



47-71-39-00
(161.16)



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

вход 12:55-13:00 Атор

Вариант 11 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Клименко Семёна Андреевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«13» апрель 2025 года

Подпись участника

Ваня

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
47-71-39-00		+	+	$\pm$	$\emptyset$	+	-	$\emptyset$	$\pm$
	60	15	15	10	0	15	0	0	5

3-сменное 8-периодное производство, 8-периодное производство, по схеме
 производства по сменности, 6-периодное производство и по количеству и номеру цикла

Черновик.

$$\sqrt{4x^2 - 12x + 9} = |2x - 3|$$

2.2.3

$$\sqrt{9x^2 - 12x + 4} = |3x - 2|$$

$$(|x-1|)^2 = |x-1|$$

$$|2x-3| + |3x-2| + |x-1| = \sqrt{6+\sqrt{20}} + \sqrt{6-\sqrt{20}}$$

$$(\sqrt{6+\sqrt{20}} - \sqrt{6-\sqrt{20}})^2 = 6+\sqrt{20} + 6-\sqrt{20} - 2\sqrt{(6+\sqrt{20})(6-\sqrt{20})} =$$

$$= 12 - 2\sqrt{16} = 12 - 8 = 4$$

$$(|2x-3| + |3x-2| + |x-1|)^2 = 4$$

$$x \leq \frac{2}{3}$$

$$(3-2x + 2-3x + 1-x)^2 =$$

$$= (6x-6)^2 = 36(x-1)^2 = 4$$

$$9(x^2 - 2x + 1) = 1$$

$$9x^2 - 18x + 8 = 0$$

$$D = 324 - 198 =$$

$$3x-2 \geq x-1$$

$$2x \geq 1$$

$$x \geq \frac{1}{2}$$

$$3^{5-\frac{1}{x}} \geq a + \sin 4^x$$

значит

$$a + \sin 4^x \geq 3$$

$$a = 3^5 + 1$$

$$4^x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x \cdot \log_4 4 = \log_4 \pi k$$

$$x = \frac{\log_2 \pi k}{2}$$

Анализ

~~60 (шестьдесят)~~

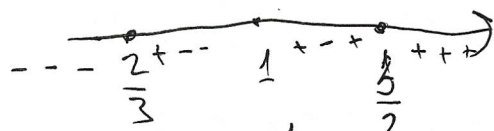
65 (шестьдесят пять)

Углубленно по арифметике.

244

$$5 = 9 \cdot 9 \cdot 3 = 243$$

$$244$$



$$\begin{array}{r} 24 \\ 3 \\ \hline 243 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ 9 \\ \hline 288 \\ - 324 \\ \hline 126 \end{array}$$

$$3x-2 - x+1 =$$

$$= (2x-1)$$

$$64 - 48 = 16$$

не имеет решений при $x > 0$ при $a = 3^5 + 1$ точно $x > 0$ не реш

$$a \in 3^5 + 1$$

$$3^{5-\frac{1}{x}} \rightarrow 3^5$$

$$\sin 4^x = -1$$

Числовые

№1.

$$\sqrt{4x^2-12x+9} + \sqrt{9x^2-12x+4} - (\sqrt{x-1})^2 = \sqrt{6+\sqrt{10}} - \sqrt{6-\sqrt{10}}$$

$$|2x-3| + |3x-2| - (x-1) = \sqrt{6+\sqrt{10}} - \sqrt{6-\sqrt{10}}$$

$$\text{ОДЗ: } x \geq 1$$

~~ОДЗ~~

При $x \geq 1$ $|3x-2| > |x-1|$, значит левая часть положительна. Возведем обе части в квадрат.

Таким же $3x-2 > 0$

$$(|2x-3| + 3x-2 - x+1)^2 = (|2x-3| + 2x-1)^2 (\sqrt{6+\sqrt{10}} - \sqrt{6-\sqrt{10}})^2$$

$$(\sqrt{6+\sqrt{10}} - \sqrt{6-\sqrt{10}})^2 = 12 - 2\sqrt{(6+\sqrt{10})(6-\sqrt{10})} = 4$$

Получаем:

$$(|2x-3| + 2x-1)^2 = 4$$

$$1 \text{ сл. } 1 \leq x \leq \frac{3}{2};$$

$$(3-2x+2x-1)^2 = 2^2 = 4 - \text{верно, то есть}$$

$$x \in [1; \frac{3}{2}] - \text{решение}$$

$$2 \text{ сл. } x > \frac{3}{2};$$

$$(2x-3+2x-1)^2 = 4$$

$$(4x-4)^2 = 4$$

$$16(x-1)^2 = 4$$

$$4(x-1)^2 = 1$$

$$4(x^2-2x+1) = 1$$

$$4x^2 - 8x + 3 = 0$$

$$D = 64 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = 16$$

$$x_1 = \frac{8+4}{8} = \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \text{ не подходит}$$

$$x_2 = \frac{8-4}{8} = \frac{1}{2} < \frac{3}{2} \text{ не подходит}$$

$$\text{Овст. } x \in [1; \frac{3}{2}]$$

Числовые

N2

$3^{5-\frac{1}{x}} \geq a + \sin 4^x$. Если при $x > 0$ нет решений, то при каком-то его положительном значении

$$a + \sin 4^x > 3^{5-\frac{1}{x}}$$

Заметим, что $3^{5-\frac{1}{x}}$ - возрастает на промежутке $(0; +\infty)$, значит нам нужно такое значение a , что $a + \sin 4^x > (3^{5-\frac{1}{x}})_{\max}$ ~~при любом x~~

$3^{5-\frac{1}{x}} < 3^5$, значит при $a \geq 3^5 + 1 = 244$ неравенство не имеет решений при $x > 0$, т.к. $3^5 + 1 + \sin 4^x \geq 3^5 > 3^{5-\frac{1}{x}}$.
Докажем, что при $a < 3^5 + 1$ найдется решение:

Если $a < 3^5 + 1$,

Решим уравнение:

$$\sin 4^x = -1$$

$$4^x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$x = \frac{\log_2 \pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ - уравнение имеет бесконечно

много решений. Значит мы можем брать такие x , что $3^{5-\frac{1}{x}}$ растёт, а правая часть остаётся равной

$a - 1 < 3^5$, значит когда-то мы найдём такое значение x , что $3^{5-\frac{1}{x}} \geq a - \sin 4^x$

Таким образом $a \geq 3^5 + 1 = 244$

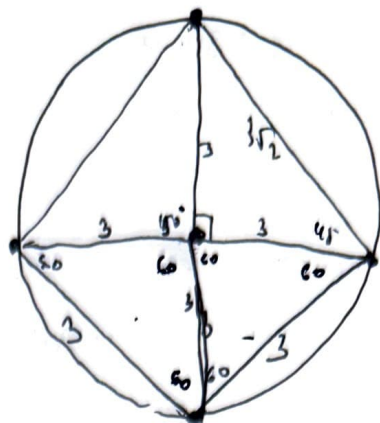
Ответ: 244

Черновики.



120, 90, 60, 60, 120

1сн:



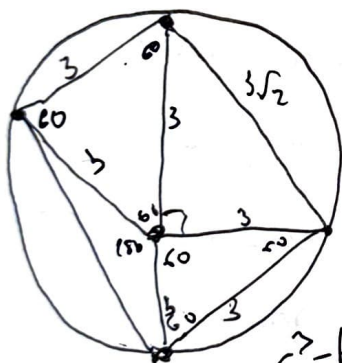
$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

$$+ S_2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = \frac{9}{2}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \sin 150 = \frac{9}{4}$$

$$\frac{9}{2} + \frac{9}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{2} = \frac{24 + 18\sqrt{3}}{4}$$

2сн:



$$\sin^3(\pi x) - \sin^3(2\pi x) + \sin^3(4\pi x) =$$

$$= (\sin(\pi x) - \sin(2\pi x) + \sin(4\pi x))^3$$

$$\sin^3 x - \sin^3 2x + \sin^3 4x =$$

$$= (\sin x - \sin 2x + \sin 4x)^3$$

$$a^3 - b^3 + c^3 = (a - b + c)^3$$

$$(a - b + c)^3 = (a - b + c)(a - b + c)(a - b + c) = a^3 - ab^2 + ac^2 - ab^2 + b^3 - bc^2 +$$

$$+ ac - bc + c^2 = a^3 + b^3 + c^2 - 2ab + ac - 2bc + ac - bc$$

$$(a - b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + ac - 2bc) = a^3 + ab^2 + ac^2 - 2ab^2 + 2ac^2 -$$

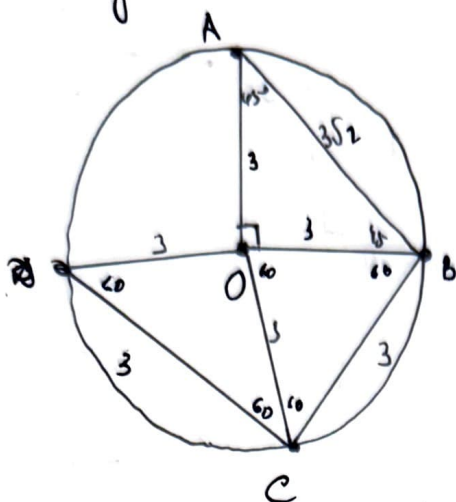
$$- 2abc + -a^2b - b^3 - bc^2$$

$$a^3 - b^3 + c^3 + 3ab^2 - 3a^2b + 3ac^2 + 3ca - 3b^2c - 3cb - 6abc$$

0

№3

1 случай:



Пусть $AB = 3\sqrt{2}$, $OB = OA = 3$ как радиусы
тогда по теореме косинусов

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos \angle AOB$$

$$\cos \angle AOB = 0, \text{ т.е. } \angle AOB = 90^\circ, \\ \angle OAB = \angle OBA = 45^\circ$$

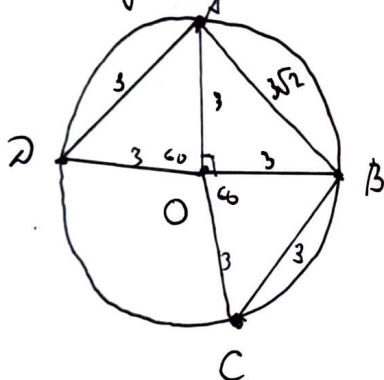
Пусть $AC = BC = 3$, тогда

$\triangle OBC$ и $\triangle OAC$ равнобедренные,
все углы по 60°

$$\angle DOA = 360^\circ - \angle AOB - \angle BOC - \angle AOC = 150^\circ$$

$$S_{ABCD_1} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{AOC} + S_{DOA} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \\ + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{2} + \frac{9\sqrt{3}}{2} + \frac{9}{4} = \frac{27 + 18\sqrt{3}}{4}$$

2 случай



Пусть $AD = BC = 3$, тогда
 $\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ равнобедренные, углы
равны по 60° , стороны равны по 3

$$\angle DOC = 360^\circ - \angle AOD - \angle COB - \angle AOB = 150^\circ$$

$$S_{ABCD_2} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{DOC} + S_{AOD} = \\ = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \\ = \frac{9}{2} + \frac{9\sqrt{3}}{2} + \frac{9}{4} = \frac{27 + 18\sqrt{3}}{4} = S_{ABCD_1}$$

Ответ: $\frac{27 + 18\sqrt{3}}{4}$

Черновик

$$(x+a_1)(x^2+b_1x+12)$$

$$x^3 + (a_1+b_1)x^2 + (12+a_1b_1)x + a_1 \cdot 12$$

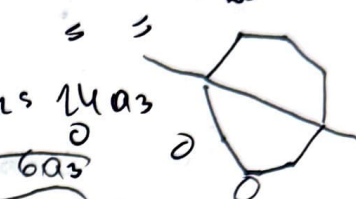
$$x^3 + (a_2+b_2)x^2 + (18+a_2b_2)x + a_2 \cdot 18$$

$$x^3 + (a_3+b_3)x^2 + (24+a_3b_3)x + a_3 \cdot 24$$

a_1, a_2, a_3 - разные числа

$-a_1, -a_2, -a_3$ - корни $\frac{10}{1}, \frac{19 \cdot 18}{6}, \frac{19 \cdot 3}{6}$

$$\frac{10}{1} \cdot \frac{19 \cdot 18}{6} \cdot \frac{19 \cdot 3}{6} = 19 \cdot 10 \cdot 19 = 361$$



$$12 + a_1b_1 = 18 + \frac{2a_1b_2}{3}$$

$$2a_1 = 3a_2 = 4a_3$$

$$\frac{1}{3}a_1b_1 = 6$$

$$a_1b_1 = 18$$

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = \frac{2}{3}a_1$$

$$a_3 = \frac{1}{2}a_1$$

$$6 + b_1 = 4 + b_2$$

$$b_1 + 2 = b_2$$

$$12 + 6b_1 = 18 + 4b_2 \quad | :2$$

$$a_1 + \frac{18}{a_1} = \frac{2}{3}a_1 + b_2$$

$$\frac{1}{3}a_1 + \frac{18}{a_1} = b_2$$

$$\frac{6+4}{10} + \frac{3+2}{10} + \frac{9+10}{10} = 39$$

$$\frac{2}{3}a_1 \cdot b_2 = 12$$

$$b_2 = \frac{18}{a_1}$$

$$24 + a_3b_3 = 12 + 18$$

$$6 + 3b_1 = 9 + 2b_1 + 4$$

$$b_1 = 9 + 4 - 6 = 7$$

$$b_2 = 9$$

$$a_1a_2a_3 = 9 \cdot 12 \quad b_3 = 6 + 7 - 3 = 10$$

$$\frac{1}{3}a_1^2 = 17$$

$$a_1^2 = 51$$

$$a_1 = 7$$

$$a_1 = 6$$

$$a_2 = 4$$

$$a_3 = 3$$

$$12 + 6 \cdot 7 = 54$$

$$18 + 4 \cdot 9 = 54$$

$$24 + 3 \cdot 10 = 54$$

Чистовик

№5.

Так как при всех x $f_1(x) = f_2(x) = f_3(x)$, то это одна и та же функция $f(x)$

$$f_1(x) = x^3 + (a_1 + b_1)x^2 + (12 + a_1b_1)x + 12a_1$$

$$f_2(x) = x^3 + (a_2 + b_2)x^2 + (18 + a_2b_2)x + 18a_2$$

$$f_3(x) = x^3 + (a_3 + b_3)x^2 + (24 + a_3b_3)x + 24a_3$$

$$\left. \begin{array}{l} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{array} \right\} = f(x)$$

Значит коэффициенты одинаковые:

$$12a_1 = 18a_2 = 24a_3 \mid : 6$$

$$2a_1 = 3a_2 = 4a_3, \text{ значит } a_2 = \frac{2}{3}a_1, a_3 = \frac{1}{2}a_1$$

Заметим, что $-a_1, -a_2, -a_3$ - корни $f(x)$, т.к.

$$f_1(-a_1) = f_2(-a_2) = f_3(-a_3) = 0, \text{ значит по теореме}$$

Вьета:

$$-(-a_1 - a_2 - a_3) = 12a_1$$

$$a_1a_2a_3 = 12a_1 \quad (a_1 > 0)$$

$$\frac{1}{3}a_1^2 = 12$$

$$a_1^2 = 36 \Rightarrow a_1 = 6, \text{ т.к. } a_1 > 0$$

$$\text{Получаем } a_1 = 6, a_2 = 4, a_3 = 3$$

Осталось найти b_1, b_2, b_3 :

$$\begin{cases} 6 + b_1 = 4 + b_2 \\ 12 + 6b_1 = 18 + 4b_2 \end{cases} \quad \begin{cases} b_2 = b_1 + 2 \\ 6 + 3b_1 = 9 + 2(b_1 + 2) \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = 7 \\ b_2 = 9 \end{cases}$$

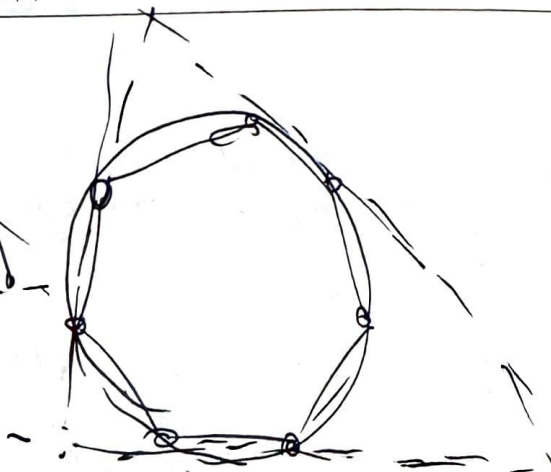
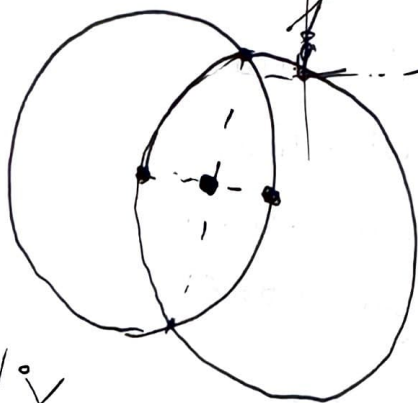
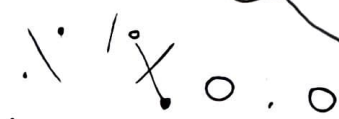
$$b_3 = b_1 + a_1 - a_3 = 7 + 6 - 3 = 10$$

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 &= 6 + 4 + 3 + 7 + 9 + 10 = \\ &= 39 \end{aligned}$$

Ответ: 39.

Сю

Черновики.



$$\frac{C^3}{C_{10}^2} = \frac{C_{10}}{C_{10}}$$

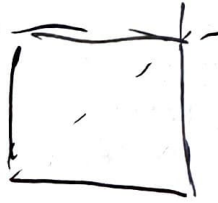
$$\frac{40!}{37! \cdot 3! \cdot 40^3} = \frac{13 \cdot 39 \cdot 38}{3 \cdot 2} = 13 \cdot 19$$

C_{10}^3

20 ротор

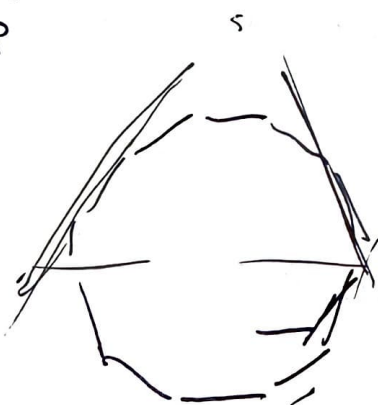


$$\frac{57}{19} = 3$$



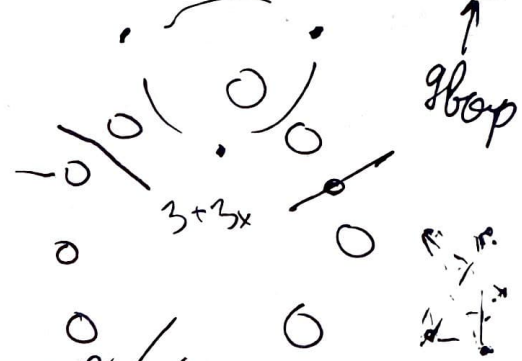
$$10 \cdot 18 = 180$$

20 ротор



1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 18

9 ротор

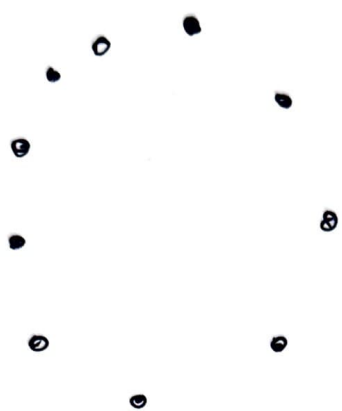


из способов выбрать 3 цифры / 0
247-38 -

и многоб.е.

№8

Пусть у нас ^{стоит} ~~есть~~ 40 марширов по кругу - это вершины треугольника. Нам надо поставить энергетиков.



Всего C_{40}^3 способа, но каждую расстановку мы посчитали 3 раза, так как можно поворачивать,

т.е. всего $\frac{C_{40}^3}{3}$; 247 различных

выборов сторон, (равносторонний)
 А получить нельзя, т.к. $40 \div 3$

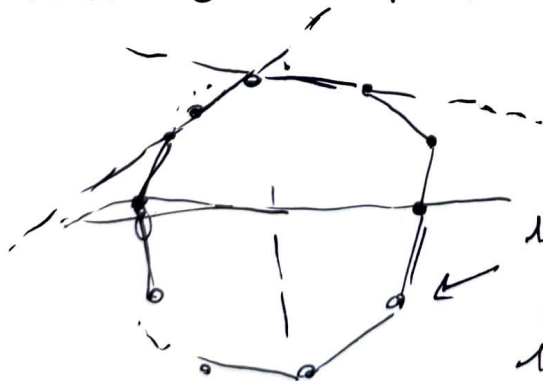
Осталось учесть неподходящие случаи:

1. 3 ^{сторона} ~~вершины~~ лежат по одну сторону от
 осевой симметрии:



$$\frac{C_{20}^3}{2} = \frac{18 \cdot 19 \cdot 20}{3! \cdot 2} = 57$$

2. 2 прямые лежат на соседних сторонах,
 а ~~одна~~ другая лежит по другую сторону
 осевой симметрии.



10 вариантов выбора, т.к.
 другие симметричны
 10-вар

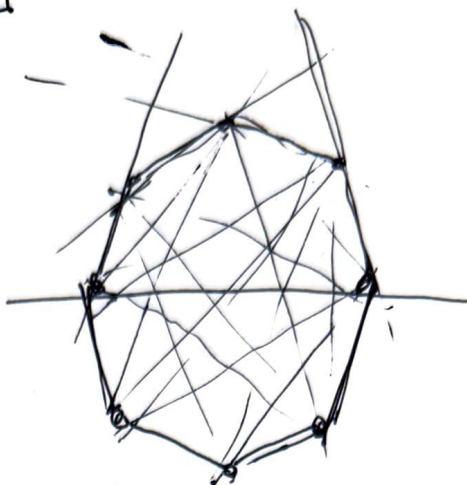
Итого $247 - 57 - 10 = 180$ разных треугольников

Отв: 180

Черновик.

$$\sin^3 \alpha - \sin^3 2\alpha + \sin^3 4\alpha = (\sin \alpha - \sin 2\alpha + \sin 4\alpha)^3$$

$\begin{matrix} 27 \\ \swarrow \\ -3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \swarrow \\ -27 \end{matrix}$



$$3\sin^2 \alpha \sin 4\alpha + 3\sin^2 2\alpha \sin \alpha - 3\sin^2 \alpha \sin^2 2\alpha + 3\sin^2 \alpha \sin^2 2\alpha -$$

$$+ 3\sin^2 2\alpha \sin 4\alpha - 3\sin^2 4\alpha \sin 2\alpha - 8\sin^2 \alpha \sin 2\alpha \sin 4\alpha = 0$$

$$\sin^2 \alpha \sin 4\alpha + \sin^2 4\alpha \sin \alpha$$

$$a^3 - b^3 + c^3 = (a - b + c)^3$$

$$4x^2 - y^2 = 3x^2$$

$$a^2 - a^2$$

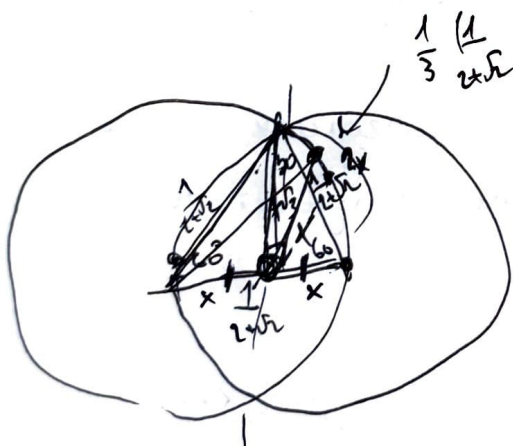
$$v_{x,y} \approx \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$xt_1 + 2xt_2 >$$

$$x \cdot \frac{S_1}{v} + 2x \cdot \frac{S_2}{v}$$

$$= \frac{x(S_1 + 2S_2)}{v}$$

↑
минимум



$$\frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2+5\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2+5\sqrt{2}} + \frac{1}{2+5\sqrt{2}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2+5\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2+5\sqrt{2}} \leq S_1 + S_2$$

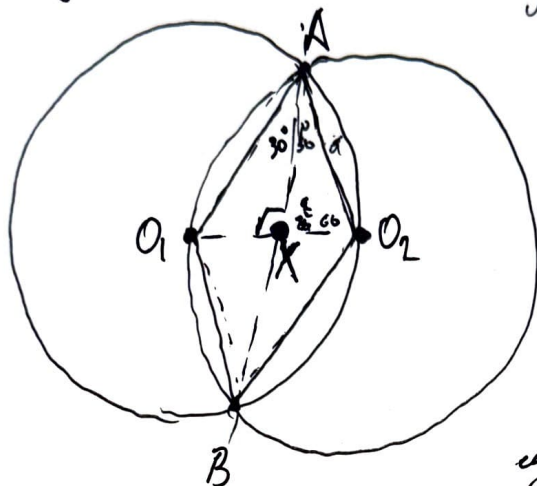
Число

№

Пусть скорость лодки v , скорость течения x ,
 S_1 - расстояние только под одной парой колёс,
 S_2 - под двумя, тогда количество: $\frac{1}{v}x + 2x \cdot \frac{1}{v} =$

$$= \frac{S_1 x}{v} + \frac{2x \cdot S_2}{v} = x \frac{(S_1 + 2S_2)}{v}, \quad \frac{x}{v} \text{ const, значит}$$

надо найти минимум $S_1 + 2S_2$, чтобы лодка была
 меньше всего.



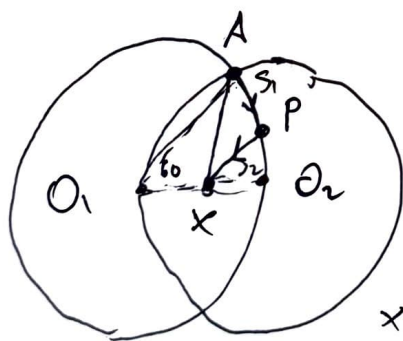
$O_1 A O_2 B$ - ромб со
 сторонами $\frac{1}{2+\sqrt{2}}$ ($AB \perp O_1 O_2$)

$$O_1 O_2 = \frac{1}{2+\sqrt{2}}, \text{ значит}$$

$\angle O_1 A O_2 = 60^\circ$, значит

$$\text{в } \triangle A X O_2: AX = \frac{1}{2+\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Пусть лодка прошла какое-то расстояние по
 дуге $A O_2$ и оставшееся пройдёт прямо до точки X:



Количество по
 пути AX: $\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}} \cdot \frac{x}{v}$

Количество по $A O_2 \rightarrow X$:

$$\frac{x}{v} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2+\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2+\sqrt{2}} \cdot 2 \right) =$$

$$= \frac{x}{v} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2+\sqrt{2}}$$

$$\text{Ответ: } \frac{4}{3}, \frac{1}{2+\sqrt{2}}$$

Новая оценка на 5 баллов

(старая оценка — 60б,
новая оценка — 65б.)

~~С.А.~~ ~~С.А.~~

Председателю апелляционной комиссии
олимпиады школьников "Ломоносов"
Ректору ИГУ имени М.В. Ломоносова
академику В.А. Садовникову от
участника заключительного этапа
по профилю "математика"
Кишинева Семёна Андреевича.

апелляции.

Прошу пересмотреть мой индивидуальный предварительный
результат заключительного этапа, а именно 60 баллов, поскольку считаю,
что задача №3 у меня решена полностью правильно в соответствии с
официальным решением и критерием. §

Подтверждаю, что я ознакомлен с Положением об апелляциях на
результаты олимпиады школьников "Ломоносов" и осознаю, что мой
индивидуальный предварительный результат может быть изменен,
в том числе в сторону уменьшения количества баллов.

Кишинева С.А.

~~Ректору~~ 29.04.2025.