

$\begin{cases}\sqrt{4x^2+12x+9}+|x+3|+x+2=\sqrt{3}+1-|\sqrt{3}-1|\\ x\geq -2\end{cases} \Rightarrow \boxed{x+3\geq 1} \Rightarrow |x+3|=x+3$

$\begin{cases}\sqrt{4x^2+12x+9}+2x+5=2\\ x\geq -2\end{cases}$

$\begin{cases}\sqrt{(2x+3)^2}+2x+5=2\\ x\geq -2\end{cases}$ $\begin{cases}|2x+3|+2x+3=0\\ x\geq -2\end{cases}$

1) $\cancel{2x+3}$ $2x+3\geq 0 \Rightarrow x\geq -\frac{3}{2}$

$\begin{cases}4x+6=0\\ x\geq -2\\ x\geq -\frac{3}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=-\frac{3}{2}\\ x\geq -\frac{3}{2}\end{cases} \Rightarrow \boxed{x=-\frac{3}{2}}$ – подходит

2) $2x+3<0 \Rightarrow x<-\frac{3}{2}$

$\begin{cases}-(2x+3)+2x+3=0\\ x\geq -2\\ x<-\frac{3}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}0=0 \text{ – всегда}\\ -2\leq x<-\frac{3}{2}\end{cases}$ ← подходит

Ответ: $x\in\left[-2;-\frac{3}{2}\right]$

№2) $5^{3-\frac{1}{x}}\geq a+\sin 3^x$ min a при котором при $x>0$ нет реш.

~~$f(x)=5^{3-\frac{1}{x}}-\sin 3^x$~~

~~$f'(x)=5^{3-\frac{1}{x}}\cdot\ln 5\cdot\left(-\left(-1\cdot\frac{1}{x^2}\right)\right)-\cos 3^x\cdot 3^x\cdot\ln 3=$~~

~~$=5^{3-\frac{1}{x}}\cdot\ln 5\cdot\frac{1}{x^2}-\cos 3^x\cdot 3^x\cdot\ln 3$~~

То есть при $x>0$ $5^{3-\frac{1}{x}}<a+\sin 3^x$

$f(x)=5^{3-\frac{1}{x}}$ ← при $x>0$ $\left(-\frac{1}{x}\right)$ монотонно возрастает (приближ. к нулю)

$\Rightarrow$ ~~...~~ $0<5^{3-\frac{1}{x}}<5^3=125$

~~чистовик~~ чистовик

Пусть $a < 126 \Rightarrow a = 126 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$

Рассмотрим x_0 такой, что

$f(x_0) = 125 - \varepsilon = a - 1$

(такой x_0 найдется т.к. $5^{3-\frac{1}{x}}$ принимает все значения на промежутке $(0; 125)$, т.к. $f(x)$ монотонно возрастает и непрерывна)

~~$\Rightarrow$ Пусть $\sin 3^{x} \neq 0$~~

Рассмотрим такое k_1 (натуральное!), что $3^{x_0} \leq -\frac{\pi}{2} + 2\pi k_1$

(такое найдется т.к. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ — неогр. функция, монотонно возраст., 3^{x_0} — константа)

Тогда рассмотрим $x_1 = \log_3\left(2\pi k_1 - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x_0 \leq x_1$

$\Rightarrow f(x_1) = 5^{3-\frac{1}{x_1}} \geq 5^{3-\frac{1}{x_0}} = f(x_0) = 125 - \varepsilon = a - 1$

$\Rightarrow 5^{3-\frac{1}{x_1}} \geq a - 1 = a + \sin \underbrace{3^{\log_3\left(2\pi k_1 - \frac{\pi}{2}\right)}}_{= 2\pi k_1 - \frac{\pi}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Существует $x > 0$ удовлетвор. нер-во $\Rightarrow$

$\Rightarrow a \geq 126$

Рассмотрим $a = 126$

$f(x) < 125$

$\sin 3^x \geq -1 \Rightarrow a + \sin 3^x = 126 + \sin 3^x \geq 125$

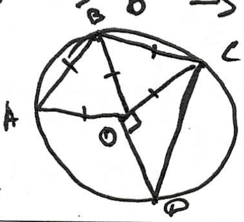
$$\begin{cases} f(x) \geq 126 + \sin 3^x \geq 125 \\ f(x) < 125 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$$

Ответ: $a = 126$

$\boxed{№3}$ По трем сторонам и их расположению однозначно определена четверть, а значит и весь четырехугольник.

Рассмотрим всевозможное расположение сторон:

(1) $6 \rightarrow 6 \rightarrow 6\sqrt{2}$ т.е. $AB = BC = 6$ $CD = 6\sqrt{2}$



$R = 6$ радиус

O — центр окружности

$\left.\begin{matrix} AB = OA = OB = 6 \\ BC = OB = OC = 6 \end{matrix}\right| \Rightarrow \angle BOC = \angle AOB = 60^\circ$

$OC = OD = 6$. Заметим, что:

89-25-59-18 (161.25)

чистовик чистовик

$OC^2+OD^2=6^2+6^2=72$ | $\Rightarrow OC^2+OD^2=CD^2 \Rightarrow \angle DOC=90^\circ$

$CD^2=(6\sqrt{2})^2=72$ | (по т. обратной т. Пифагора)

$\Rightarrow \angle AOD = 360^\circ-90^\circ-60^\circ-60^\circ=240^\circ-90^\circ=150^\circ$

~~$\alpha = \frac{\angle AOD}{2}$ = ... - дуги, опирающейся на дугу AD~~

$\Rightarrow S_{ABCD}=S_{AOB}+S_{BOC}+S_{COD}+S_{AOD}=$

$=\frac{1}{2}\cdot R^2\cdot\sin 60^\circ+\frac{1}{2}R^2\cdot\sin 60^\circ+\frac{1}{2}R^2\sin 90^\circ+\frac{1}{2}R^2\cdot\sin 150^\circ=$

$=\frac{1}{2}R^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+1+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}R^2\left(\sqrt{3}+\frac{3}{2}\right)=$

$=\frac{1}{2}\cdot 36\left(\sqrt{3}+\frac{3}{2}\right)=18\sqrt{3}+27$

Докажем, что другой площади быть не может:
~~Углы~~ центральные углы опирающиеся на дуги AB, BC и CD определяются однозначно, т.к. известна длина хорды. (не зависит от порядка, в котором идут стороны)
Третий угол и соответствующая ему хорда тоже определяются однозначно: 360° − (сумма центр. углов на хорды AB, BC и CD)
А площадь определяется как $(S_{AOB}+S_{BOC}+S_{COD}+S_{AOD})$ и зависит только от углов и квадрата радиуса $(S_{AOB}=\frac{1}{2}R^2\cdot\sin\angle AOB)$
$\Rightarrow$ Площадь зависит только от угла, а он не зависит от порядка сторон $\Rightarrow$ Площадь не зависит от порядка сторон и равна $18\sqrt{3}+27$

Ответ: $18\sqrt{3}+27$

№4) $\cos^3(\pi x)+\cos^3(2\pi x)-\cos^3(4\pi x)=(\cos\pi x+\cos(2\pi x)-\cos^3 4x)^3$ $[0{,}3;1{,}6]$

Пусть $a=\cos^3\pi x$ $b=\cos(2\pi x)$ $c=-\cos 4\pi x$

$\Rightarrow a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3$ $(a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)$

$a^3+b^3+c^3=a^3+2a^2(b+c)+a(b+c)^2+b^3+2b^2(a+c)+b(a+c)^2+c^3+2c^2(b+a)+c(b+a)^2$

$2a^2(b+c)+2b^2(a+c)+2c^2(a+b)+a(b+c)^2+b(a+c)^2+c(a+b)^2=0$

~~черновик~~ чистовик

$2a^2b+2a^2c+2b^2a+2b^2c+2ac^2+bc^2+ab^2+ac^2+2abc+$
$+ba^2+bc^2+2abc+a^2c+b^2c+2abc=0$

$3(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+ac^2+bc^2)+6abc=0$

$a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+ac^2+bc^2+2abc=0$

$a^2(b+c)+ab(b+c)+bc(b+c)+ac(b+c)=0$

$(b+c)(a^2+ab+bc+ac)=0$

$(b+c)(a+b)(a+c)=0$
1 2 3

1 ~~если~~ $b+c=0$

$\cos 2\pi x-\cos 4\pi x=0$

$-2\sin\frac{2\pi x+4\pi x}{2}\cdot\sin\frac{2\pi x-4\pi x}{2}=0$

$\left[\begin{array}{l}\sin 3\pi x=0\\ \sin -\pi x=0\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}3\pi x=\pi k\\ -\pi x=\pi k\end{array}\right.$ $k\in\mathbb{Z}$ $\left[\begin{array}{l}x=\frac{k}{3}\\ x=-k\end{array}\right.$

$x\in[0{,}3;1{,}6]\Rightarrow$ $x=1$ (при $x=-k$ $k=-1$)

$x=\frac{1}{3}=0{,}(3)>0{,}3$ – подходит

$x=0<0{,}3$ ← не подходит

$x=\frac{2}{3}$

$x=\frac{3}{3}=1$

$x=\frac{4}{3}$

при $x=\frac{k}{3}$, $k=1,2,3,4$.

$x=\frac{5}{3}$ – не подходит $\left(\frac{5}{3}=1{,}(6)>1{,}6\right)$

2 $a+b=0$

$\cos\pi x+\cos 2\pi x=0$

$2\cos\frac{\pi x+2\pi x}{2}\cdot\cos\frac{\pi x-2\pi x}{2}=0$

$\cos\frac{3\pi x}{2}\cdot\cos\frac{\pi x}{2}=0$

$\left[\begin{array}{l}\cos\frac{3\pi x}{2}=0\\ \cos\frac{\pi x}{2}=0\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\frac{3\pi x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k\\ \frac{\pi x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k\end{array}\right.$ $k\in\mathbb{Z}$ $\left[\begin{array}{l}3\pi x=\pi+2\pi k\\ \pi x=\pi+2\pi k\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{3}+\frac{2k}{3}=\frac{(2k+1)}{3}\\ x=1+2k\end{array}\right.$ (включены в $x=\frac{k}{3}\Rightarrow$ учтены в 1)

$[0{,}3;1{,}6]$ $\Rightarrow x=1$ (при $k=0$)

89-25-59-18 (161.25)

③ $a+c \geq 0$ ~~чистовик~~ чистовик

$\cos\pi x - \cos 4\pi x = 0$

$-2\sin\frac{5\pi x}{2}\cdot\sin\left(-\frac{3\pi x}{2}\right)=0$

$\left[\begin{array}{l}\sin\frac{5\pi x}{2}=0\\ \sin\left(-\frac{3\pi x}{2}\right)=0\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\frac{5\pi x}{2}=\pi k\\ -\frac{3\pi x}{2}=\pi k\end{array}\right.$ $k\in\mathbb{Z}$ $\left[\begin{array}{l}x=\frac{2k}{5}\\ x=-\frac{2k}{3}\end{array}\right.$

включено в $x=\frac{k}{3}$ => учтено в ①

$x=\frac{2k}{5}$ => $x = 0 < 0{,}3$ – не подходит

$x=\frac{2}{5}=0{,}4>0{,}3$ – подходит

$x=\frac{4}{5}$

$x=\frac{6}{5}$

$x=\frac{8}{5}=1{,}6 \leq 1{,}6$ – подходит

} $k=1,2,3,4.$

$x=\frac{9}{5}=1{,}8>1{,}6$ – не подходит

Ответ: $1;\ \frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ \frac{4}{3};\ \frac{2}{5};\ \frac{4}{5};\ \frac{6}{5};\ \frac{8}{5}.$

$\boxed{№5}$

$f_1(x)=(x+a_1)(x^2+b_1x+6)$

$f_2(x)=(x^2+a_2)(x^2+b_2x+14)$

$f_3(x)=(x^2+a_3)(x^2+b_3x+21)$

$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 > 0$

$f_1(x)=f_2(x)=f_3(x)$ => у многочленов в приведенном виде равны коэф-ты при соотв. степенях x.

Запишем f_1, f_2 и f_3 в приведенном виде.

$f_1(x)=x^3+(b_1+a_1)x^2+(6+b_1a_1)x+6a_1$

$f_2(x)=x^3+(b_2+a_2)x^2+(14+a_2b_2)x+14a_2$

$f_3(x)=x^3+(b_3+a_3)x^2+(21+a_3b_3)x+21a_3$

① $\begin{cases}6a_1=14a_2\\ 6a_1=21a_3\end{cases}$ => $\left[\begin{array}{l}a_2=\frac{3}{7}a_1\\ a_3=\frac{2}{7}a_1\end{array}\right.$

шаговик шаговик

(2) $\begin{cases} b_1+a_1=b_2+a_2 \\ b_1+a_1=b_3+a_3 \end{cases}$ $\begin{cases} b_1+a_1=b_2+\frac{3}{7}a_1 \\ b_1+a_1=b_3+\frac{2}{7}a_1 \end{cases}$ $\begin{cases} b_2=b_1+\frac{4}{7}a_1 \\ b_3=b_1+\frac{5}{7}a_1 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 6+b_1a_1=14+a_2b_2 \\ 6+b_1a_1=21+a_3b_3 \end{cases}$ $\begin{cases} b_1a_1=8+\frac{3}{7}a_1\left(b_1+\frac{4}{7}a_1\right) \\ b_1a_1=15+\frac{2}{7}a_1\left(b_1+\frac{5}{7}a_1\right) \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{12}{49}a_1^2-\frac{4}{7}a_1b_1+8=0 \quad \Big| \times\frac{5}{4} \\ \frac{10}{49}a_1^2-\frac{5}{7}a_1b_1+15=0 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{15}{49}a_1^2-\frac{5}{7}a_1b_1+10=0 \\ \frac{10}{49}a_1^2-\frac{5}{7}a_1b_1+15=0 \end{cases}$

вычтем:

$\frac{5}{49}a_1^2-5=0$

$\Rightarrow a_1^2=49 \Rightarrow a_1=\pm 7 \Rightarrow \boxed{a_1=7}$ (т.к. $a_1>0$)

$a_1^2\cdot\frac{10}{49}-\frac{5}{7}a_1b_1+15=0$

$10-5b_1+15=0 \Rightarrow 5b_1=25 \Rightarrow \boxed{b_1=5}$

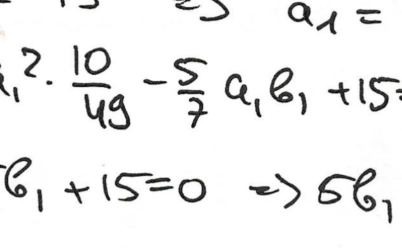
$\cancel{a_1+b_1+a_2+b_2+a_3+b_3=a_1+b_1+\frac{3}{7}a_1+b_1+\frac{4}{7}a_1+\frac{2}{7}a_1+b_1+\frac{5}{7}a_1}$

из (2)

$a_1+b_1+a_2+b_2+a_3+b_3=3(a_1+b_1)=3(7+5)=3\cdot 12=36$

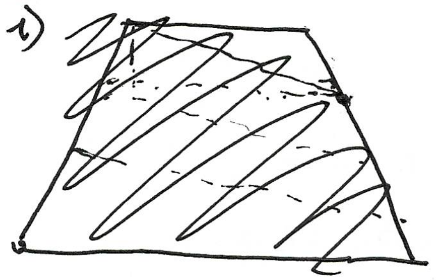
Ответ: 36

№6)



~~листовик~~ ~~листовик~~

№7) Рассмотрим боковую грань пирамиды

1) 

Её можно параллельными прямыми (семью штуками) разбить на части (см. рис.) (т.к. пусть при пересечении грани первооткрыватель перемещался на предыдущее ребро, но ниже на спустившееся расстояние => ситуация будет аналогична

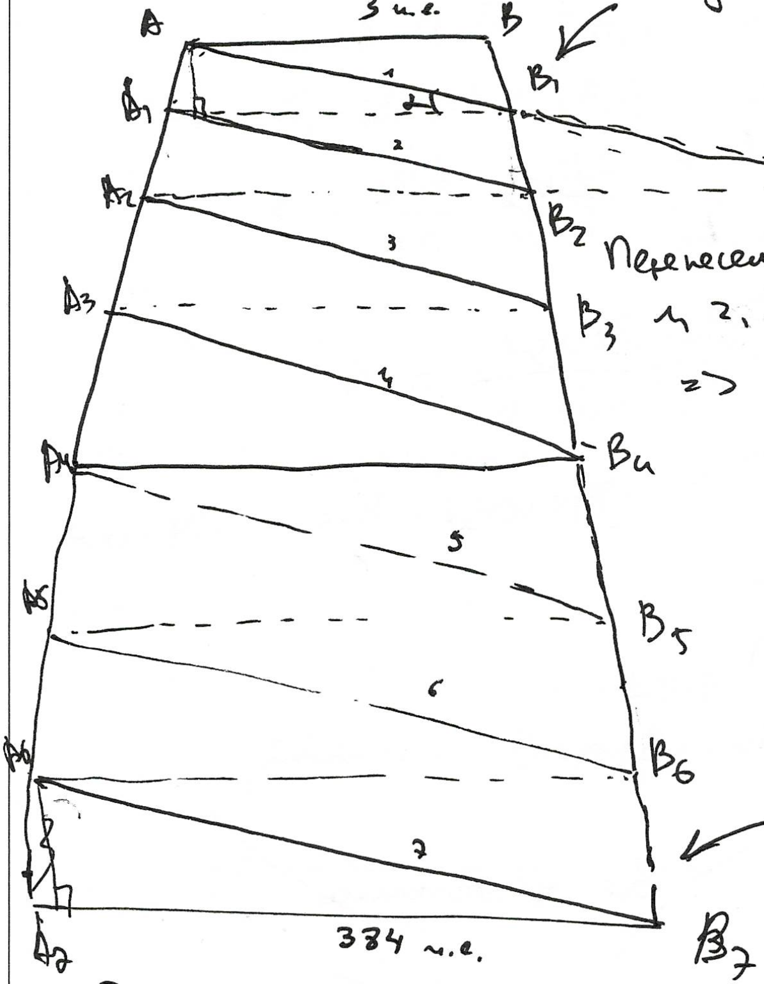


рис. 1.

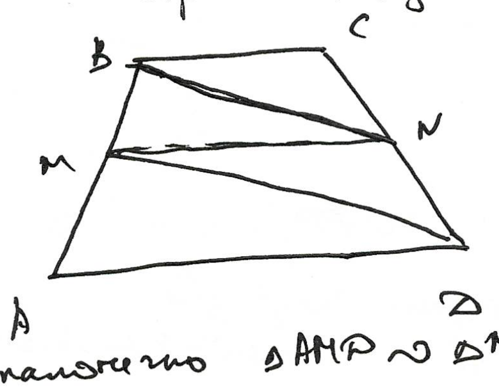
Пусть отмеченный угол α.

Тогда

Перенесем параллельно отрезки 1, 2, ..., 7 в одну прямую

=>

Рассмотрим такую трапецию ~~ABCD~~ (не обязательно р/б.)



$MN \parallel AD \parallel BC$

$BN \parallel DM$.

$\left.\begin{array}{l} CN \parallel ND \\ BN \parallel DM \\ BC \parallel MN \end{array}\right| \Rightarrow \triangle BCN \sim \triangle MND$

$\Rightarrow \dfrac{BC}{MN} = \dfrac{CN}{ND} = \dfrac{BM}{MA}$ $\Bigg| \Rightarrow$

Аналогично $\triangle AMD \sim \triangle MBN \Rightarrow \dfrac{MN}{AD} = \dfrac{BM}{MA}$

$\dfrac{BC}{MN} = \dfrac{MN}{AD} \Rightarrow$ на рис. 1. $\dfrac{AB}{A_1B_1} = k \Rightarrow$

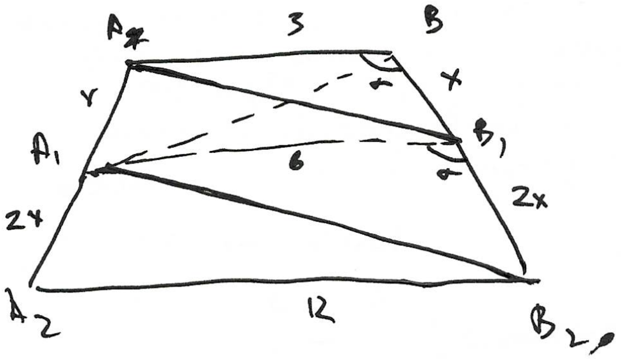
~~A_1~~ ~~A_1B_1~~ $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{A_1B_1}{A_2B_2} = \ldots = \dfrac{A_6B_6}{A_7B_7}$

$\Rightarrow A_1B_1 = k \cdot AB$, $A_2B_2 = k^2 \cdot AB$, ..., $A_7B_7 = k^7 \cdot AB$.

черновик

$\Rightarrow k^7 \cdot 3 = 384$

$k^7 = 128 \Rightarrow \boxed{k=2}$



$\Rightarrow A_1B_1 = 2\cdot 3 = 6$

$A_2B_2 = 4\cdot 3 = 12$

$AB_1^2 = x^2+9-6x\cos\alpha$

$A_1B_2^2 = 4x^2+36-\cancel{12}24x\cos\alpha$

$\cancel{\frac{AB_1}{A_1B_2}} = \frac{A_1B_2}{AB_1} = 2$

$$\Rightarrow \left(\frac{A_1B_2}{AB_1}\right)^2 = \frac{4x^2+36-12x\cos\alpha}{x^2+9-6x\cos\alpha} = 4$$

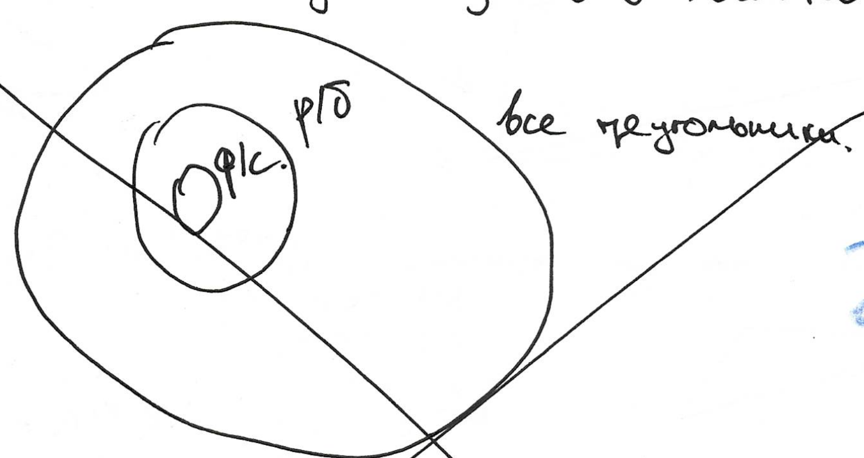
$4x^2+36-\cancel{12}24x\cos\alpha = 4x^2+36-24x\cos\alpha$

h — высота пирамиды

$h = (1+2+\ldots+7)\sin\alpha$

↑ длины звеньев ломаной.

~~№8~~



(1) Выберем две стороны $(30\cdot\cancel{29})$ способов

~~Выбер~~

Выберем ещё две

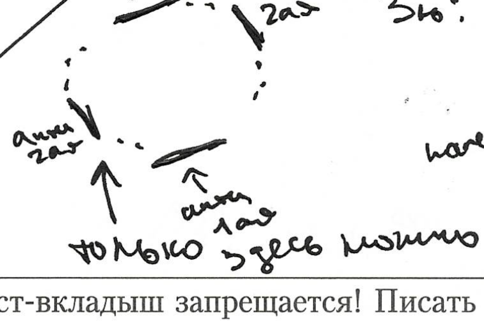
Выберем вторую ∠ — 28 способов

3ю: между 1ой и 2ой — между

до анти 1ой (противоположной)

или ~~до~~ и анти 2ой между.

$\Rightarrow$ между анти 1ой и анти 2ой.



~~Если между 1 и 2 k ребер, то можно ровно 1 треугольник выбрать 2 кто $0 \le k \le 13$~~

~~$\Rightarrow k=0$: 2 сп.~~

~~$k=1$: 2 способа~~

~~$\Rightarrow$ всегда 2 способа (слева и справа от 1ой стороны)~~

~~$\Rightarrow \dfrac{2\cdot(0+1+\ldots+13)\cdot 30}{3!} = \dfrac{(1+13)\cdot 13\cdot 30}{3} =$~~

~~каждый треугольник только считаем~~

~~$= 13\cdot 14\cdot 10$~~

Черновик

~~(2) Равносторонние посчитали~~

№8 Если между двумя выбранными сторонами k ребер.

То может добавиться не более чем $\left[\frac{k+1}{2}\right]$ (т.к. подойдут только стороны, которые между двумя сторонами, противоположными выбранным двум сторонам. При этом добавится не более чем $\left[\frac{k}{2}\right]$, т.к мы не берем два симметричных ребра)

(1) $k=1$. $+1$ ~~ребр~~ треугольник $(1; 13; 13)$

задаем треугольник набором из кол-ва ребер между его сторонами

(2) $k=2$ $+1$ $(2; 12; 13)$

(3) $k=3$ $+2$ $(3; 12; 12)$
$(3; 11; 13)$

(4) $k=4$ $+2$ $(4; 11; 12)$
$(4; 10; 13)$

$k=5$ $\quad +3$ $\quad (5; 11; 11)$ чистовик

$(5; 10; 13)$

$(5; 9; 14)$

$k=6$ $\quad +3$ $\quad (6; 10; 11)$

$(6; 9; 12)$

$(6; 8; 13)$

$k=7$ $\quad +4$ $\quad (7; 10; 10)$

$(7; 9; 11)$

$(7; 8; 12)$

$(7; 7; 13)$

$k=8$ $\quad +2$ $\quad (8; 9; 10)$

$(8; 8; 11)$

А ~~тела~~ множества не повторяются

$k=9$ $\quad +1$ $\quad (9; 9; 9)$ т.к. $10+10+10>27$

все остальные повторяются

$$\Rightarrow 1+\underbrace{1+2+7}_{5}+\underbrace{3+3}_{6}+\underbrace{4+2+1}_{7}=1+11+7=19$$

Ответ: 19