



86-12-80-37
(159.1)



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА**

Вариант 9

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Калужский
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Киселева Михаила Романовича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«13» апреля 2025 года

Подпись участника
Киселев

Числовик

$$x^3 - 12x^2 - 2x - 2 = 12x - 13$$

$$\text{Если } x^2 - 2x - 2 = 0 \quad \begin{array}{c} \diagup \\ -1 \quad 2 \end{array} \rightarrow x$$

$$\text{Если } \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 2 \end{cases} \text{ то}$$

$$x^3 - 2x^2 + 2x - 2 = 12x - 13$$

$$x^3 - 2x^2 - 10x + 15 = 0$$

$$x = 3 \text{ корень}$$

$$(x-3)(x^2 + 2x - 5) = 0$$

$$D_1 = K^2 - 4C$$

$$D_1 = 1 - 4 \cdot (-5) = 21$$

$$x = \frac{-K \pm \sqrt{D_1}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \pm \sqrt{6} \\ x \leq -1 \\ x \geq 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 - \sqrt{6} \end{cases}$$

$$\text{Если } -1 < x < 2, \text{ то}$$

$$x^3 + 2x^2 - 2x - 2 = 12x - 13$$

$$x^3 + 2x^2 - 13x + 11 = 0$$

$$x = 1 \text{ корень}$$

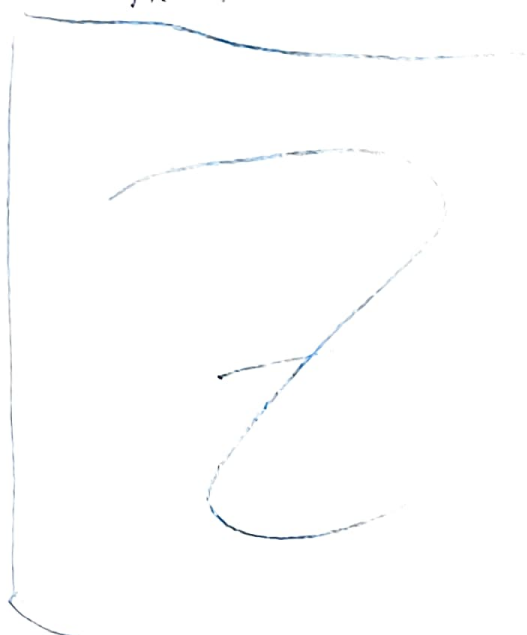
$$(x-1)(x^2 + 2x - 11) = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+11}}{2} \quad x = -1 \pm \sqrt{12}$$

$$\begin{cases} x = -1 \pm 2\sqrt{3} \\ x = 1 \\ -1 < x < 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 + 2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{Ответ. } 1; -1 + 2\sqrt{3}; 3; -1 - \sqrt{6}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 - 10x + 15 \mid x-3 \\ \underline{x^3 - 3x^2} \\ 2x^2 - 10x + 15 \\ \underline{2x^2 - 6x} \\ -4x + 15 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} x^3 + 2x^2 - 13x + 11 \mid x-1 \\ \underline{x^3 + x^2} \\ x^2 - 13x + 11 \\ \underline{x^2 - x} \\ -12x + 11 \end{array}$$

Именовик

максимум ^{N1} отводится $\frac{1}{10}$ за раз, минимум $\frac{1}{100}$

~~Если Вася~~ за раз свел π , то для него свел y м.
 $x+y = \frac{11}{100}$, какими бы ни были x из допустимых значений.

Тогда для первого хода свел $\frac{1}{100}$, за 8 раз ходов он сведет еще

$\frac{88}{100}$, для него это сделать

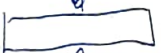
останется $\frac{11}{100}$ и будет ход Васи, она не может свести все или оставит больше, чем $\frac{10}{100}$, поэтому следующий ход для Вася сводит ответ для Вася сводит.

3.

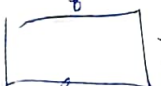
Если найти такие прямоугольники 

где $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ и $ab = 2(a+b)$, тогда

Если $a=1$ ~~тогда~~ $a \leq b$

1  $b = 2 + 2b \Rightarrow b = -2$, таких нет

Если $a=2$

2  $2b = 2(2+b) \Rightarrow b = 4$ таких нет

Если $a=3$

3  $3b = 2(3+b) \Rightarrow b = 6$, есть только прямоугольник 6×3

Если $a=4$

4  $4b = 2(4+b) \Rightarrow b = 4$ есть только прямоугольник 4×4

числовик

Если $a \geq 5, b \geq 5$ докажем, что нет таких $a, b \in \mathbb{N}$ и $a+b = 2(a+b)$

Базой индукции $a=5, b=5$ $ab > 2(a+b)$

$ab > 2(a+b)$ верно для a, b , то верно и для $(b+1)$ и a

$$(b+1)a \geq 2(a+b+1)$$

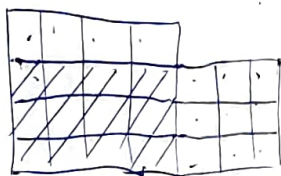
$$ab + a \geq 2(a+b) + 2$$

$ab \geq 2(a+b)$ по предположению

$$a \geq 2, \text{ т.е.}$$

$ab + a \geq 2(a+b) + 2$, т.е. нет $a, b \in \mathbb{N}$ таких или равных 5, что $ab = 2(a+b)$

Есть только 2 прямоугольника, соответствующие: 6×3 и 4×4 .



минимальная возможная площадь этой фигуры составляет 13

Ответ. 13

№7.

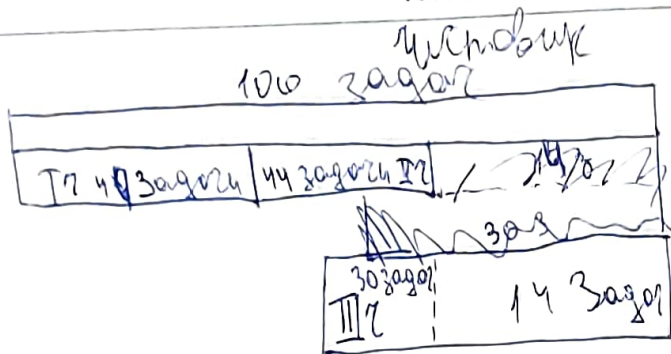
Если $n \geq 45$, то общее количество решений детей не меньше, чем $45 \cdot 20 + 1 = 901$

Предположим, что нет ни 1 задачи, которую решит хотя бы 20 детей, т.е. $\forall$ задача решенный задачи не более, чем

$$9 \cdot 100 = 900, \text{ так как } 901 > 900,$$

такого быть не может. Значит, $n \leq 44$, т.е. каждая задача решена хотя бы 20 детьми. Докажем, что при $n=44$ не существует

такой задачи, пусть все задачи решены 44, а детей 45: при этом пример, как это могло быть



Затем беря кемат
~~на~~ 70 заготов по 1
 раз и 30 заготов
 по 2

Средуныне 3
 человека по 2

кематом 70 заготов по 1 раз и 30 заготов
 по 2, но эти 30 не пересекаются
 с 30, которые решил 2 человека из первой
 группы

Средуныне 3 так же, но 30 заготов
 не пересекаются с предыдущими, пра-
 вильно.

имеет 9 человек, каждому заготову
 решил не более их раз

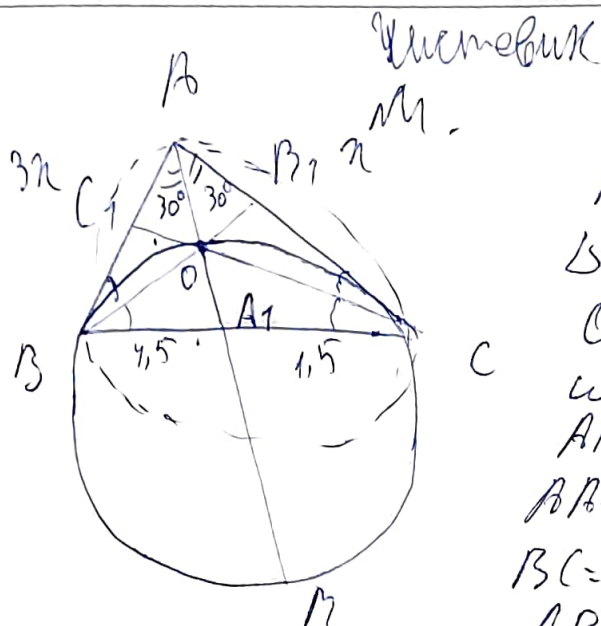
Этим же члч, по 2 не 30

18 человек, каждому заготову решил
 не более 3 раз, остальные
 2 человека в сумме решили не

более $45 + 44 = 89$ заготов, беря

их не пересекающимися: все заготовки
 решил не более 9 раз, т.е. при $n \leq 44$,
 каждый не обязательно получает по 1 раз

Ответ. Для $n = 45$.



Решение
 $\triangle ABC \angle B = 60^\circ$
 O - центр
 в BOC
 AB - диаметр
 $AB \cap \omega BOC = O; M$
 $BC = 6 \text{ см}$
 $\frac{AB}{BC} = \frac{3}{1}$

найти OM
 Решение

$$1) \frac{BA_1}{3x} = \frac{A_1C}{x}$$

$$\begin{cases} BA_1 = 3A_1C \\ BA_1 + A_1C = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} BA_1 = 4,5 \\ A_1C = 1,5 \end{cases}$$

$$2) \triangle ABC$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A$$

$$36 = 9x^2 + x^2 - 2 \cdot x^2 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ$$

$$36 = 10x^2 - 3x^2$$

$$x^2 = \frac{36}{7} \quad x = \frac{6\sqrt{7}}{7}$$

$$AC = \frac{6\sqrt{7}}{7}$$

$$AB = \frac{18\sqrt{7}}{7}$$

$$3) \frac{\sin ABC}{\frac{6\sqrt{7}}{7}} = \frac{\sin BAC}{6}$$

$$\frac{\sin ABC}{\frac{\sqrt{7}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin ABC = \frac{\sqrt{21}}{14}$$

$$\frac{\sin ABC}{BA_1} = \frac{\sin 30^\circ}{4,5}$$

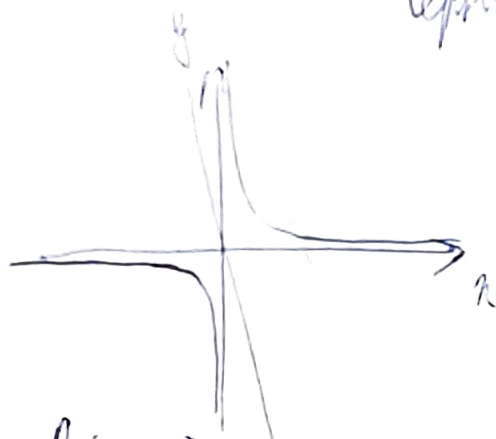
$$\frac{\frac{\sqrt{21}}{14}}{BA_1} = \frac{1}{9}$$

$$BA_1 = \frac{9\sqrt{21}}{14}$$

$$4) \frac{B_1C}{6} = \frac{B_1A}{\frac{18\sqrt{7}}{7}}$$

$$\frac{B_1C}{B_1A} = \frac{4}{3\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

Черевик



$$f(x) = (-18x + 9)$$

$$\begin{cases} A(0; a) \\ \frac{1}{2} = -18x + 9 \\ B(x_1; f(x_1)) \quad C(x_2; f(x_2)) \\ D(\frac{9}{18}; 0) \end{cases}$$

$$AB = BC = CD$$

$$y = -18x^2 + 9x$$

$$18x^2 - 9x + 1 = 0$$

$$D: 9^2 - 4 \cdot 18 = 9^2 - 72$$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{9^2 - 72}}{36}$$

$$x = 4\sqrt{3 \cdot 27}$$

$$= 8 \cdot 3\sqrt{3}$$



$$\begin{array}{r} 48 \\ 192 \sqrt{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 90 \\ 15 \\ 45 \\ 15 \\ \hline 225 \\ 45 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 675 \\ 1350 \end{array}$$

$$84$$

$$\begin{array}{r} 64 \\ 3 \\ \hline 192 \end{array}$$

~~1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23~~

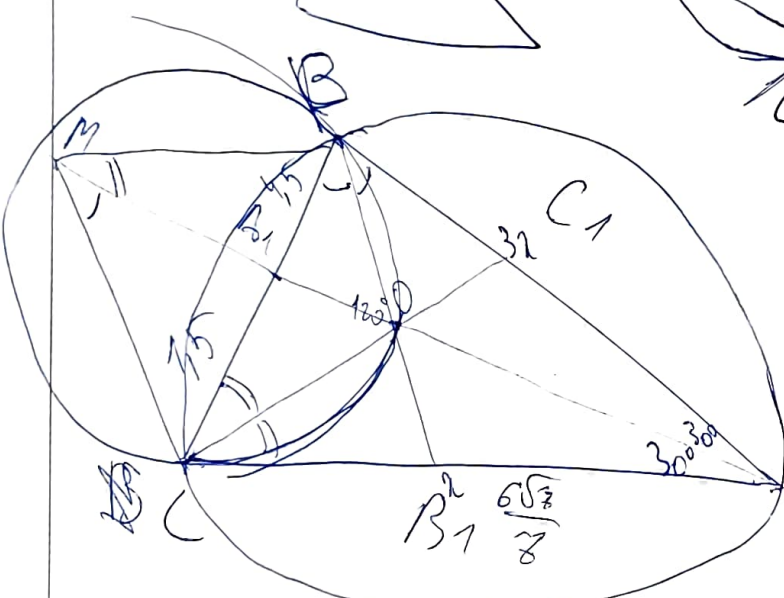
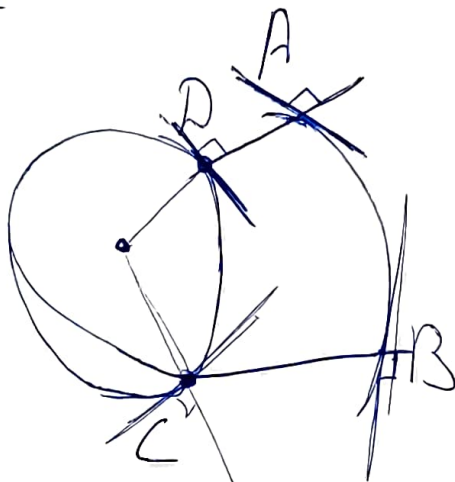
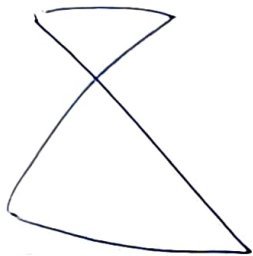
~~1 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47~~

~~48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 283 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73~~

~~74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93~~

$$44 + 44 + 44 - 60 = 126 \neq 32$$

4.2.



$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\ &\quad - 2AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ \\ 36 &= 10^2 + 20^2 - 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$A \quad 36 = 4x^2$$

$$x = \frac{6\sqrt{4}}{2}$$

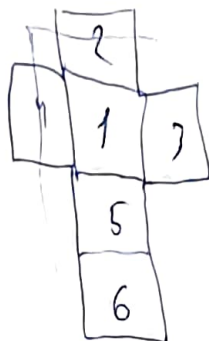
$$1,5^2 = AA^2 + \frac{36}{7} - 2 \cdot AA \cdot \frac{6\sqrt{3}}{7} \cdot \cos 30^\circ$$

$$2,25 = x^2 + \frac{36}{x} -$$

$D_2 \sin 2 \approx 1.1$

$$D_1 = \sin 20^\circ \cdot 6$$

Prz. 5.11.20. 6



черновик

номер

6

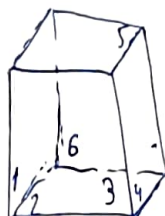
4

Задание нужно
коротко и правильно
м.е. на правах
математика

1-6

2-5

3-4



• • • • • - - - • • • • •

.....

$$9n + n + 1 = 10n + 1$$

$$10n + 1 \geq 100 \cdot 9,9 = 990$$

$$10n \geq 899$$

$$n \geq 89,9$$

При $n = 90$ каждая задача

$$\cancel{90 \cdot 9,9 + 1 = 901,9}$$

n

$$20n + 1 > 9 \cdot 100$$

$$20n > 899$$

$$n > \cancel{89,9} \quad 45,0 \cdot \frac{1}{2}$$

$$n = 45$$

$$= 881$$

$$\begin{array}{r} 44 \\ \times 19 \\ \hline 396 \\ 44 \\ \hline 836 \\ 45 \end{array}$$

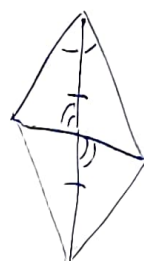
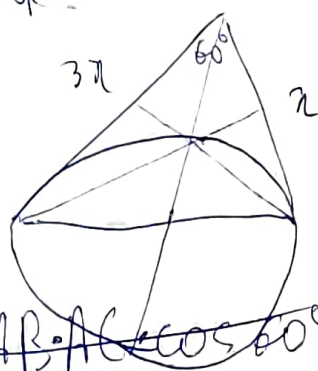
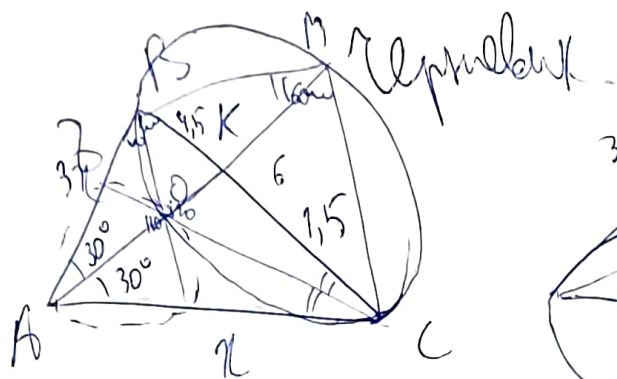
Если $n = 45$, то решили не менее

$20 \cdot 45 + 1 = 901$ задачу, а условие
того, что ни 1 задачу не решила никто

По $59 \cdot 100$

Докажем, что при $n = 44$ никто не решил
~~ни одну~~ задачу, ~~но~~ решили все $\{ < 10 \}$

$$4 \cdot 40 + 19 + 45 =$$



$$AB^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos 60^\circ$$

$$\begin{cases} \frac{36}{3r} = \frac{KC}{r} \\ BK + KC = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} BK = 3KC \\ 3KC + KC = 6 \\ KC = \frac{3}{2} = 1,5 \end{cases}$$

$$36 = 9r^2 + r^2 - 2 \cdot 3r^2 \cdot \frac{1}{2} \quad AK^2$$

$$36 = 10r^2 - 3r^2$$

$$r^2 = \frac{36}{7}$$

$$r = \frac{6\sqrt{7}}{7}$$

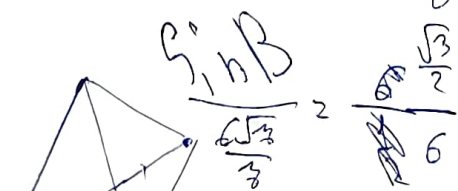
$$AB = \frac{\sqrt{7} \cdot 3r}{7}$$

$$\frac{AB}{\frac{6\sqrt{7}}{7}} = \frac{3r}{6}$$

$$\begin{cases} 3AB = \sqrt{7} \cdot 3r \\ AB + 3r = \frac{18\sqrt{7}}{7} \end{cases}$$

$$AB + 3r = \frac{18\sqrt{7}}{7}$$

$$\frac{\sqrt{7} \cdot 3r}{7} + 3r = \frac{18\sqrt{7}}{7}$$



$$\frac{3r \cdot \frac{\sqrt{7}}{7}}{\frac{6\sqrt{7}}{7}} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{6}$$

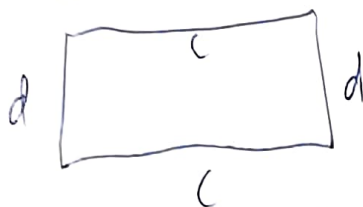
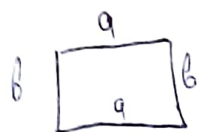
$$3r \left(\frac{\sqrt{7}}{7} + 1 \right) = \frac{18\sqrt{7}}{7}$$

$$\sin B = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{6\sqrt{7}}{7} = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

$$3r = \frac{\frac{18\sqrt{7}}{7}}{\frac{\sqrt{7}+7}{7}} = \frac{18\sqrt{7}}{\sqrt{7}+7} = 18 \cdot \frac{\sqrt{7}}{7}$$

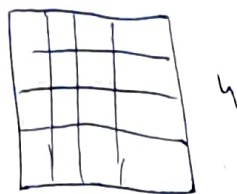
$$\cos B = \sqrt{1 - \frac{21}{49}} = \sqrt{\frac{28}{49}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

Черновик



$$2a + 2b = ab$$

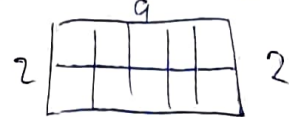
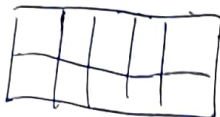
$$2c + 2d = cd$$



8 4

10 6

12 8



14

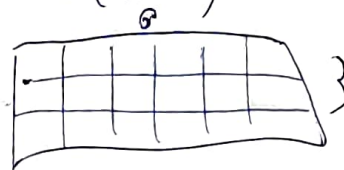
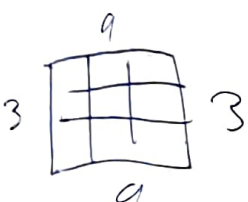
9

$$2a = 2(2 + a)$$

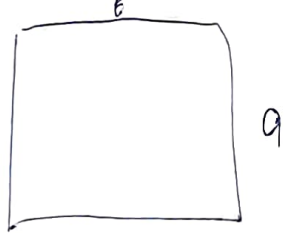
$$3a = 2(3 + a)$$

$$3a = 6 + 2a$$

$$a = 6$$



4x4



$$ab = 2(a + b)$$

$$a \geq 5$$

$$ab > 2(a + b)$$

$$b \geq 5$$

$$(a+1)(b+1) \geq 2(a+b+2)$$

1/3 таких прямоугольников

4x4 и 3x6

Кривошук

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$\text{Если } \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

$$x^3 - x^2 + x + 2 = 12x - 13$$

$$x^3 - x^2 - 13x + 15 = 0$$

$$x^2 + 2x - 5 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+5}}{1} = -1 \pm \sqrt{6}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 - 11x + 15 = 0 \\ x^3 - x^2 - 11x + 15 \quad | x-3 \\ \hline x^3 - 3x^2 \\ \hline -2x^2 - 11x + 15 \\ -2x^2 - 6x \\ \hline -5x + 15 \\ -5x + 15 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\text{Если } -1 \leq x \leq 2$$

$$x^3 + x^2 - x - 2 = 12x - 13$$

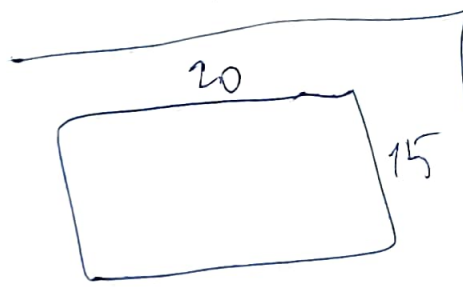
$$x^3 + x^2 - 13x + 11 = 0$$

$$x = 1$$

$$\begin{array}{r} x^3 + x^2 - 13x + 11 \quad | x-1 \\ \hline x^3 + x^2 - 13x + 11 \\ \hline x^3 - x^2 \\ \hline 2x^2 - 13x + 11 \\ -2x^2 + 2x \\ \hline -11x + 11 \\ -11x + 11 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$x^2 + 2x - 11 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+44}}{2} = -1 \pm 2\sqrt{3}$$



10

$$\frac{8}{100}$$

Определен $\frac{1}{100} \leq y \leq \frac{1}{100}$

$\frac{12}{100}$ $\frac{23}{100}$ $\frac{34}{100}$ $\frac{45}{100}$ $\frac{56}{100}$

$\frac{89}{100}$ - не веро

$\frac{88}{100}$ - не веро