

0 169720 840003

16-97-20-84
(161.15)



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА**

Вариант 14 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников ломоносов по математике
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Климанова Юлия Алексеевна
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«13» апреля 2025 года

Подпись участника
Ю

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
16-97-20-84		+	+	+	+	+	0	0	0
	65	15	15	15	5	15	0	0	0

4) Верны рассуждения, но логичные ответы

~~Черновик~~ Черновик

Пол-
С

$$\begin{cases} |2x-3| + |3x-2| - (x-1) = 1 + \sqrt{5} + (\sqrt{5}-1) \\ x-1 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |2x-3| + 2x-1-2\sqrt{5}=0; \\ x > 0 \end{cases}$$

N5

65 (шестьдесят пять)

$$0 < 3^{5-\frac{1}{x}} \leq 3^5$$

$$(3^{5-\frac{1}{x}} - \sin 4^x)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$(a^x)' = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \frac{a^x \cdot (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$$

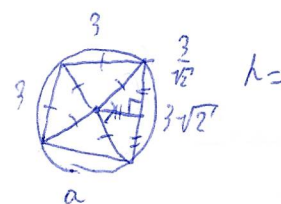
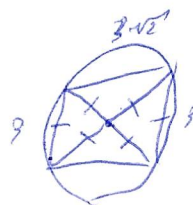
$$(e^x)' = e^x \Rightarrow (a^x)' = \ln a \cdot a^x$$

$$(a^x) = \frac{a^{x-1}}{x-1}$$

$$\begin{cases} f_1(x) = f_2(x) \\ f_2(x) = f_3(x) \end{cases}$$

$$x^3 + (a+b)x^2 + (c+b)x + ac$$

$$(a^x)'$$



$$S = \frac{3 \cdot 3 \cdot \sin 60^\circ}{2} \cdot 2 + \frac{6}{9} a_3^2 = 6$$

$$a_3^2 = 9$$

$$a^3 - b^3 + c^3 = (a-b+c)^3$$

$$(a+c)(a^2-ac+c^2) = (a+c)(b^2-b(a-b+c)+(a-b+c)^2)$$

$$2^x =$$

$$(a+c)(b^2-b(a-b+c)+(a-b+c)^2-a^2+ac-c^2)=0$$

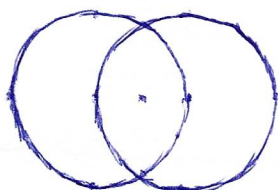
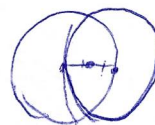
$$(a+c)(2b^2-ab-bc+(c-b)(a-b+c)+ac-c^2)=0$$

$$(a+c)(2b^2-ab-bc+2ac-bc+x^2-2ab+b^2-bc+ac-x^2)=0$$

$$(a+c)(3b^2-3ab-3bc+3ac)=0$$

$$(a+c)(b(b-a)+c(b-a))=0$$

$$(a+c)(b-a)(b-c)=0$$



$$\frac{\sqrt{3}}{2} R \cdot 2 = R\sqrt{3}$$

$$\frac{2\pi R}{6} = \frac{\pi R}{3}; \frac{R}{2} \cdot 2 = R \Rightarrow \frac{\pi R}{3} + R = R(\frac{\pi}{3} + 1)$$

Чистовик.

N1

$$x-1 \geq 0$$

$$\sqrt{(2x-3)^2} + \sqrt{(3x-2)^2} - (\sqrt{x-1})^2 = \sqrt{(1+\sqrt{5})^2} - \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}$$

$$\begin{cases} |2x-3| + |3x-2| - (x-1) = 1 + \sqrt{5} - (\sqrt{5}-1) & (\sqrt{5}-1 \geq 0) \\ x \geq 1 \Rightarrow 3x \geq 2 \Rightarrow |3x-2| = 3x-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |2x-3| + 2x-3 = 0, \\ x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x-6=0 \\ 2x-3 \geq 0 \\ 0=0 \\ 2x-3 \leq 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1,5 \\ x \geq 1,5 \\ x < 1,5 \\ x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow x \in [1, 1,5]$$

Ответ: $[1; 1,5]$

N2

$$3 \rightarrow a + \sin 4x$$

N4

$$a = \sin(\pi x)$$

$$b = \sin(2\pi x)$$

$$c = \sin(4\pi x)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)^3$$

$$(a+c)(a^2-ac+c^2) = (a+c)(b^2 + b(a+b+c) + (a+b+c)^2)$$

$$(a+c)(2b^2 + ab + bc + a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac - a^2 + ac - c^2) = 0$$

$$(a+c)(3b^2 + 3ab + 3bc + 3ac) = 0$$

$$(a+c)(b(b+a) + c(b+a)) = 0$$

$$(a+c)(b+a)(b+c) = 0$$

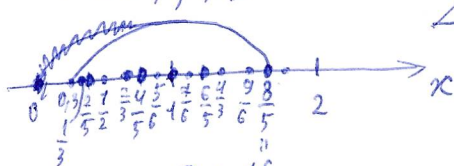
$$\begin{cases} a+c=0 \\ b+a=0 \\ b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin(\pi x) + \sin(4\pi x) = 0 \\ \sin(\pi x) - \sin(2\pi x) = 0 \\ \sin(4\pi x) - \sin(2\pi x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin 2,5\pi x \cdot \cos 1,5\pi x = 0 \\ \sin 0,5\pi x \cdot \cos 1,5\pi x = 0 \\ \sin \pi x \cdot \cos 3\pi x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2,5\pi x = \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 1,5\pi x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ 0,5\pi x = \pi k \\ \pi x = \pi k \\ 3\pi x = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k}{5} \\ x = \frac{1}{3} + \frac{2k}{3} \\ x = 2k \\ x = k \\ x = \frac{1}{6} + \frac{k}{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left\{ \frac{2k}{5}, \frac{1+k}{3}, \frac{1+k}{6}, k \in \mathbb{Z} \right\} \ni x$$

$$x \in [0, 1,6]$$

Ответ: $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, 1, \frac{7}{6}, \frac{6}{5}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{1}{5}$



N5

Числовик

$$f(x) = (x+a)(x^2+bx+c) = x^3 + (a+b)x^2 + (b^2+c)x + ac$$

Две функции равны на ~~каждом~~ множестве действительных чисел, если все их коэф. равны

$$\begin{cases} f_1(x) = f_2(x) \\ f_2(x) = f_3(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1+b_1=a_2+b_2 \\ a_1b_1+12=a_2b_2+18 \\ a_1+2a_1=18a_2 \\ a_2+b_2=a_3+b_3 \\ a_2b_2+18=a_3b_3+24 \\ 18a_2=24a_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1=2a_2 \\ a_2=\frac{4}{3}a_3 \\ b_1=b_3-a_2 \\ b_2=b_3-\frac{4}{3}a_3 \\ 2a_3(b_3-a_3)+12=\frac{4}{3}a_3(b_3-\frac{4}{3}a_3)+18 \\ \frac{4}{3}a_3(b_3-\frac{4}{3}a_3)+18=a_3b_3+24 \end{cases} *$$

$$\begin{cases} \frac{2}{3}a_3b_3 - \frac{16}{9}a_3^2 - 6 = 0 \\ \frac{4}{3}a_3b_3 - \frac{16}{9}a_3^2 - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{16}{9}a_3^2 - 6 + 2(\frac{4}{3}a_3^2 + 6) = 0 \\ 4a_3^2 - 3a_3b_3 + 54 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_3^2 = 9 \\ b_3 = \frac{4a_3^2 + 54}{3a_3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_3 = 3 \\ b_3 = 10 \\ a_3 = -3 \\ b_3 = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_3 = 3 \\ b_3 = 10 \end{cases}$$

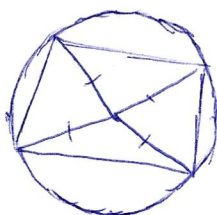
$$\begin{cases} a_3 = 3 \\ b_3 = 10 \\ a_1 = 6 \\ b_1 = 7 \\ a_2 = 4 \\ b_2 = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_3 = -3 \\ b_3 = -10 \\ a_1 = -6 \\ b_1 = -7 \\ a_2 = -4 \\ b_2 = -9 \end{cases}$$

$$a_1+b_1+a_2+b_2+a_3+b_3 = 6+7+4+9+3+10 = 39$$

Ответ: 39

N3



- 1) Рассмотрим треугольн-ки, одной из сторон которых является сторона чет-ка, а одной из вершин - центр окружности.
- 2) П.к. Δ концы вершины чет-ка принадлежат окр., две стороны каждого треугольн-ка являются радиусами окр. и равны 3

3) $S_{\text{чет}} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ (т.е. S чет-ка равна сумме S треугольн-ков)

4) Треугольнички со сторонами 3, 3, 3 - являются равносторонними $\Rightarrow S_{\Delta} = \frac{3 \cdot 3 \cdot \sin 60^\circ}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$; угол между радиусами, проведенными к вершинам чет-ка $\alpha = 60^\circ$

5) Треугольнички со сторонами 3, 3, $3\sqrt{2}$ - прямог. (По теор. обр-ой теор. Пифагора) $\Rightarrow S_{\Delta} = \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2}$; угол между рад-ми $\beta = 90^\circ$

6) Если угол между рад-ми оставшегося треугольничка равен γ , то $2\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$ (из чертежа) $\Rightarrow \gamma = 360^\circ - 120^\circ - 90^\circ = 150^\circ \Rightarrow S_{\Delta} = \frac{3 \cdot 3 \cdot \sin 150^\circ}{2} = \frac{9}{4}$

7) $S_{\text{чет}} = 2 \cdot \frac{9\sqrt{3}}{4} + \frac{9}{2} + \frac{9}{4} = \frac{9(1+2\sqrt{3})}{4}$

Чистовик

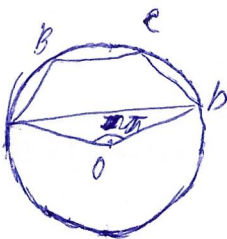
Продолжение №3

Докажем, что центр окр. лежит внутри чет.-ка.

Пусть это не так:

Тогда чет.-ник

имеет наиб. сторону AB (из чертежа), которая либо равна $3\sqrt{2}$, либо неизвестной стороне (т.к. $3 < 3\sqrt{2}$), но оба случая невозможны (из I и II) $\Rightarrow$ такого не может быть.

I AD -неизв.:

Тогда AB, BC, CD равны $3, 3, 3\sqrt{2}$,
 $\angle AOB, \angle BOC, \angle COD$ равны $60^\circ, 60^\circ, 90^\circ$,
 но $\angle AOD = 60^\circ + 60^\circ + 90^\circ \leq 180^\circ \Rightarrow$ противоре-
 чие

II $AD = 3\sqrt{2} \Rightarrow \angle AOD = 90^\circ = \angle AOB + \angle BOC + \angle COD = 60^\circ + 60^\circ + \angle COD > 90^\circ \Rightarrow$ противоречие
 угол с неизв. сторон.

 $\Rightarrow O$ лежит внутри $ABCD$ Ответ: $\frac{9(1+2+2\sqrt{3})}{4}$

№2

$$3^{5-\frac{1}{x}} \geq a + \sin 4^x$$

$$3^{5-\frac{1}{x}} - \sin 4^x \geq a$$

$$f(x) = 3^{5-\frac{1}{x}} - \sin 4^x \text{ — найдем максимальное значение на } x > 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} \ln 3 \cdot 3^{5-\frac{1}{x}} - \ln 4 \cdot 4^x \cdot \cos 4^x$$

$$\frac{1}{x^2} \ln 3 \cdot 3^{5-\frac{1}{x}} - \ln 4 \cdot 4^x \cdot \cos 4^x = 0$$

$$\frac{\ln 3}{\ln 4} \cdot 3^{5-\frac{1}{x}} = x^2 \cdot 4^x \cdot \cos 4^x$$

$$\log_4 3 \cdot 3^{5-\frac{1}{x}} = x^2 \cdot 4^x \cdot \cos 4^x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3^{5-\frac{1}{x}} = 3^5$$

существует бесконечное кол-во решений уравнения $\sin 4^x = -1$ на $x > 0$ и не сч.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3^{5-\frac{1}{x}} = 3^5 \quad (3^{5-\frac{1}{x}} \text{ — возраст. на } x \in (0; +\infty)) \Rightarrow 3^{5-\frac{1}{x}} < 3^5 \text{ на } x > 0$$

уравнения $\sin 4^x = -1$ существуют бесконечно большие решения $\Rightarrow$ Наибольшее значение $3^{5-\frac{1}{x}} - \sin 4^x$ стремится к $3^5 + 1 = 244$, но не достигает его $\Rightarrow$ минимальное значение a , при котором неравенство не имеет решений на $x \in (0; +\infty)$, $a = 244$.

Ответ: 244