0 878800 590003

87-88-00-59
(161.28)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Замской Полины Леонидовны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«13» апреля 2025 года

Подпись участника

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
87-88-00-59		+	+	∓	∓	+	∓	0	0
		+	+	∓	∓	+	∓	0	0

87-88-00-59
(161.28)

~~60 (шестьдесят)~~ черновик

Задача 1 65 (шестьдесят пять)

$\sqrt{4x^2+12x+9}+\sqrt{x^2+6x+9}+(\sqrt{-(x+2)})^2=$

$=\sqrt{3+\sqrt{8}}-\sqrt{3-\sqrt{8}}=$ исправлено по апелляции

$(4x^2+12x+9)^2+2(4x^2+12x+9)(x^2+6x+9)+$
$+($

$(3+\sqrt{8})^2-2\sqrt{3+\sqrt{8}}\sqrt{3-\sqrt{8}}+$

$+(4-\sqrt{8})^2=$

4
16 - 12

$=\sqrt{4x^2+12x+9}^2+2$

$4^2-\sqrt{12}^2$

$(16+8\sqrt{12}+12)-2((4+\sqrt{12})(4-\sqrt{12}))+$
$+(16-8\sqrt{12}+12)=$

$=28+8\sqrt{12}-8+28-8\sqrt{12}=$

$\times$ 2,25
4,00
000

$=56-8=48$

$\sqrt{4x^2+12x+9}+\sqrt{x^2+6x+9}+(\sqrt{(x+2)})^2=48$

$4x^2+12x+9=0$

$k=6$

2,25

$D_1=36-9\cdot4=0$

$4\cdot(-1{,}5)^2+12(-1{,}5)+9=$

$=$

$x=\frac{-6}{a}$ $x=\frac{-6}{4}=\frac{-3}{2}=$

$=-1{,}5$

$$\begin{array}{r} 2,25 \\ \times\ 400 \\ \hline 000 \\ 000 \\ 900 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 400 \\ \times\ 225 \\ \hline 2000 \\ 800 \\ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ +\ 9 \\ \hline 144 \end{array}$$

$4x^2+12x+9=0$

$D=144-4\cdot9\cdot4=144-144=0$

$\frac{-b}{2a}=\frac{-\cancel{12}^{6}}{\cancel{8}_{4}}=\frac{-\cancel{6}^{3}}{\cancel{4}_{2}}=-1,5$

$(x+1,5)^2$ $\quad 9-18+9=0$

$\sqrt{x^2+6x+9}$ $\quad \sqrt{4^2}$ $\quad \sqrt{16}=4$

$\sqrt[2]{4}^{\cancel{2}}$

$x^2+6x+9=0$

$D=36-4\cdot9=0$

$x=\frac{-6}{2}=-3$

$(x+3)^2$

$\sqrt{(x+1,5)^2}+\sqrt{(x+3)^2}+$

$+\left(\sqrt{(x+2)}\right)^2=x+1,5+x+3+$

$+x+2=3x+6,5$

$3x+6,5=48$

черновик

87-88-00-59
(161.28)

$3x = 48 - 6{,}5$

$3x = 41{,}5$

$x = \frac{41{,}5}{3}$ \10

$\frac{415}{30} = \frac{83}{6}$

$\frac{1}{2} = \sqrt{\frac{415}{30}}$ 6

$83 \cdot 5 = 415$

$415 : 5 = 83$

$3^{5-\frac{1}{x}} \geq a + \sin 4^x$ — положительное min

$3^{5-\frac{1}{x}} - a - \sin 4^x \geq 0$

$\frac{3^5}{3^{\frac{1}{x}}} - a - \sin 4^x \geq 0$ $\frac{1}{3}$

$\frac{243}{3^{\frac{1}{x}}} - \sin 4^x - a \geq 0 \quad | \cdot 5^{\frac{1}{x}} > 0$

$125 - \sin 3^x \cdot 5^{\frac{1}{x}} - 5a^{\frac{1}{x}} \geq 0$

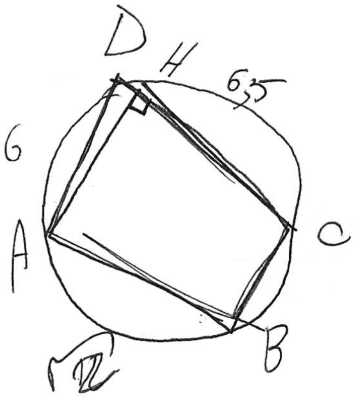
$5^{\frac{1}{x}} \quad \sqrt[x]{5}$

$125 - \sin 3^x \sqrt[x]{5}\, a \geq 0$

$125 - \sin 3^x \sqrt[x]{5} - a\sqrt[x]{5} \geq 0$

Пусть $\sqrt[x]{5} = t$, тогда

$125 - \sin 3^x t - at \geq 0$ черновик



max $S_{\square}$

$\angle D + \angle B = 180$

и ||

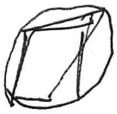
$\angle C + \angle A = 180^\circ$

$$\begin{array}{r} 81 \\ \times\ 3 \\ \hline 243 \end{array}$$

$S_{\square} = ah = a \cdot b \cdot \sin\alpha$

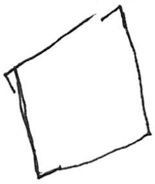
$$\begin{array}{r} 27 \\ \times\ 3 \\ \hline 81 \end{array}$$

Это параллелю



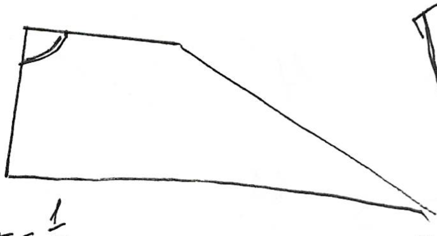
$3^2 = 9$

$3^3 = 27$



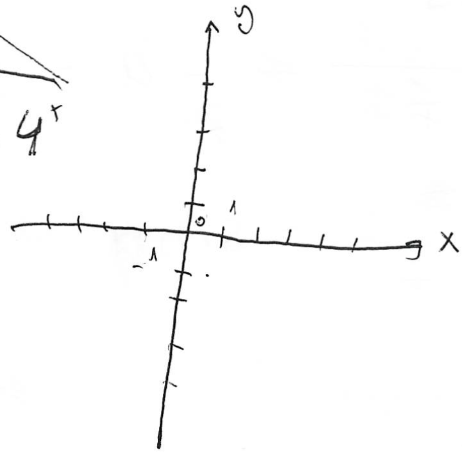
$3^4 = 81$

$3^5 = 243$



$3^{5-\frac{1}{x}} \geq a + \sin 4^x$

$3^5 > 3^{5-\frac{1}{x}}$



$3^5 = 243$

черновик

Задача 1

$$\sqrt{4x^2-12x+9}+\sqrt{x^2-6x+9}+\left(\sqrt{-(x-2)}\right)^2=$$

$$=\sqrt{3+\sqrt{8}}-\sqrt{3-\sqrt{8}}$$

$$\sqrt{3+\sqrt{8}}=\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{(1+\sqrt{2})^2}=$$

$$=\sqrt{2}+1$$

Аналогично $\sqrt{3-\sqrt{8}}=\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}=$

$$=\sqrt{2}-1 \Rightarrow \sqrt{(2x-3)^2}+\sqrt{(x-3)^2}+$$

$$+\left(\sqrt{-(x-2)}\right)^2=(1+\sqrt{2})-(\sqrt{2}-1)=$$

$=2$ $-(x-2)$ – под корнем $\Rightarrow -(x-2)\geq 0$

$x\leq 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x\leq 2 \\ |2x-3|-(x-3)-(x-2)=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\leq 2 \\ |2x-3|=2x-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\leq 2 \\ 2x-3\geq 0 \end{cases} \Rightarrow 1{,}5\leq x\leq 2$$

Ответ: $[1{,}5;2]$

чистовик

Задача 2

$3^{5-\frac{1}{x}} \geq a+\sin 4^{x}$ – не имеет решений

$x>0$; $a>0$

Нер-во не имеет решений => графики левой и правой частей нер-ва не пересекаются при $x>0$

При этом график правой части будет выше графика левой части

Заметим, что $3^{5}>3^{5-\frac{1}{x}}$ при $\forall x>0$ =>

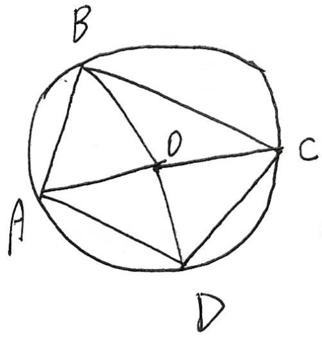
=> $y=3^{5}=243$ – асимптос для графика $3^{5-\frac{1}{x}}$ => при $a<244$ графики или точно пересекутся, или график $a+\sin 4^{x}$ будет ниже, чем график $3^{5-\frac{1}{x}}$,

Но эти два случае оба нам не подходят => $min=244$, при нем графики не пересек. график правой части строго выше графика левой части

Ответ: 244

чистовик

Задача 3 чистовик



Рассм. четырехуг. ABCD
Пусть O – центр вписаной окружности.

Центральный угол, опирающийся на хорду длиной 5 будет $= 60°$, а треугольник, образований двумя радиусами окружности и стороной равной $5\sqrt{2}$ будет прямоуг. по признаку прямоуг Δ $5^2+5^2=(5\sqrt{2})^2$

$$\Updownarrow$$

$25+25=25\cdot 2$ – верно (обратная теорема Пифагора)

Таким образом S_{ABCD} состоит из 4х площадей треугольников, имеющих общую вершину в точке O

$(S_\Delta AOD + S_\Delta DOC + S_\Delta COD + S_\Delta BOA = S_{ABCD})$

Площадь всех треугольников находится однозначно, а значит S_{ABCD} единственна.

Действительно: $S_1 = S_2 = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5\cdot \sin 60° = \frac{1}{2}\cdot 25\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ – площадь двух равносторонних треугольников с хордой $=5$. $S_3 = 5\cdot 5\cdot \frac{1}{2} = \frac{25}{2}$ – площадь третьего треугольника, который прямоуг. с хордой $5\sqrt{2}$.

$S_4 = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5\cdot \sin(360°-60°-60°-90°) = \frac{25}{2}\cdot \sin 150° = \frac{25}{2}\cdot\frac{1}{2}$

$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \frac{25\sqrt{3}}{4} \cdot 2 + \frac{25}{2} + \frac{25}{4} =$

$= \frac{50\sqrt{3} + 50 + 25}{4} = \frac{75 + 50\sqrt{3}}{4}$

Ответ: $\frac{75 + 50\sqrt{3}}{4}$

Задача 4

$\sin^3(\pi x) + \sin^3(2\pi x) - \sin^3(4\pi x) = (\sin(\pi x) +$

$+ \sin(2\pi x) - \sin(4\pi x))^3$

Заметим

1) $a = \sin^3(\pi x)$

$b = \sin^3(2\pi x)$

$c = \sin^3(4\pi x)$.

$(a + b - c)^3 = (a + b + c) \cdot (a^2 + b^2 + c^2 +$

$+ 2ab - 2ac - 2bc) = a^3 + ab^2 + ac^2 + 2a^2b -$

$- 2a^2c - 2abc + a^2b + b^3 + bc^2 + 2ab^2 -$

$- 2abc - 2b^2c - a^2c - b^2c - c^3 - 2abc +$

$+ 2ac^2 + 2bc^2 = a^3 + b^3 - c^3 + 3ab^2 +$

$+ 3ac^2 + 3a^2b - 3a^2c - 6abc + 3b^2c - 3bc^2$

Тогда $ab^2 + ac^2 + a^2b - a^2c - 2abc + bc^2 -$

$- b^2c = 0$

$-ab(c - b) + ac(c - b) - a^2(c - b) + bc(c - b) =$

$= 0$

чистовик

$(b-c)(ab-ac+a^2-bc)=0$ чистовик

$(b-c)(a-c)(a+b)=0$

Возвращаемся к исходным переменным

$$\left[\begin{array}{l} \sin(\pi x) = -\sin(2\pi x) \\ \sin(2\pi x) = \sin(4\pi x) \\ \sin(\pi x) = \sin(4\pi x) \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \pi x = -2\pi x + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ \pi x = \pi + 2\pi x + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ 2\pi x = 4\pi x + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ 2\pi x = \pi - 4\pi x + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ \pi x = 4\pi x + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ \pi x = \pi - 4\pi x + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x = \frac{2k}{3} \\ x = -1-2k \\ x = -k \\ x = \frac{1+2k}{6} \\ x = -\frac{2k}{3} \\ x = \frac{1+2k}{5} \end{array}\right.$$

Решений системы на $[0,3; 1,8]$ - нет, ни одного k, не удовл всем ур. системы

Задача 5

$f_1(x) = (x+a_1)(x^2+b_1x+6)$ $a_i > 0$

$b_i > 0$

$f_2(x) = (x+a_2)(x^2+b_2x+8)$

$f_3(x) = (x+a_3)(x^2+b_3x+12)$

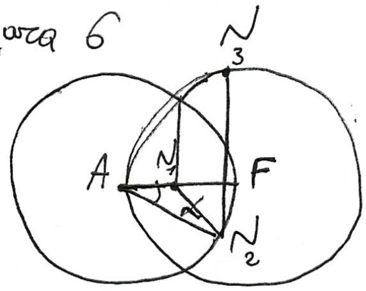
$f_1(x) = f_2(x) = f_3(x)$

1) Если $f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = 0$, то $a_1 = -x$

$a_2 = -x$ $a_3 = -x$

(продолжение на последней странице)

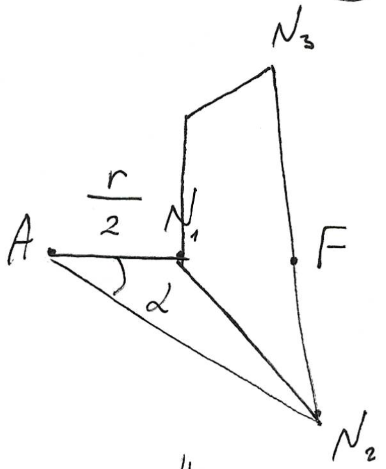
Задача 6



чистовик

$AN_1 = \frac{r}{2}$

Обозначим мокрость мышки за $f(\alpha)$.
Надо минимизировать $f(\alpha)$
Если $\alpha = 0^\circ$, то $f(\alpha) = r + 2 \cdot \frac{r}{2} = 2r$
Если $\alpha = 60^\circ$, то $f(\alpha) = 2r \sin 60^\circ = r\sqrt{3}$
$r\sqrt{3} < 2r$ => подходит вариант $\alpha \in [0; \frac{\pi}{3}]$
Путь мышки выглядит так



$N_1N_2 = \sqrt{r^2 + \frac{r}{4} - 2r \cdot \frac{r}{2} \cdot \cos\alpha} = \sqrt{\frac{5}{4}r^2 - r^2\cos\alpha}$

$N_2N_3 = r - \sqrt{r^2 + r^2 - 2r \cdot \frac{r}{2} \cdot \cos\alpha} = r - \sqrt{2r^2 - \cancel{k}r^2\cos\alpha}$

$\Downarrow$

$f(\alpha) = 2N_1N_2 + N_2N_3 = 2\sqrt{r^2 + \frac{r}{4} - 2r \cdot \frac{r}{2} \cdot \cos\alpha} +$
$+ \left(r - \sqrt{2r^2 - r^2\cos\alpha}\right)$

Минимизируем $f(\alpha)$: $\left(\frac{f(\alpha)}{\alpha}\right)' =$

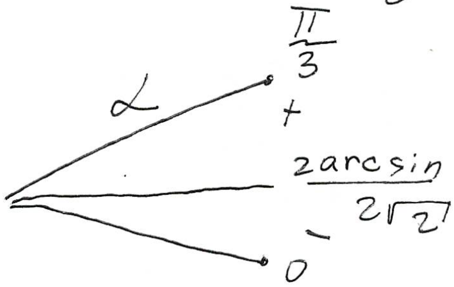
$$= -\frac{2\cos\alpha}{2}\cdot\frac{1}{\alpha} + \frac{4\sin\alpha}{2\sqrt{5-4\cos\alpha}} = \frac{-2\sqrt{5-4\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{2} + 4\sin\alpha}{2\sqrt{5-4\cos\alpha}}$$

$$-2\sqrt{5-4\left(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}\cdot\frac{\cos\alpha}{2} + \frac{8\sin\alpha}{2}\,\frac{\cos\alpha}{2} = 0 \;\Big|\cdot\frac{1}{2}$$

$$\frac{\cos\alpha}{2}\left(\frac{4\sin\alpha}{2} - \sqrt{2} + \frac{8\sin^2\alpha}{2}\right) = 0$$

$$\frac{4\sin\alpha}{2} = \frac{\sqrt{1+8\sin^2\alpha}}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{1+8\sin^2\alpha}}{2} > 0$$

$$\frac{\sin\alpha}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \left(\frac{-1}{2\sqrt{2}} \text{ - не подходит}\right)$$



$$\alpha = \frac{2\arcsin}{2\sqrt{2}}$$

$\Downarrow$

$$\min\frac{\sin\alpha}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$\Downarrow$

$\min\frac{f\alpha}{\alpha}$ = длина пути : n

чистовик

Продолжение задачи 5

2) $x=-a_2$, $x=-a_3$ корни $x^2+b_1x+6=0$

То есть $\begin{cases}-a_2-a_3=-b_1\\ a_2\cdot a_3=6\end{cases}$ - По теореме Виета

3) $x=-a_1$, $x=-a_3$ корни $x^2+b_2x+8=0$

То есть $\begin{cases}-a_1-a_3=-b_2\\ a_1\cdot a_3=8\end{cases}$ - По т. Виета

4) $x=-a_1$, $x=-a_2$ корни $x^2+b_3x+12=0$,

то есть $\begin{cases}-a_1-a_2=-b_3\\ a_1\cdot a_2=12\end{cases}$ - по т. Виета

Тогда $-a_2-a_3-a_1-a_3-a_1-a_2=-b_1-b_2-b_3$,

$2(a_1+a_2+a_3)=(b_1+b_2+b_3)$.

$\begin{cases}a_2a_3=6\\ a_1a_3=8\\ a_1a_2=12\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a_2=\frac{6}{a_3}\\ \frac{a_1}{a_3}=2\\ a_1a_3=8\end{cases}$ $\begin{cases}a_1=2a_3\\ (2a_3)^2=8\\ a_2=\frac{6}{a_3}\end{cases}$

$\begin{cases}a_3=2\\ a_1=4\\ a_2=3\end{cases}$ $a_1, a_3, a_2>0$

Тогда $b_1+b_2+b_3+a_1+a_2+a_3=3(a_1+a_2+a_3)=3\cdot 9=$
$=27$

Ответ: 27

чистовик

Повысить оценку на 5 баллов (старая оценка - 60б., новая оценка - 65б.)

Председателю апелляционной комиссии олимпиады школьников «Ломоносов». Ректору МГУ имени М. В. Ломоносова академику В. А. Садовничему от участника заключительного этапа по профилю «Математика» Полины Леонидовны Замской

апелляция.

Прошу пересмотреть мой индивидуальный предварительный результат заключительного этапа, а именно 60 баллов, поскольку считаю, что в 3 номере моё решение полностью верное, оно полностью соответствует второму способу из критериальных решений, поэтому прошу оценить моё решение на +. Заранее спасибо!

Подтверждаю, что я ознакомлена с Положением об апелляциях на результаты олимпиады школьников «Ломоносов» и осознаю, что мой индивидуальный предварительный результат может быть изменён, в том числе в сторону уменьшения количества баллов.

30 апреля 2025 года