

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Карпука Дачара Максимовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«13» сентября 2025 года

Подпись участника

keef

[illegible]

Черновик: 80 (только для)

Хоф Арин Н.А.
Ткач Савва М.В.

$$\sqrt{4x^2 - 12x + 9}$$

$$22 \quad 7024 \cdot 4^{-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$2^{\frac{1}{2}} \in (1, +\infty)$$

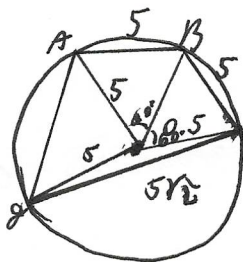
$$\frac{7024 \cdot 2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} \geq a + 5,72x$$

$$2^{\frac{1}{2}} = 6; \quad \frac{7024}{6^2} \geq a + 5,72x^2$$

$$\frac{7024}{2^{\frac{1}{2}}} - a \geq 5,72x$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot 70$$

$$\frac{7024}{2^{\frac{1}{2}}} - a \geq 1; \quad \frac{7024}{2^{\frac{1}{2}}} > 0$$



$$\begin{aligned} 1) & \quad \frac{5}{5} \quad \frac{5}{5} \quad \frac{5\sqrt{2}}{5} \quad \frac{2}{5} \\ 2) & \quad \frac{5}{5} \quad \frac{5}{5} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{5\sqrt{2}}{5} \\ 3) & \quad \frac{5}{5} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{5}{5} \quad \frac{5\sqrt{2}}{5} \end{aligned}$$

$$720' + 90' = 270'$$

$$2 \cdot \frac{(5\sqrt{3})^2}{4} + \frac{5^2}{2} + \frac{5 \cdot 5\sqrt{2}}{5}$$

$$(a+b)(a-c)(b-c) = 0$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot 5^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 5^2}{4} + \frac{5^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{75 + 250\sqrt{3}}{4}$$

$$\begin{aligned} a(a-c) + b(a-c) \\ (b-c)(a^2 + ab - bc - ac) \\ - bc(b-c) \\ - ac(b-c) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 4^{5-\frac{1}{x}} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 4^{5-\frac{1}{x}} = 4^5 = 7024$$

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 - c^3 &= (a+b-c)^3 + a^2(b-c) + ab(b-c) + \\ &+ ac^2 - b^2c + bc^2 - abc \\ &= (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ac)(a+b-c) - \\ &- a^3 + ab^2 + ac^2 + 2a^2b - 2abc - 2a^2c + \\ &+ ab^2 + b^3 + bc^2 + 2ab^2 - 2b^2c - 2abc - a^2c - b^2c - c^3 - \\ &- 2abc + 2bc^2 + 2ac^2 = a^3 + b^3 - c^3 + 3ab^2 + 3ac^2 + 3a^2b - 3a^2c - \\ &- 3b^2c + 3bc^2 - 6abc \\ &= ab^2 + ac^2 + a^2b - a^2c - b^2c + bc^2 - 2abc = 0 \\ &= ac(c-a) \end{aligned}$$

Чистовик; лист 1:

$$\sqrt{4x^2-12x+9} + \sqrt{x^2-6x+9} + (\sqrt{-(x-2)})^2 = \sqrt{3+18} - \sqrt{3-18}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{(2x-3)^2} + \sqrt{(x-3)^2} + (\sqrt{-(x-2)})^2 &= \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \\ &= \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = \\ &= \sqrt{2}+1 - \sqrt{2}+1 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} |2x-3| + |x-3| - x + 2 = 2 \\ -(x-2) \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |2x-3| + |x-3| - x + 2 = 2 \\ x \leq 2 \end{cases} \text{ — Рассмотрим данное ур-ие:}$$

$$|2x-3| \geq 2x-3 \text{ — рав-во вып-но, когда } 2x-3 \geq 0$$

$$|x-3| \geq 3-x \text{ — рав-во вып-но, когда } 3-x \geq 0 \quad \left| \text{значит,} \right.$$

$$2 = |2x-3| + |x-3| - x + 2 \Rightarrow 2x-3 + 3-x - x + 2 = 2 \text{ — следовательно,}$$

$$\text{рав-во должно вып-но тогда и только тогда, когда}$$

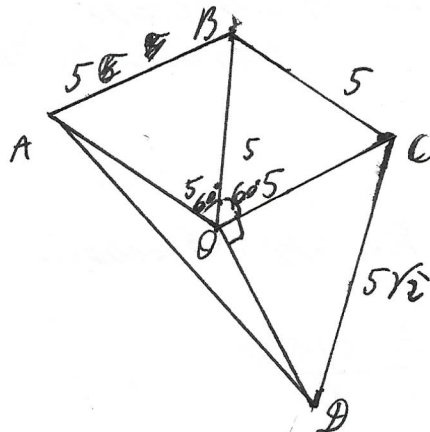
$$\begin{cases} 2x-3 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \end{cases} \text{ — перейдем к системе}$$

$$\begin{cases} 2x-3 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \\ x \leq 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 1,5 \\ x \leq 3 \\ x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow x \in [1,5; 2]$$

$$\text{ответ: } [1,5; 2]$$

Чистовик; лист 2;

22 Решение: 1 случай: $AB=BC=5$; $CD=5\sqrt{2}$



Найдем $S(ABCO)$:

1) Пусть O - центр окружности
 $AO=OB=AB=5 \rightarrow \triangle AOB$ -
 равносторонний $\triangle$
 $\angle AOB=60^\circ$

Аналогично для $\triangle BOC$:
 $\angle BOC=60^\circ$

2) $CO^2 = 2.5^2 = 5^2 + 5^2 - DO^2 + CO^2 \rightarrow$ покр. т. биссектрисы:
 $\angle COD=90^\circ$

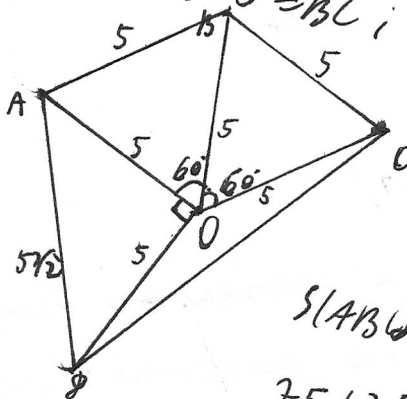
Вывод $\angle AOD = 360^\circ - 60^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 150^\circ$

$$S(ABCO) = S(\triangle AOB) + S(\triangle BOC) + S(\triangle COD) + S(\triangle AOD) =$$

$$= \frac{2 \cdot 5^2 \sqrt{3}}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5^2 \cdot \sin 60^\circ + \frac{40^2}{2} \cdot \sin 150^\circ + \frac{40^2}{2} =$$

$$= \frac{5^2 \sqrt{3}}{2} + \frac{5^2}{4} + \frac{5^2}{2} = \frac{75 + 25\sqrt{3}}{4}$$

2 случай: $AB=5=BC$; $AD=5\sqrt{2}$:



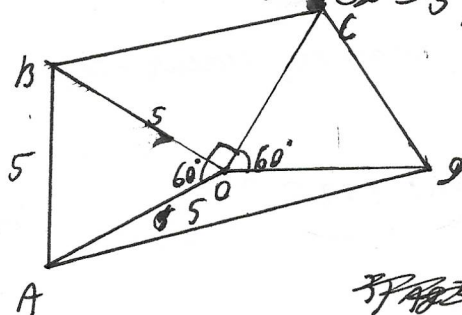
- аналогично 1 случаю;

$\angle AOB = \angle BOC = 60^\circ$; $\angle AOD = 90^\circ$
 $\angle COD = 150^\circ$

$$S(ABCO) = \frac{2 \cdot 5^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{5^2}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5^2}{2} =$$

$$= \frac{75 + 25\sqrt{3}}{4}$$

3 случай: $AB=CD=5$; $AD=BC=5\sqrt{2}$:



1) $AO=OB=AB=5 \rightarrow \triangle AOB$ - $\triangle$ -ый;
 $\angle AOB=60^\circ$

2) $CO=DO=CD=5 \rightarrow \triangle COD$ - $\triangle$ -ый
 $\angle COD=60^\circ$

$$S(ABCO) = \frac{2 \cdot 5^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{75 + 25\sqrt{3}}{4}$$

Задача; лист 3;

$$3) BC^2 = 2 \cdot 5^2 = 5^2 + 5^2 = BO^2 + OC^2 \Rightarrow \angle BOC = 90^\circ$$

(по отн. м. гип-гу)

$$\angle AOB = 360^\circ - 2 \cdot 60^\circ - 90^\circ = 150^\circ$$

$$\begin{aligned} S(ABCD) &= S(\triangle AOB) + S(\triangle BOC) + S(\triangle COD) + S(\triangle DOA) = \\ &= 2 \cdot \frac{2 \cdot 5^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{5^2}{4} + \frac{5^2}{2} = \frac{75 + 25\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

Из всех из всех изучавших наибольшая площадь четырехугольника равна $\frac{75 + 25\sqrt{3}}{4}$

Ответ: $\frac{75 + 25\sqrt{3}}{4}$

22 Решим рассматриваем функцию $f(x) = 4^{5 - \frac{1}{x}}$;

- т.к. $-\frac{1}{x}$ возрастает на $\mathbb{R}^+$, то $f(x) = 4^{5 - \frac{1}{x}}$ возрастает на $\mathbb{R}^+$ (как композиция возраст-ущих ф-ций)

$f(x)$ - непрерывна на $\mathbb{R}^+$; также $\lim_{x \rightarrow +0} 4^{5 - \frac{1}{x}} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 4^{5 - \frac{1}{x}} = 4^5 = 1024$$

$$(-\frac{1}{x} < 0, \text{ значит } 4^{5 - \frac{1}{x}} < 4^5 = 1024)$$

В свою очередь г-я $g(x) = \sin(2^x)$ непрерывна + a - непрерывная функция на $\mathbb{R}^+$; её мн-во значений: $[a-1; a+1]$

значит, чтобы $f(x) \geq g(x)$ - не выполнялось при $\forall x > 0$, достаточно взять $a-1 \geq 1024$

$$a \geq 1025, \text{ значит, наим-ее}$$

$$\text{число } a : 1025$$

Ответ: 1025

Используя лист 4:

24 $\sin^3(\pi x) + \sin^3(2\pi x) - \sin^3(4\pi x) = (\sin(\pi x) + \sin(2\pi x) - \sin(4\pi x))^3 =$

Пусть $\sin(\pi x) = a$; $\sin(2\pi x) = b$; $\sin(4\pi x) = c$

$$a^3 + b^3 - c^3 = (a + b - c)^3 = a^3 + b^3 - c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3ac^2 = 3a^2c + 3b^2c - 3b^2a - 6abc$$

$$\underline{a^2b} + \underline{ab^2} + \underline{ac^2} - \underline{a^2c} - \underline{bc^2} - \underline{b^2a} - \underline{2abc} = 0$$

$$\underline{ab(a-c)} + \underline{b^2(a-c)} - \underline{bc(a-c)} - \underline{ac(a-b)} = 0$$

$$(a-c)(b^2 - bc + ab - ac) = (a-c)(b-c)(a+b) = 0$$

~~$(a-c)(b-c)(a+b) = (\sin(\pi x) - \sin(4\pi x))(\sin(2\pi x) - \sin(4\pi x))(\sin(\pi x) + \sin(2\pi x)) = 0$~~

$\sin(\pi x) = \sin(4\pi x)$
 $\sin(2\pi x) = \sin(4\pi x)$
 $\sin \pi x = -\sin(2\pi x) = \sin(-2\pi x)$

$70x = 4\pi x + 2\pi \cdot n_1$
 $8x = \pi - 4\pi x + 2\pi \cdot n_2$
 $2\pi x = 4\pi x + 2\pi \cdot t_1$
 $2\pi x = \pi - 4\pi x + 2\pi \cdot t_2$
 $8x = -2\pi x + 2\pi \cdot k_1$
 $9x = \pi + 2\pi x + 2\pi \cdot q_1$

$x = \frac{2\pi \cdot n_1}{3} \quad (n_1 \in \mathbb{Z}) \quad (1)$
 $x = \frac{7+2m}{5} \quad (m \in \mathbb{Z}) \quad (2)$
 $x = t \quad (t \in \mathbb{Z}) \quad (3)$
 $x = \frac{7+2l}{6} \quad (l \in \mathbb{Z}) \quad (4)$
 $x = \frac{2\pi \cdot k}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (5)$
 $x = 7+2q \quad (q \in \mathbb{Z}) \quad (6)$

(1): $0,3 \leq x = \frac{2n}{3} \leq 7,8$
 $0,9 \leq 2n \leq 5,4$
 $0,45 \leq n \leq 2,7 \Rightarrow n = 1, 2$
 $\Rightarrow x = \frac{2}{3}; \frac{4}{3}$

(2): $0,3 \leq \frac{7+2m}{5} \leq 7,8$
 $0,5 \leq 2m \leq 8; \quad 0,25 \leq m \leq 4 \Rightarrow m = 1, 2, 3, 4$

$1,5 \leq 7+2m \leq 9; \quad 9,5 \leq 2m \leq 8;$
 $x = \frac{3}{5}, 1, \frac{7}{5}, \frac{9}{5}$

(3) $0,3 \leq t \leq 7,8 \Rightarrow t = 7; \quad x = 7$

(4) $0,3 \leq \frac{7+2l}{6} \leq 7,8; \quad 7,8 \leq 7+2l \leq 79,8; \quad 0,8 \leq 2l \leq 9,8$

Итак ; лист 5:

$$0,45 \leq \ell \leq 4,9 \rightarrow \ell = 1, 2, 3, 4; \kappa = \frac{1}{2}; \frac{5}{6}; \frac{7}{6}; \frac{3}{2}$$

$$(5): 0,3 \leq \frac{2\kappa}{3} \leq 1,8 \rightarrow \kappa = 1, 2; \kappa = \frac{2}{3}; \frac{4}{3}$$

$$(6): 0,3 \leq 1+2\eta \leq 1,8 \rightarrow \eta = 0; \kappa = 1$$

В итоге мы получаем, что $\kappa = 1, \frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{1}{2}; \frac{5}{6}; \frac{7}{6}; \frac{3}{2};$
 $\frac{3}{5}; \frac{7}{5}; \frac{9}{5};$

Ответ: $\frac{1}{2}; \frac{3}{5}; \frac{2}{3}; \frac{5}{6}; 1; \frac{7}{6}; \frac{4}{3}; \frac{7}{5}; \frac{3}{2}; \frac{9}{5}$

25

Решим

$$f_1(x) = (x+a_1)(x^2+b_1x+b)$$

$$f_2(x) = (x+a_2)(x^2+b_2x+b)$$

$$f_3(x) = (x+a_3)(x^2+b_3x+b)$$

при $\forall x \in \mathbb{R}: f_1(x) = f_2(x) = f_3(x)$

~~замечая, что~~

2. - покажем, что $\begin{cases} a_1 \neq a_2 \\ a_2 \neq a_3 \\ a_1 \neq a_3 \end{cases}$ — от противного: б.о.о. $a_1 = a_2$,

значит, при $x \in \mathbb{R} \setminus \{-a_3\}$: $(x+a_1)(x^2+b_1x+b) = f_1(x) = f_2(x) =$
 $= (x+a_2)(x^2+b_2x+b)$

значит, рав-во должно быть верно тогда, когда

$$x^2+b_1x+b = x^2+b_2x+b \quad \text{при } \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-a_3\}$$

$$x(b_1-b_2) = 0 \quad \text{— данное рав-во должно быть верно,}$$

чем при одном знач-ии x — противоречие

значит, $a_1 \neq a_2$

Аналогично можно доказать, что $\begin{cases} a_2 \neq a_3 \\ a_1 \neq a_3 \end{cases}$

Черновик: 25. ~~Решение~~ $f_1(x) = x^3 + b_1x^2 + 6x + a_1x^2 + a_1b_1x + 6a_1$
 $x^3 + (a_1 + b_1)x^2 + (a_1b_1 + 6)x + 6a_1$

$$f_2(x) = x^3 + b_2x^2 + 8x + a_2x^2 + a_2b_2x + 8a_2 =$$

$$= x^3 + (a_2 + b_2)x^2 + (a_2b_2 + 8)x + 8a_2$$

$$f_3(x) = x^3 + (a_3 + b_3)x^2 + (a_3b_3 + 12)x + 12a_3$$

$$f_1(x) = f_2(x) = f_3(x)$$

$$\begin{cases} 12a_3 = 8a_2 = 6a_1 \\ a_1b_1 + 6 = a_2b_2 + 8 = a_3b_3 + 12 \\ a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = a_3 + b_3 \end{cases}$$

$$3a_1 = 4a_2 = 6a_3$$

$$3a_1 = 4a_2$$

$$a_1b_1 + 6 = \frac{4a_2b_1}{3} + 6 = a_2b_2 + 8$$

$$b_1 - b_2 = a_2 - a_1$$

$$4a_2b_1 - 3a_2b_2 = 6$$

$$a_2(4b_1 - 3b_2) = 6$$

$$a_2(4a_2 - 4a_1 + b_2) = 6$$

$$3 \cdot 2 \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot 2^2 = 26 \cdot 3^2$$

$$a_1^2 + a_1b_2 + 8 = 0$$

$$a_3^2 + a_3b_2 + 8 = 0 \quad \begin{cases} a_1 \cdot a_3 = 8 \\ a_1 + a_3 = -b_2 \end{cases}$$

$$a_1 + a_3 = -b_2$$

$$a_1 + a_3 = -b_2$$

$$a_2 + a_3 = -b_1$$

$$a_1 + a_2 = -b_3$$

$$b = a_2 \cdot a_3$$

$$8 = a_1 \cdot a_3$$

$$12 = a_1 \cdot a_2$$

$$(a_1 a_2 a_3)^2 = 2^6 \cdot 3^2$$

$$a_1 a_2 a_3 = 2^3 \cdot 3$$

$$\frac{8 \cdot 7}{2} - 1 =$$

$$a_1 = 2a_3$$

$$a_1 = \frac{4a_2}{3}$$

$$a_3 = \frac{a_1}{2}$$

$$a_2 = \frac{3a_1}{4}$$

$$-12a_2a_3 = \frac{3a_1^2}{8} = \frac{3 \cdot 8}{a_1} \quad a_1^3 = 8^2 = 2^6$$

$$a_1 = 4$$

$$a_2 a_3 = 6$$

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_3 = 2 \\ a_2 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} \rightarrow b_2 = 6 \\ \rightarrow b_3 = 7 \\ \rightarrow b_1 = 5 \end{cases} \quad \rightarrow f = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 27$$

Умножить; место 6:

$$2. f_1(x) = f_2(x) = f_3(x); \begin{cases} a_1 \neq a_2 \\ a_2 \neq a_3 \\ a_1 \neq a_3 \end{cases}$$

Рассмотрим $f_2(x)$:

$$f_1(-a_1) = 0 = f_2(-a_1) = f_3(-a_1), \text{ значит,}$$

$$f_2(-a_1) = \underbrace{(-a_1 + a_2)}_{\neq 0} (a_1^2 - a_1 a_2 + 8) = 0, \text{ значит, } a_1^2 - a_1 a_2 + 8 = 0 =$$

- $-a_2$ является корнем уравнения;Аналогично для $-a_3$: $a_3^2 - a_3 a_2 + 8 = 0$, значит,- $-a_2$ и $-a_3$ - корни уравнения $x^2 + b_2 x + 8$ Аналогично для остальных кв. уравнений ($y f_1(x)$ и $y f_3(x)$):- $-a_2$ и $-a_3$ - корни уравнения $x^2 + b_1 x + 6$ - $-a_2$ и $-a_1$ - корни уравнения $x^2 + b_3 x + 12$

$$\text{Итак имеем: } 1) x^2 + b_2 x + 8 = 0: \begin{cases} -a_2 - a_3 = -b_2 \\ (-a_2)(-a_3) = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 + a_3 = b_2 \\ a_2 a_3 = 8 \end{cases}$$

$$2) x^2 + b_1 x + 6 = 0: \begin{cases} -a_2 - a_3 = -b_1 \\ (-a_2)(-a_3) = 6 \end{cases} \begin{cases} a_2 + a_3 = b_1 \\ a_2 a_3 = 6 \end{cases}$$

$$3) x^2 + b_3 x + 12 = 0: \begin{cases} -a_1 - a_2 = -b_3 \\ a_1 a_2 = 12 \end{cases} \begin{cases} a_1 + a_2 = b_3 \\ a_1 a_2 = 12 \end{cases}$$

Итак имеем следующую систему:

Рассмотрим (1), (2), (3) уравнения:

$$\begin{cases} a_1 a_2 = 12 = 3 \cdot 2^2 \\ a_2 a_3 = 6 = 2 \cdot 3 \\ a_1 a_3 = 8 = 2^3 \end{cases} \begin{cases} (a_1 a_2 a_3)^2 = 3^2 \cdot 2^6 \\ a_2 a_3 = 2 \cdot 3 \\ a_1 a_3 = 2^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 a_2 a_3 = 3 \cdot 2^3 \\ a_2 a_3 = 2 \cdot 3 \\ a_1 a_3 = 2^3 \end{cases} \begin{cases} (a_1 : a_1 : a_3 > 0) \\ a_1 = 2^2 = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_1 = 4 \\ a_2 = 3 \\ a_3 = 2 \end{cases}$$

- Проверка как нашей системы:

Умножение; лист 7:

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_2 = 3 \\ a_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = b_3 \\ a_1 + a_3 = b_2 \\ a_2 + a_3 = b_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_2 = 3 \\ a_3 = 2 \end{cases}$$

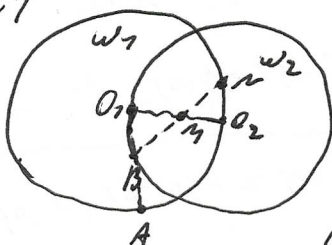
$$\begin{cases} b_3 = 7 \\ b_2 = 6 \\ b_1 = 5 \end{cases}$$

значит, $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 =$
 $= 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 27$

Ответ: 27

26. Решения:

рис. 1

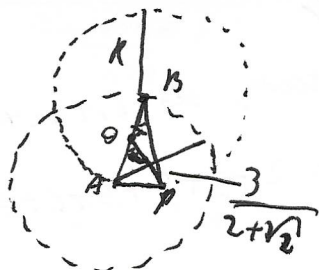


$\omega_1(\omega_1 \cap \omega_2)$ — область, которую образуют полуболванки (см. рис. 1)
 $\omega_2(\omega_1 \cap \omega_2)$ — область, которую образуют полуболванки (см. рис. 1)
 $(K = \frac{3}{2} + \frac{1}{2})M$ — ср. $O_1 O_2$ — пересечения ω_1 и ω_2 (область, где работают полуболванки)

Б.о.о.: $B \in \omega_2$
 в точке B ; тогда её путь до корня (точки M) — это отрезок BM ; когда она идёт по дуге ω_2 отрезку, ~~то есть~~ она может по дуге ω_2 полуболванки, значит её путь по отрезку BM кратчайшим пути по отрезку BM , где L — точка, симметричная B относительно M ($L \in \omega_2 \cap \omega_1$, значит, $L \in B \cap L \in \omega_1$).

Можно найти кратчайший путь, по которому можно дойти от точки A (точка $A \in \omega_1$) тогда её путь от точки B : AB
 найти мин. значение AB :
 проведем отрезок $\omega^1(B; AB)$; заметим что AB

Черновик: 26.

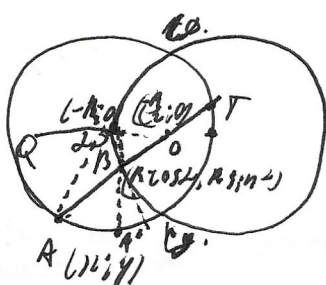


O — центр AB

$$\angle AOP + \angle APB$$

$$\angle AOP + \angle OBP = 30^\circ$$

$$AP^2 = \sqrt{\frac{BP^2}{2} + \frac{AP^2}{2} - \frac{BP \cdot AP}{2}} > \frac{BP}{2} = AO$$



$$Q(x, y) \Rightarrow (2b - R; 2a - y)$$

$$-R - R \cos \alpha; -R \sin \alpha:$$

$$BT = \sqrt{(-R - R \cos \alpha - R \cos \alpha)^2 + (-R \sin \alpha - R \sin \alpha)^2}$$

$$= R \sqrt{(1 + 2 \cos \alpha)^2 + (2 \sin \alpha)^2} = R \sqrt{7 + 4(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + 4 \cos \alpha} = R \sqrt{5 + 4 \cos \alpha}$$

$$R - r = AB = \sqrt{R^2 (\cos \alpha + 1)^2 + R^2 \sin^2 \alpha} = R \sqrt{7 + 2 + 2 \cos \alpha} = R \sqrt{9 + 2 \cos \alpha}$$

$$r = R(1 - \sqrt{7 + 2 \cos \alpha})$$

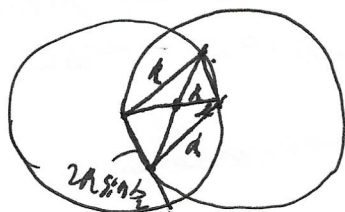
$$m_{in} = \sqrt{5 + 4 \cos \alpha} + \sqrt{7 + 2 \cos \alpha} - \sqrt{7 + 2 \cos \alpha} = \sqrt{5 + 4 \cos \alpha} - \sqrt{7 + 2 \cos \alpha}$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} \geq \sqrt{c} \Rightarrow \sqrt{a} \geq \sqrt{b} + \sqrt{c} \Rightarrow \sqrt{a} \geq \sqrt{b} + \sqrt{c} \Rightarrow \sqrt{a} \geq \sqrt{b} + \sqrt{c}$$

$$4b$$

$$0 \leq \alpha \leq \pi/2$$

$$7b^2 \sqrt{7 + 8b^2} - 8b^2 \sqrt{7} + b^2 \sqrt{18} - 2R \sin \frac{\alpha}{2} = R^2 + b^2$$



$$2R \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$R^2 + 8R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = R^2 + b^2$$

$$b = R \sqrt{7 + 8 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} + R - 2R \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$R - 2R \sin \frac{\alpha}{2}$$

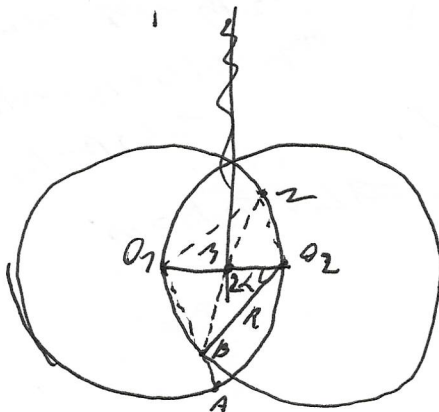
$$R(\sqrt{7 + 8b^2} + 1 - 2b)$$

$$\frac{4b - \sqrt{7 + 8b^2}}{\sqrt{7 + 8b^2}}$$

$$f'(b) = -2 + \frac{8b}{2\sqrt{7 + 8b^2}} = 2\left(\frac{4b}{\sqrt{7 + 8b^2}} - 1\right)$$

Чистовик; лист 8:

будет принимать наименьшее значение тогда, когда ω' касается ω_1 , ~~значит~~: а это равносильно тому, что $R - AB = BO_1$; $AB = R - BO_1$ — это наименьшее значение отрезка AB ; найдем оптимальный путь $A \rightarrow B \rightarrow \omega$



Пусть $\angle O_1 O B = 2\alpha$ ~~значит~~
 $(0 \leq 2\alpha \leq 60^\circ \Rightarrow \sin 2\alpha \in [0; \frac{1}{2}])$
 (м.н. $O_1 O B$ — радиус ω)
 $O_1 B = 2R \sin \alpha$
 AB — искомая:

$$AB = \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 \alpha + 2R^2 \sin \alpha} = \frac{R}{2} \Rightarrow$$

$$AB = R \sqrt{1 + 8 \sin^2 \alpha};$$

$AB = R - 2R \sin \alpha$; ~~значит~~ $R(\sqrt{1 + 8 \sin^2 \alpha} + 1 - 2 \sin \alpha)$
 Пусть $\sin \alpha = t$; найдем min: $R(\sqrt{1 + 8t^2} + 1 - 2t)$

$$f'(t) = -2 + \frac{8t}{\sqrt{1 + 8t^2}} = 2 \left(\frac{4t - \sqrt{1 + 8t^2}}{\sqrt{1 + 8t^2}} \right) \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow 4t \sqrt{1 + 8t^2} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{при } t \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}: 4t \leq \sqrt{1 + 8t^2} \\ t \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}: 4t \geq \sqrt{1 + 8t^2} \end{aligned} \Rightarrow f(t) \text{ min при } t \in \left[-\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}} \right]$$

при $t \in \left[\frac{1}{2\sqrt{2}}; +\infty \right)$

$$\begin{aligned} \text{значим min} &= f\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = R\left(\sqrt{1 + 1} + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{2\sqrt{2}}(R + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}) = \\ &= (R + 1) \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} - \text{такое рав-во выполн.} \\ \text{когда } \sin \alpha &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \in [0; \frac{1}{2}] - \checkmark \end{aligned}$$

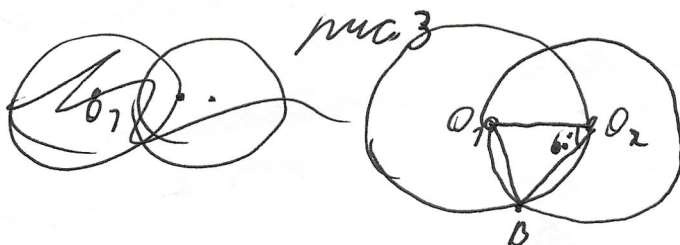
Ответ: $\frac{3}{2\sqrt{2}}$

Задача 9: лист 9;

Р. 9 к. Задача 6: тем факт, что $\angle \leq 60^\circ$

Очевидно, т.к.

В может быть пересечение ω_1 и ω_2 (рис. 3)



А O_1O_2B — правильный
треугольник ($O_1O_2 = O_2B =$
 $= O_1B = R$)

$\angle O_1O_2B = 60^\circ$