

0 448679 180003
44-86-79-18
(160.3)



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников "Ломоносов"
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Иванова Виталия Павловича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«13» апреля 2025 года

Подпись участника

И

Числовик

Задача 1

Мет 1

55 (пятидесять пять)

$$\sqrt{\log_2^2 x + 3 \log_2 x - \sqrt{\log_2^2 x + 3 \log_2 x - 4}} \geq \log_2 x + 1$$

Пусть $\log_2 x = t$. Тогда:

$$\sqrt{t^2 + 3t - \sqrt{t^2 + 3t - 4}} \geq t + 1$$

Выражение $t^2 + 3t - 4$ под корнем $\Rightarrow t^2 + 3t - 4 \geq 0$

$$(t+4)(t-1) \geq 0$$

$$\begin{cases} t \leq -4 \\ t \geq 1 \end{cases}$$

При $-4 \leq t \leq 1$ $t+4 \geq 0$ и $t-1 < 0 \Rightarrow (t+4)(t-1) < 0$

$$t^2 + 3t - \sqrt{t^2 + 3t - 4} \geq 0 \quad \text{Пусть } t^2 + 3t = w$$

$$w - \sqrt{w-4} \geq 0$$

$$w-4 \geq 0 \Rightarrow w \geq 4$$

$$w^2 \geq w-4$$

$$w^2 - w + 4 \geq 0$$

 $(w-0,5)^2 + 3,75 \geq 0$ — верно при любых w .Если $t \leq -4$, то $t+1 \leq -3 < 0 \Rightarrow \sqrt{t^2 + 3t - \sqrt{t^2 + 3t - 4}} \geq t+1$ при любых $t \leq -4$.Рассмотрим случай с $t \geq 1$. $t+1 > 0$, $t-1 \geq 0$.

$$\sqrt{t^2 + 3t - \sqrt{t^2 + 3t - 4}} \geq t+1$$

$$t^2 + 3t - \sqrt{t^2 + 3t - 4} \geq t^2 + 2t + 1$$

$$\sqrt{t^2 + 3t - 4} \leq t-1$$

$$t^2 + 3t - 4 \leq t^2 - 2t + 1$$

$$5t \leq 5$$

$$t \leq 1$$

$$\begin{cases} t \leq 1 \\ t \geq 1 \end{cases} \Rightarrow t = 1$$

Итак: $\begin{cases} t \leq -4 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_2 x \leq -4 \\ \log_2 x = 1 \end{cases} \Rightarrow x \in (0; \frac{1}{16}] \cup \{2\}$. $f(x_0) \in \mathbb{Z}$ при $x_0 = \frac{1}{16}$ ии $x_0 = 2 \Rightarrow f(\frac{1}{16}) + f(2) = 1 + 32 = 33$ — ответ. Ответ: 33.

Имеется

Задача 3

Мет 2

$$\sqrt{\cos x} + 2\sqrt{-3\sin x} > 2\sqrt{\cos x} - \sqrt{-3\sin x}$$

$$\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ \sin x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in 10 \text{ четверти единичной окружности}$$

$$\sqrt{\cos x} - \sqrt{-3\sin x} \geq 0$$

$$\cos x \geq -3\sin x$$

$$3\sin x + \cos x \geq 0 \quad | : \cos x, \cos x \neq 0$$

$$3\tg x + 1 \geq 0$$

$$\tg x \geq -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}$$

$$\sqrt{\cos x} + 2\sqrt{-3\sin x} > 4(\sqrt{\cos x} - \sqrt{-3\sin x})$$

$$6\sqrt{-3\sin x} > 3\sqrt{\cos x}$$

$$-12\sin x > \cos x$$

$$12\sin x < -\cos x$$

$$12\tg x < -1$$

$$\tg x < -\frac{1}{12}$$

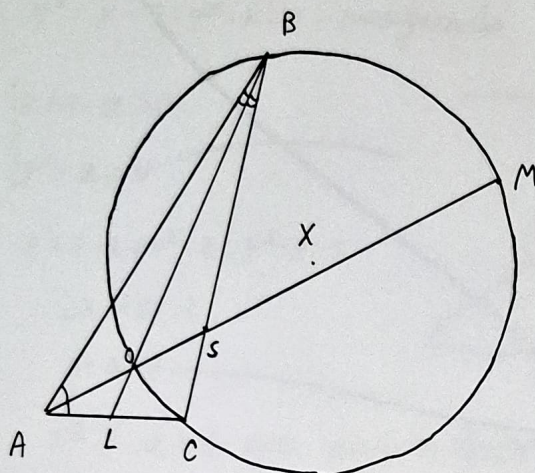
$$\text{Итак: } \begin{cases} \tg x \geq -\frac{1}{3} \\ \tg x < -\frac{1}{12} \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset$$

Чистовик

Лист 3

Задача 2

AS и BL - биссектрисы $\triangle ABC$. $O = AS \cap BL$. X - центр описанной окружности $\triangle OBC$ окружности. П.к. AS - биссектриса $\triangle ABC$, то $BS:SC = AB:AC = 3:1$.



$$BS = \frac{3}{4} BC = \frac{3}{4} \cdot 6 = 4,5$$

$$CS = \frac{1}{4} BC = \frac{1}{4} \cdot 6 = 1,5.$$

BC и OM - пересекающиеся хорды, $BC \cap OM = S$. По теореме $BS \cdot SC = OS \cdot SM$. BS и SC известны. Найдем OS .

По т. синусов в $\triangle ABC$ $\frac{AB}{\sin ACB} = \frac{BC}{\sin BAC}$.

По т. синусов в $\triangle ASC$ $\frac{AS}{\sin ACB} = \frac{BC}{\sin SAC}$.

$$\angle BAC = 60^\circ \Rightarrow \angle SAC = \frac{1}{2} \angle BAC = 30^\circ.$$

Значит, $AS = AB \cdot \frac{SC}{BC} \cdot \frac{\sin BAC}{\sin SAC} = AB \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin 60^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{4} AB$.

BO - биссектриса $\triangle ABS \Rightarrow AO:OS = AB:BS$. Выразим BC через AC .

По т. косинусов в $\triangle ABC$ $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos BAC = 10AC^2 - 2 \cdot 3AC^2 \cdot \cos 60^\circ = 7AC^2 \Rightarrow BC = \sqrt{7} \cdot AC = \frac{\sqrt{7}}{3} AB$. $= 4\sqrt{7}$

$AB:BS = AB:\frac{3}{4}BC = 1:\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{7}}{3}\right) = 1:\frac{\sqrt{7}}{4} \Rightarrow OS = AS \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}+4}$, т.к. $AO:OS = AB:BS = 4:\sqrt{7}$.

$OS = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}+4} \cdot AB = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}+4} \cdot \frac{3}{\sqrt{7}} BC = \frac{3\sqrt{3}}{4(\sqrt{7}+4)} \cdot BC = \frac{3\sqrt{3} \cdot (4-\sqrt{7})}{3 \cdot 6} \cdot BC = \frac{\sqrt{3} \cdot (4-\sqrt{7})}{2}$.

$SM = \frac{BS \cdot SC}{OS} = \frac{4,5 \cdot 1,5 \cdot 2}{\sqrt{3} \cdot (4-\sqrt{7})} = \frac{4,5\sqrt{3}}{4-\sqrt{7}} = \frac{4,5\sqrt{3}(4+\sqrt{7})}{9} = \frac{\sqrt{3} \cdot (4+\sqrt{7})}{2}$

$OM = OS + SM = \frac{\sqrt{3} \cdot (4-\sqrt{7})}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot (4+\sqrt{7})}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$.

Ответ: $4\sqrt{3}$.

Задача 4 Лист 4

Чистовик

$$|x+1-a| + |4^x-a| = 4^x - x - 1$$

Рассмотрим ^{четыре} случая:

$$1) \begin{cases} x+1-a \geq 0 \\ 4^x-a \leq 0 \end{cases}$$

$$-(4^x-a-x-1+a) = 4^x-x-1$$

$$-(4^x-x-1) = 4^x-x-1$$

$$4^x-x-1=0$$

$$4^x = x+1$$

$$\frac{d(4^x)}{dx} = 4^x \cdot \ln 4$$

$$\frac{d(x+1)}{dx} = 1$$

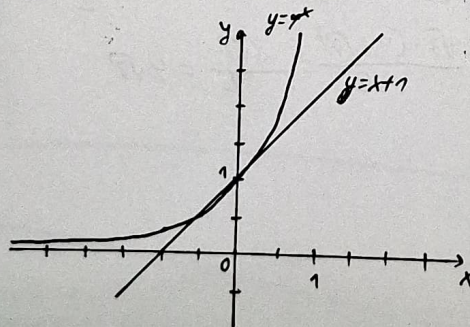
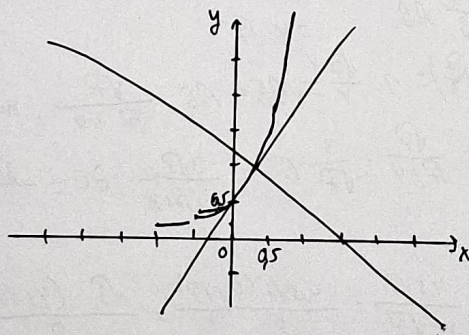
Это уравнение имеет решение при $x=0$, т.к. $4^0=1$, $0+1=1$.

При $x>0$ нет решений, т.к. при $x>0$ $\frac{d(4^x)}{dx} > \frac{d(x+1)}{dx} \Rightarrow 4^x > x+1$.

При $x=-0,5$ $4^{-0,5}=0,5$ и $-0,5+1=0,5$

При $x<-0,5$ нет решений, т.к. $\frac{d(4^x)}{dx} < \frac{d(x+1)}{dx} \Rightarrow 4^x < x+1$

Взгляните рис. графиков функций $y=4^x$ и $y=x+1$:



Корень $x=0$ возможен при $\begin{cases} 0+1-a \geq 0 \\ 4^0-a \leq 0 \end{cases} \Rightarrow a=1$ или a

Корень $x=-0,5$ возможен при $a=0,5$. $x=-0,5$ — нет производных a

Числовые множества

Задача 4

$$2) \begin{cases} x+1-a \leq 0 \\ 4^x-a \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x+1-a &\in [-a; 2-a], \text{ т.к. } x \in [-1; 1] \\ 4^x-a &\in [\frac{1}{4}-a; 4-a], \text{ т.к. } x \in [-1; 1] \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_{\max} \leq a-1 \\ x \geq \log_4 a \end{cases}$$

$$4^x - a - x - 1 + a = 4^x - x - 1$$

$4^x - x - 1 = 4^x - x - 1$ — тождество. Чтобы оно не выполнялось, должно

$$3) \begin{cases} x+1-a \geq 0 \\ 4^x-a \geq 0 \end{cases}$$

$$x+1-a+4^x-a=4^x-x-1$$

$$2x=2a-2$$

$$x=a-1$$

$$4^{a-1}-a \geq 0 \text{ при } a \in (-\infty; 0] \cup [0.5; +\infty) \text{ и } a \in (-\infty; 0.5) \cup [1; +\infty)$$

$$x+1-a=a-1+1-a=0 \geq 0$$

$$[0; 0.5] \cup [1; 2]$$

Если $x \in [-1; 1]$, то $a \in [0; 2]$. Значит, в данном случае $a \in [1; 2]$

~~т.к. $a \leq 0$ при $a \in (0; 1)$ будет не существовать решение из-за тождества в пункте 2, то не подходит.~~

~~При $a=1$ $x+1-a < 0$ при $x < 0$ и $4^x-a \geq 0$ при $x \geq 0$~~

~~При $a=2$ $x+1-a < 0$ при $x < 1$ и $4^x-a \geq 0$ при $x \geq 0.5$~~

~~Значит, подходят $a \in [1; 2]$, $a=1$, $a=2$, $a=0.5$, $a=1$, $a=2$ — это все решения были единственными. Тогда $x=0$. Если $a=0.5$, то $x=0.5$.~~

$$4) \begin{cases} x+1-a \leq 0 \\ 4^x-a < 0 \end{cases}$$

$$4^x + a - x - 1 \neq 4^x - x - 1$$

$$2 \cdot 4^x \geq a$$

$$4^{x+0.5} = a$$

$$x+0.5 = \log_4 a$$

$$x = \log_4 a - 0.5$$

$$a \in [0.5; 8], \text{ т.к. } x \in [-1; 1] \text{ и } a \in [0.25; 4], \text{ т.к. } x \in [-1; 1]$$

$$x+1-a = \log_4 a + 0.5 - a \leq 0 \text{ и } 4^x - a = -\frac{1}{2}a < 0$$

Подходит если $a=0.5$, то $x=-0.5$

$$a=4, \text{ то } x=0.5$$

Значит, $x \in [0.5; 1]$

~~$x+1-a < 0$ при $x < 0.5$ и $4^x-a \geq 0$ при $x \geq 0.5$ — не подходит.~~
 ~~$a=0.5$ и $a=1$, чтобы решение было ед.~~

$$4^x - a = a - a = 0 \Rightarrow \text{не } < 0 \text{ не подходит}$$

Чистовик

Лист 6

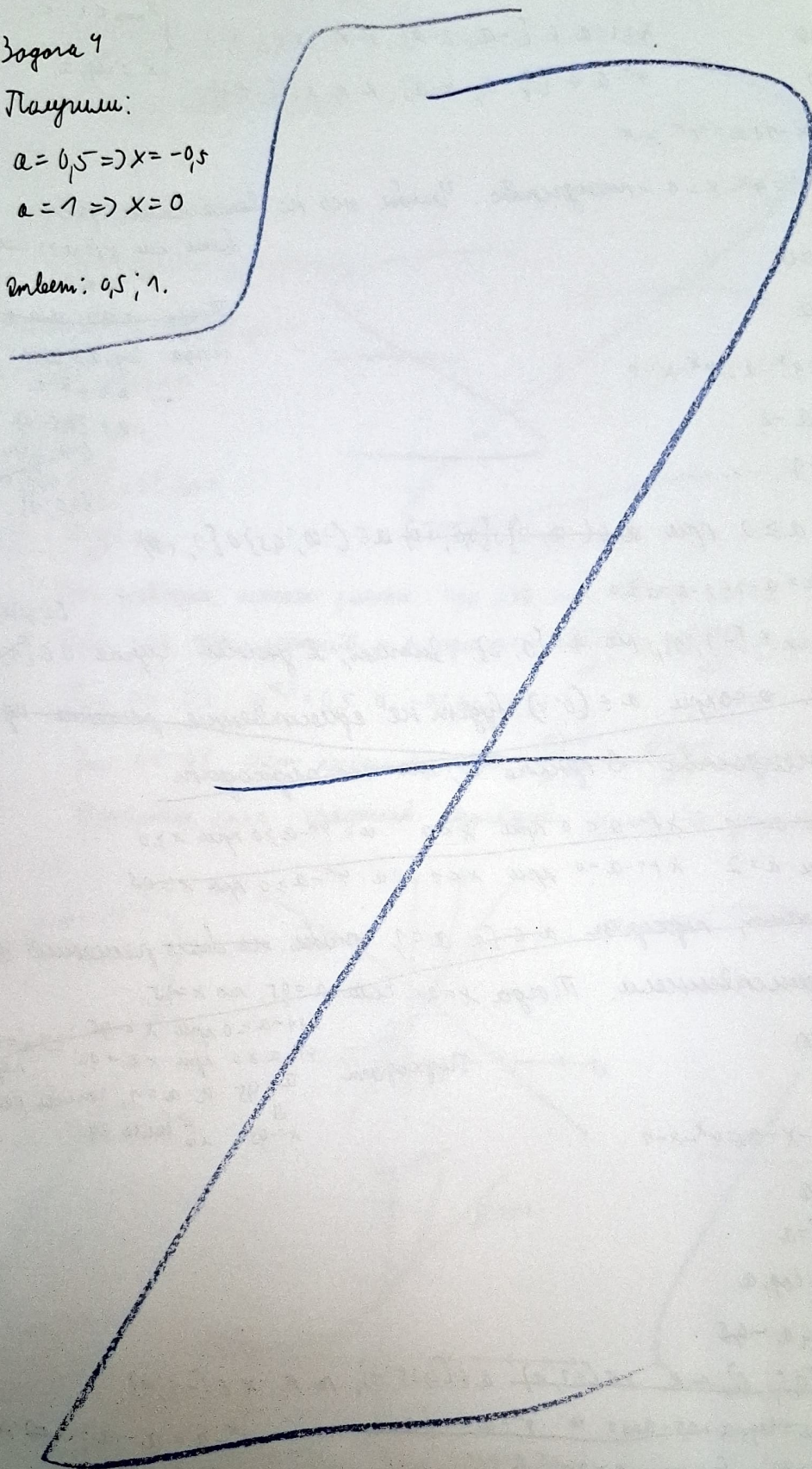
Задача 9

Получим:

$$a = 0,5 \Rightarrow x = -0,5$$

$$a = 1 \Rightarrow x = 0$$

Ответ: 0,5; 1.



Зимовых

Мет 7

Задача 6

Точка $M(0; 0)$ имеет координаты $(0; 0)$.

Пусть парабола задана уравнением $y = ax^2$. Рассмотрим произвольную точку M , из которой к параболе проведем 2 перпендикулярные друг другу касательные. Пусть абсциссы точек касания x_1 и x_2 . Тогда, т.к. $\frac{d(ax^2)}{dx} = 2ax$, то коэффициенты наклонов касательных $2ax_1$ и $2ax_2$. Уравнения касательных:

$$y_1 = ax_1^2 - 2ax_1 \cdot x_1 + 2ax_1 \cdot x = -ax_1^2 + 2ax_1x$$

$$y_2 = ax_2^2 - 2ax_2 \cdot x_2 + 2ax_2 \cdot x = -ax_2^2 + 2ax_2x$$

Найдём координаты точки M . Касательные перпендикулярны $\Rightarrow 2ax_1 \cdot 2ax_2 = -1$; $x_1x_2 = -\frac{1}{4a^2}$.

$$y_1 = y_2$$

$$-ax_1^2 + 2ax_1x = -ax_2^2 + 2ax_2x$$

$$a(x_2 - x_1)(x_1 + x_2) = 2ax(x_2 - x_1)$$

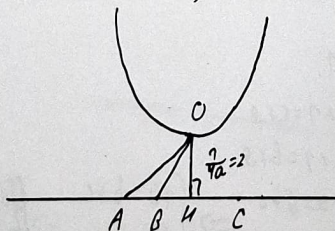
$$x_1 + x_2 = 2x$$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = -ax_1^2 + 2ax_1 \cdot \frac{x_1 + x_2}{2} = ax_1x_2 = a \cdot \left(-\frac{1}{4a^2}\right) = -\frac{1}{4a}.$$

Значит, точки A, B и C лежат на одной прямой $y = -\frac{1}{4a}$. Расстояние от $M(0; 0)$ до этой прямой AC равно $\frac{1}{4a} = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2 \cdot 4} = \frac{1}{8}$.

Если A, B и C расположены так, как на рис. 1, то $AB = AC - BC = 1$. $S_1 = \frac{AB \cdot OM}{2} = 1 \cdot \frac{2}{2} = 1$.



Иногда точки A и B по разные стороны от M . $C \Rightarrow AB = AC + BC = 1 \Rightarrow S_2 = \frac{AB \cdot OM}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$.

Ответ: 1 или 1.

Задача 7

Мет 8

Числовой

Как минимум, сумма цифр числа четна, если оно палиндром.

Для непалиндромового числа сумма его цифр и сумма цифр следующего числа четны. Значит, вариант, что последние цифры $c \neq 9$ не подходит, т.к. тогда сумма цифр числа отнимается на 1. Если оно вида $\overline{ab0}$, то следующее число — $\overline{a(b+1)0}$. Если аналогично, то число $\overline{abc}$ идет $\overline{ab(c+1)0}$. Сумма цифр уменьшается на 8. Если в конце числа две девятки, то число вида $\overline{a99}$ или $\overline{ab99}$ увеличивается в $\overline{a+100}$ и $\overline{a(b+1)00}$ соответственно. Сумма цифр увеличивается на 17. Из чисел, ограничивающихся на 999, и лежащих на отрезке $[400; 2400]$, есть только 1999, но оно не палиндром.

Рассмотрим число вида $\overline{ab9}$. Следующее за ним — $\overline{a(b+1)0}$. Тогда $a = b+1$, т.к. число $\overline{a(b+1)0}$ — палиндром. Тогда $a \neq b+9$ и $b \neq a+9$. Значит, $a+b=9$. Поэтому $a=5$, $b=4$. Первое непалиндромовое число — 549.

Рассмотрим число вида $\overline{abc9}$. $a=1$ или $a=2$. Следующее за ним — $\overline{ab(c+1)0}$.

$$\begin{cases} a+b=c+9 \\ a+c=b+9 \\ a+9=b+c \\ a+b=c+1 \\ a+c+1=b \\ b+c+1=a \end{cases}$$

$a=1$:

$$\begin{cases} b+1=c+9 \\ c+1=b+9 \\ 10=b+c \\ b+1=c+1 \\ c+2=b \\ b+c+1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10=b+c \\ b=c+2 \\ b=c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=5 \\ c=5 \\ b=6 \\ c=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 1559 \\ \text{и} \\ 1649 \end{matrix}$$

$a=2$:

$$\begin{cases} b+2=c+9 \\ c+2=b+9 \\ 11=b+c \\ b+2=c+1 \\ c+3=b \\ b+c+1=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11=b+c \\ c=b+1 \\ b=c+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=5 \\ c=6 \\ b=7 \\ c=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2569 \\ \text{и} \\ 2749 \end{matrix}$$

Подходят только из $[400; 2400]$ числа 549, 1559 и 1649. Их 3.

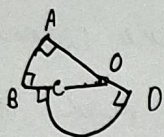
Ответ: 3.

Числовой

лист 9

Задача 8

Вид локсоидный; если она не самопересекающаяся,



Сумма угловых мер дуг AB и CD равна 180° . Для дуги AB она равна углу между ^{касательными} прямыми BC и AD.

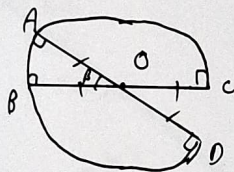
O - центр окружности, к которой прикасаются дуги, из-за перпендикулярности. Тогда $OA = OB$, $OC = OD$, $AD = AO + OD$, $BC = BO - CO = AO - OD$. $BC = AD \Rightarrow AO - OD = AO + OD \Rightarrow OD = 0 \Rightarrow O \equiv D$

$O = AD \cap BC$. Тогда $AB = CD$. А противоречие условиям

Значит, линия самопересекающаяся.

$\angle AB = \beta$. Длина дуги AB равна AO . $\frac{\beta}{2\pi} \cdot 2\pi \cdot AO = 2AO \Rightarrow \beta = 2$.

$\angle CD = 2\pi - \angle AB = 2\pi - 2$.



Ответ: 2 и $2\pi - 2$.

Черныш

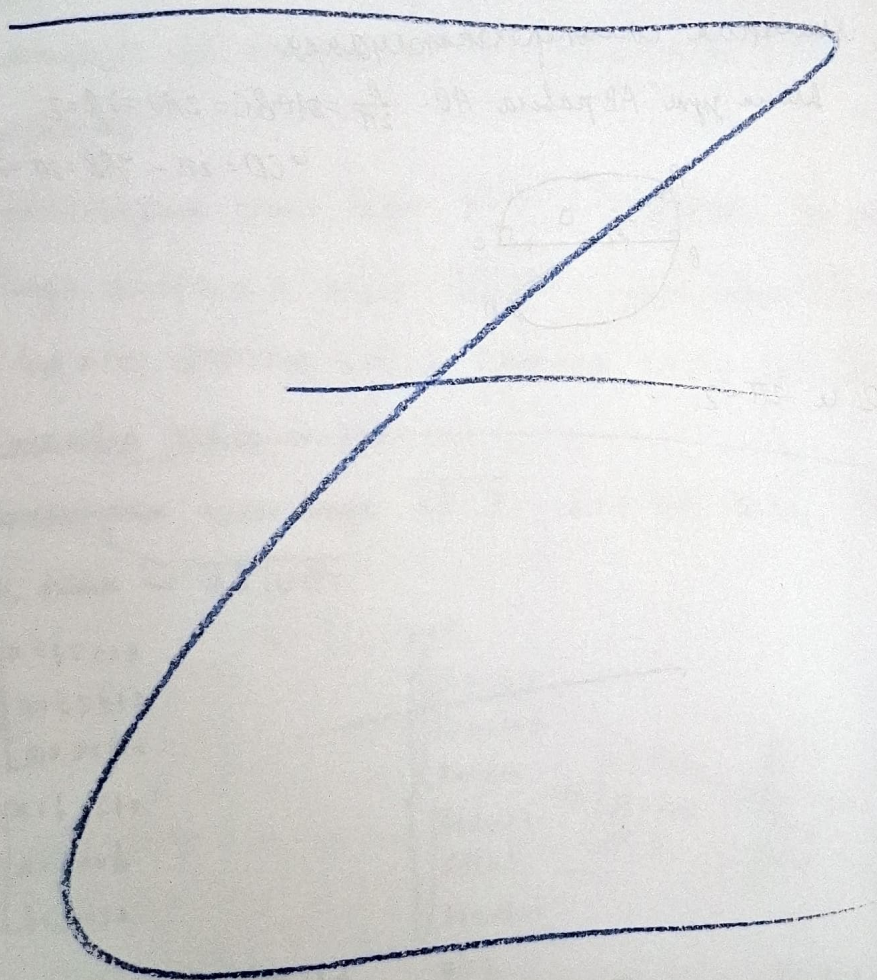
Мет 10.

Задача 5

Всего 4^6 вариантов перехода. Найдем сколько из них переходят. Если условие выполняется, то можно составить последовательность номеров так, чтобы, если номер b имеет номер a , то уже переход с графа с номером a на граф с номером b . Таким образом, количество из них от 1 до 6 — $6! = 720$.

$$\text{Вероятность } P = \frac{6!}{4^6} = \frac{720}{4^6} = \frac{180}{4^5} = \frac{45}{4^4} = \frac{45}{2^8} = \frac{45}{256}.$$

Ответ: $\frac{45}{256}$.



Черновик

$$\cos 2x = t$$

$$\sqrt{\sqrt{\cos x} + 2\sqrt{-3\sin x}} > 2\sqrt{\sqrt{\cos x} - \sqrt{-3\sin x}}$$

$$\sqrt{t^2 + 3t - \sqrt{t^2 + 3t - 4}} \geq t + 1$$

$$\begin{aligned} \sin x &\leq 0 \\ \cos x &\geq 0 \end{aligned} \quad - \text{IV четверть}$$

$$\sqrt{t(t+3) - \sqrt{(t+4)(t-1)}} \geq t+1 \quad \sqrt{\cos x} + 2\sqrt{-3\sin x} > 2\sqrt{\sqrt{\cos x} - \sqrt{-3\sin x}} \quad \cos x \geq -3\sin x$$

$$\begin{cases} t \leq -4 \\ t \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &> 4\sqrt{\cos x} - 4\sqrt{-3\sin x} \quad 3\sin x + \cos x \geq 0 \\ &3\sqrt{\cos x} < 6\sqrt{-3\sin x} \quad 3\sin x + \cos x \geq 0 \\ &\cos x < -12\sin x \quad \tan x \geq -\frac{1}{12} \end{aligned}$$

$$t^2(t+3) \geq (t+4)(t-1) \quad t(t+3) \geq 0 \Rightarrow t \geq 0 \text{ или } t \leq -3$$

$$t^2 + 3t = z$$

$$\begin{aligned} t &\geq 1 \\ t &\leq -4 \text{ — все } x \leq \frac{\pi}{16} \end{aligned}$$

$$z^2 = z - 4 \Rightarrow z^2 - z + 4 = 0 \text{ — нет решений}$$

$$t^2 + 3t - \sqrt{t^2 + 3t - 4} \geq t^2 + 2t + 1$$

$$3^2 + 1^2 - 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 10 - 3 = 7$$

$$\sqrt{t^2 + 3t - 4} \leq t - 1$$

$$t^2 + 3t - 4 \leq t^2 - 2t + 1$$

$$5t \leq 5$$

$$t \leq 1$$

$$t = 1 \Rightarrow x = 2$$

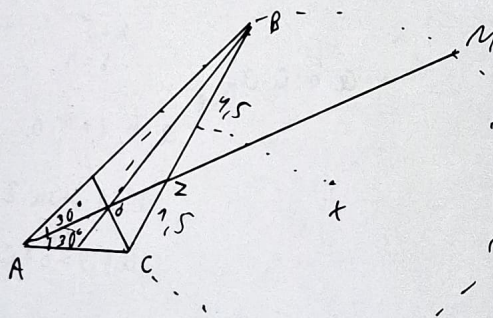
$$x + 1 - a = 0$$

$$y^x - a = 0$$

$$x = a - 1$$

$$y^x = a$$

y^6 логарифмов



$$\begin{aligned} 0.2 - 2C &= 0.2 - 2M \\ 0.2 &= ? \end{aligned}$$

$$y^x - 2a + x + 1 = y^x - x - 1$$

$$2x = 2a - 2 \Rightarrow x = a - 1$$

$$|x + 1 - a| + |y^x - a| = y^x - x - 1$$

$$\text{Еще } y^x - a \geq 0 \text{ и } x + 1 - a \leq 0, \text{ то } y^x - a - x - 1 + a = y^x - x - 1$$

несогласно

Черныш

$$2x_1, 2x_2 = -1 \Rightarrow x_1 x_2 = -\frac{1}{4} \quad 2ax_1 + 2ax_2 = -1 \Rightarrow x_1 x_2 = -\frac{1}{4a^2}$$

$$y = ax^2$$

$$x_1, ax_1^2, 2ax_1$$

$$y = \cancel{3ax_1^2} - \cancel{2ax_1} \cdot ax_1^2 - 2ax_1^2 + 2ax_1 x = -ax_1^2 + 2ax_1 x$$

$$x_2, ax_2^2, 2ax_2$$

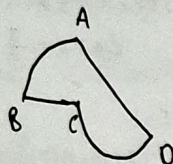
$$y = -ax_2^2 + 2ax_2 x$$

$$a(x_2 - x_1)(x_1 + x_2) = 2a(x_2 - x_1)x$$

$$x_1 + x_2 = 2x \Rightarrow x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = -ax_1^2 + 2a \cdot \frac{x_1 + x_2}{2} \cdot x_1 =$$

$$= ax_1 x_2 = -\frac{1}{4a}$$



$$19 \rightarrow 20$$

$$ab9 \rightarrow a, b+1, 0$$

$$a = b+1$$

$$a > b$$

$$a \neq b+0$$

$$9 = a+b$$

$$a = 5$$

$$b = 4$$

$$abc9 \rightarrow$$

$$a, b, c+1, 0$$

$$a = 1 \text{ или } 2$$

$$a+9 = b+c$$

$$1980, 1$$

$$a+c+1 = b$$

$$a+b+c = 9 \Rightarrow a+c = 4$$

или

$$b = 5$$

$$a+b = c+9$$

$$a = 1, \text{ то } b = c+8$$

$$b = c+2$$

$$a = 2, \text{ то } b = c+3$$

$$b = c+4$$

