



14-74-36-66
(159.1)



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 9

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Козанцева Глеба Владимировича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
« 13 » 04 2025 года

Подпись участника
Коз

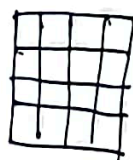
$$2a + 2b - ab = 0$$

$$a = \frac{2b}{b-2}$$

$$b=3 \quad a=6$$

$$b=4 \quad q=4$$

$$b=6 \quad a=3$$



$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$D = 1 + 8 = 9$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = -1$$

если $x \in [-1; 2]$

$$x^3 + x^2 - x - 2 = 12x - 13$$

$$x^3 + x^2 - 13x + 11 = 0$$

$$x = 1$$

$$\begin{array}{r|l} x^3+x^2-13x+11 & x-1 \\ -x^3-x^2 & \\ \hline & x^2+2x-11 \end{array}$$

$$2x^2 - 13x$$

$$-2x^2 - 2x$$

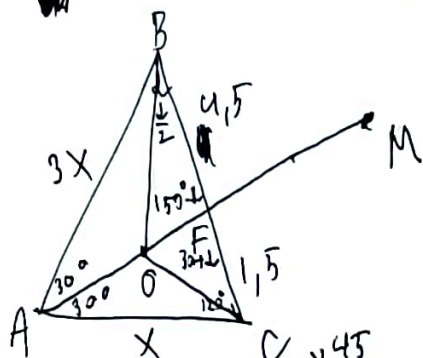
$$\underline{-11x + 11}$$

$$\frac{-11x + 11}{x}$$

$$D = 4 + 44 = 48$$

$$x_1 = \frac{-2 + 4\sqrt{3}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-2 - 4\sqrt{3}}{2} = -1 - 2\sqrt{3} - \text{нормар.}$$



$\angle COF =$
 $= 180^\circ - 30^\circ - \cancel{120^\circ} - \frac{120^\circ}{2}$
 $= 90^\circ - \frac{d}{2}$

more

$$x^3 - x^2 + x + 2 - 12x + 13 = 0$$

$$x^3 - x^2 - 11x + 15 = 0$$

$$x_1 = 3$$

$$x^3 - x^2 - 11x + 15$$

$$x^3 - 3x^2$$

$$2x^2 - 11x$$

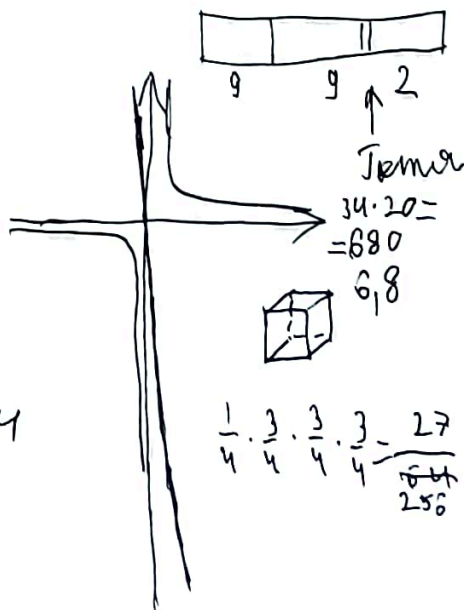
$$\sim 2x^2 - 6x$$

$$-5x + 15$$

$$\frac{-5x + 15}{x}$$

$$D = 4 + 20 = 24$$

$x_1 =$



$$\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{27}{256}$$

Числовик.

$$2. \quad x^3 - 1x^2 - x - 2 = 12x - 13$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = -1$$



если $x \in [-1; 2]$

$$x^3 + x^2 - x - 2 - 12x + 13 = 0$$

$$x^3 + x^2 - 13x + 11 = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 + x^2 - 13x + 11 & x - 1 \\ \underline{-x^2 - x^2} & x^2 + 2x - 11 \end{array}$$

$$2x^2 - 13x$$

$$D = 48$$

$$\underline{-2x^2 - 2x}$$

$$-11x + 11$$

$$\underline{-11x + 11}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= -1 + 2\sqrt{3} > -1 + \sqrt{9} = 2 - \text{нест.} \\ x_2 &= -1 - 2\sqrt{3} < -1 - \sqrt{9} = -2 - \text{нест.} \end{aligned}$$

если $x \in (-\infty; -1] \cup [2; \infty)$.

$$x^3 - x^2 + x + 2 - 12x + 13 = 0$$

$$x^3 - x^2 - 11x + 15 = 0$$

$$x_1 = 3$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 - 11x + 15 & x - 3 \\ \underline{-x^3 - 3x^2} & x^2 + 2x - 5 \end{array}$$

$$2x^2 - 11x$$

$$D = 24$$

$$\underline{-2x^2 - 6x}$$

$$-5x + 15$$

$$\underline{-5x + 15}$$

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{24}}{2} = -1 + \sqrt{6} > -1 + \sqrt{9} = 2 - \text{нест.}$$

$$x_2 = \frac{-2 - \sqrt{24}}{2} = -1 - \sqrt{6} < -1$$

Ответ: $-1 - \sqrt{6}; 1; 3$.

3. $x, y_1 = 2(x_1 + y_1)$ x_1 и y_1 — стороны возможного призм.

$$x - 2x_1 = 2y_1$$

$$x_1(y_1 - 2) = 2y_1$$

$$x_1 = \frac{2y_1}{y_1 - 2}$$

Чистовик.

$$x_1 = \frac{2y_1}{y_1 - 2}$$

при $y_1 \leq 2$ $x_1 < 0$ или не определён

$$y_1 = 1 \Rightarrow x_1, y_1 = 3 \Rightarrow x_1 = 6$$

$$y_1 = 4 \Rightarrow x_1 = 4$$

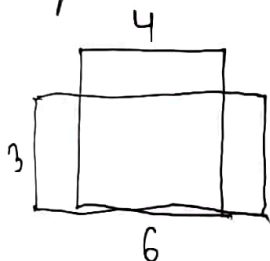
$$y_1 = 5 \Rightarrow x_1 - \text{не целый}$$

$$y_1 = 6 \Rightarrow x_1 = 3$$

$2y_1$ как минимум в два раза больше $y_1 - 2$, значит,

$$x_1 \geq 2 \text{ при } x_1 = 2 \Rightarrow 2y_1 - 4 = 2y_1 - \text{нет корткой}$$

раз прямоугольники равные, то это прям. со сторонами 4 и 4, прям. со ст. 3 и 6.



макс. ширина прям., который покрывает стол два раза = 3, т.к. ширина ~~максимальная~~ прям. со ст. 3 и 6 = 3.

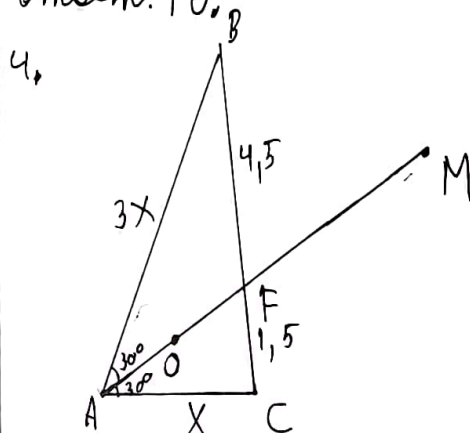
макс. длина = 4, т.к. длина прям. со ст. 4 и 4 равна 4

Площадь макс. 5 этой прям. = $3 \cdot 4 = 12$

Общая площадь всех: $3 \cdot 6 + 4 \cdot 4 = 34$

С одним слоем: $34 - 12 = 22$, $34 - 12 \cdot 2 = 10$ (два раза вычитаем участок с двумя слоями).

Ответ: 10.



Дано: $\frac{AB}{AC} = 3$, $\angle BAC = 60^\circ$, $BC = 6$, O - перес.

Исск., $OBMC$ - описан.

Найти: OM .

Реш:

$$\text{АО-Исск.} \Rightarrow \frac{AB}{BF} = \frac{AC}{CF}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BF}{CF} = 3 \Rightarrow BF = 3CF$$

$$BF + CF = 6 = 4CF \Rightarrow CF = 1.5 \Rightarrow BF = 4.5$$

$$OF \cdot FM = 4.5 \cdot 1.5 = 6.75 \text{ (по св-ву опис. окр.)}$$

Исходные

$\angle BOC = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$, т.к. $\angle OBC$ и $\angle OCB$ в равнобедренном $\triangle OBC$ и $\angle ABC$ и $\angle ACB$ соответственно, их сумма $\frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$

5. $y_1 = \frac{1}{x_1}$ и $y_2 = -18x_2 + a$

Во-первых в точках перес. $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$, то есть $\frac{1}{x_1} = -18x_2 + a \Rightarrow \frac{1}{x} = -18x + a$, во-вторых, т.к. отрезки равны, то их проекции на x тоже равны. Для ветви в I ч. пусть перс. точка перес. с штер. x_1 , а вторая x_2 , тогда

$x_1 = x_2 - x_1 \Rightarrow 2x_1 = x_2$ ① Для ветви в III ч.

$x_1 - x_2 = x_2 - 0 \Rightarrow x_1 = 2x_2$ ②

$\frac{1}{x} = -18x + a \quad | x \neq 0$

$18x^2 - ax + 1 = 0$

$D = a^2 - 72$

$x_3 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 72}}{2} \quad x_4 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 72}}{2}$

① $2x_1 = x_2$

$a - \sqrt{a^2 - 72} = \frac{a + \sqrt{a^2 - 72}}{2}$

$\frac{a}{2} = \frac{3\sqrt{a^2 - 72}}{2} \quad (a \geq 0)$

$a^2 = 9a^2 - 648$

$0 = a^2 - 81$

$a = -9$ и $a = 9$

пост.

Ответ: $-9; 9$.

② $x_1 = 2x_2$

$a + \sqrt{a^2 - 72} = \frac{a - \sqrt{a^2 - 72}}{2}$

$a = -3\sqrt{a^2 - 72} \quad (a \leq 0)$

$a^2 = 81$

$a = -9$ и $a = 9$ - пост.

7. Если каждую задачу решит менее 10 человек то всего решений не более чем $9 \cdot 100 = 900$ задач (т.к. 9 учащихся по 1 задаче)

$\frac{900}{20} = 45$ в среднем на одного ученика, однако каждый не мог решить 45 задач, а к Петя решил больше задач. Тогда ~~максимум~~

т.е. $n = 44$, при котором ~~ука~~ не найдётся задачи, котор. решено ≥ 10 уч. А при $n = 45$ уже будет, т.к. будет минимум $19 \cdot 45 + 46 = 901$ решённых задач. Пример для $n \leq 44$, что не найдётся задачи: пусть перв. уч. решил с 1 по k задач, где k — кол-во его решённых задач, второй — с $k+1$ до $k+x$ ~~т.к.~~, где x — кол-во его решённых задач и т.д. при этом после 100 задач идёт снова первая по циклу, т.к. задач < 900 , то любая будет решена ≤ 9 раз.

Ответ: 45.

6. всего вариантов: 46, если считать, что нули разные для удобства.
подходящих вариантов:

