

[illegible]

75 (ссылка на №1)

Тестовик

$$\sqrt{4x^2+12x+9} + \sqrt{x^2+6x+9} + (x+2)^2 = \sqrt{4+12} - \sqrt{4-12}$$

$$\begin{cases} \sqrt{(2x+3)^2} + \sqrt{(x+3)^2} + x+2 = \sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} \\ x \geq -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |2x+3| + (x+3) + x+2 = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} \\ x \geq -2 \end{cases}$$

$\overset{x+3 \text{ (м.к. } x+3-2+3=1>0)}{=}$

$$\begin{cases} |2x+3| + 2x+5 = (\sqrt{3}+1) - (\sqrt{3}-1) \\ x \geq -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |2x+3| = -(2x+3) \\ x \geq -2 \end{cases}$$

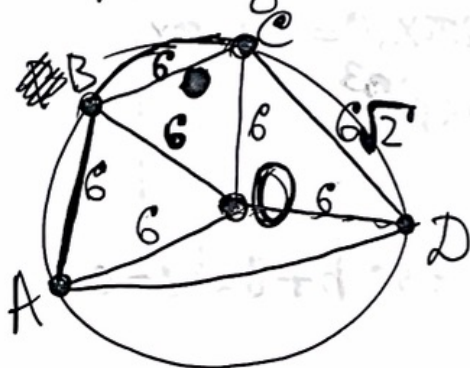
$$\begin{cases} 2x+3 \leq 0 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

$$-2 \leq x \leq -\frac{3}{2}$$

$$\text{Ответ: } \left[-2; -\frac{3}{2}\right]$$

№3

I случай: стороны длины 6 имеют одну вершину



$$OA=OB=AB=6 \Rightarrow \triangle OAB - \text{н.с.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle AOB = 60^\circ. \text{ Аналогично}$$

$$\triangle OBC - \text{н.с. и } \angle BOC = 60^\circ.$$

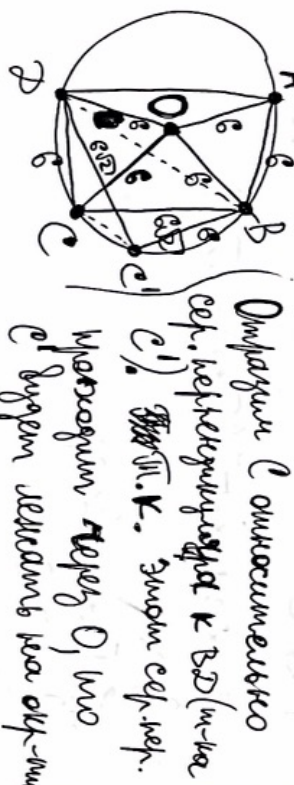
$$CD^2 = (6\sqrt{2})^2 = 6^2 \cdot 2 = OC^2 + OD^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle OCD - \text{прямоуг.} \Rightarrow \angle COD = 90^\circ.$$

$$\text{Тогда } \angle AOB + \angle BOC + \angle COD = 210^\circ > 180^\circ \Rightarrow O \text{ лежит внутри } ABCD. \text{ Тогда } \angle AOD = 360^\circ - (\angle AOB + \angle BOC + \angle COD) = 150^\circ.$$

$S(ABCD) = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin \angle AOB + \frac{1}{2} S(\triangle AOB) + S(\triangle BOC) + S(\triangle COD) +$   
 $+ S(\triangle DOA) = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin \angle AOB + \frac{1}{2} OB \cdot OC \cdot \sin \angle BOC +$   
 $+ \frac{1}{2} OC \cdot OD \cdot \sin \angle COD + \frac{1}{2} OD \cdot OA \cdot \sin \angle DOA = \frac{1}{2} \cdot 6^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} +$   
 $+ \frac{1}{2} \cdot 6^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot 6^2 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 6^2 \cdot \frac{1}{2} = 18\sqrt{3} + 27.$

II вариант: Угол при вершине в шаровом многоугольнике



$(ABCD)$ . Если зная угловые стороны  $BC = CD = 6$ ,  
 $AC = BD = 6\sqrt{2}$ ,  $S(\triangle OBC) = S(\triangle OCD)$ . Значит,  
 $S(ABCD) = 2S(\triangle OBC) + 2S(\triangle OCD) = 2(S(\triangle OAB) + S(\triangle OAD)) =$   
 $= S(ABCD)$ . И.к. 4-угольник ABCD выпуклый, а  
 I, то  $S(ABCD) = 18\sqrt{3} + 27 \Rightarrow S(ABCD) = 18\sqrt{3} + 27.$

Ответ:  $18\sqrt{3} + 27$

N4

Пусть  $a = \cos \pi x, b = \cos 2\pi x, c = \cos 4\pi x$

тогда  $a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)^3$

$(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 0$

$3a^2b + 3b^2a + 3a^2c + 3c^2a + 3b^2c + 3c^2b + 6abc = 0$

$3(a+b)(b+c)(c+a) = 0$

45-06-38-74  
(161.9)

Пусть  $a+b=0$   
 $b+c=0$   
 $c+a=0$

перейдем к x:

$\begin{cases} \cos \pi x - \cos 2\pi x = 0 \\ \cos 4\pi x - \cos 2\pi x = 0 \\ \cos \pi x + \cos 4\pi x = 0 \end{cases}$   
 $2 \sin \frac{3\pi x}{2} \cdot \sin \frac{\pi x}{2} = 0$   
 $-2 \sin \frac{3\pi x}{2} \cdot \sin \frac{\pi x}{2} = 0$   
 $2 \cos \frac{5\pi x}{2} \cos \frac{3\pi x}{2} = 0$

$\frac{3\pi x}{2} = \pi n, \frac{\pi x}{2} = \pi n,$   
 $3\pi x = \pi n,$   
 $\pi x = \pi n,$   
 $\frac{\pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n,$   
 $\frac{3\pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n,$

$n \in \mathbb{Z}$

$\begin{cases} x = \frac{2n}{3} \\ x = \frac{2n}{3} \\ x = \frac{2n}{3} \\ x = n \\ x = \frac{1}{3} + \frac{2n}{3} \\ x = \frac{1}{3} + \frac{2n}{3} \end{cases}$



N2

Доказать, что при  $f(x) = 2^{5-\frac{1}{x}} - \sin^2 x$  при любом  $x \neq 0$  выполняется неравенство  $f(x) > 33 - \varepsilon$ .

$\forall \varepsilon > 0$ . Найдем такое  $x$ , что  $\sin^2 x = -1$ , т.е.

$$2^x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \log_2\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$$

Заметим, что при любом  $x$  из этого ряда  $x \rightarrow +\infty$ . При этом  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{5-\frac{1}{x}} =$

$$= 2^5 = 32. \text{ Значит, } \forall \varepsilon > 0 \exists x_0 = x_0(\varepsilon), \text{ т.е.}$$

при любом  $x > x_0$   $2^{5-\frac{1}{x}} - 32 < \varepsilon$ . При  $x > 0$   $2^{5-\frac{1}{x}}$

$$< 2^5 = 32, \text{ т.е. } (1) \Leftrightarrow 32 - 2^{5-\frac{1}{x}} < \varepsilon \Leftrightarrow 2^{5-\frac{1}{x}} > 32 - \varepsilon.$$

Значит, для любого  $x_0$   $n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$ , т.е. для любого  $n \in \mathbb{Z}$  и  $n \geq 0$  (3). Тогда  $f(x) =$

$$= 2^{5-\frac{1}{x}} - \sin^2 x \geq 2^{5-\frac{1}{x}} + 1 > 33 - \varepsilon. \text{ Проверим}$$

еще одно неравенство. Пусть  $0 < x < 33$ , то  $a = 33 - \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ).

Тогда, по определению  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a$ , т.е.

$f(x) > 33 - \varepsilon = a$ , т.е. у  $\forall$   $x$   $f(x) > a$  для

любых  $x$ . Значит,  $a \geq 33$ .  
 Если  $a < 33$ , то  $a = 33 - \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ).  
 Тогда, по определению  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a$ , т.е.  
 $f(x) > 33 - \varepsilon = a$ , т.е. у  $\forall$   $x$   $f(x) > a$  для  
 любых  $x$ . Значит,  $a \geq 33$ .  
 Если  $a < 33$ , то  $a = 33 - \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ).  
 Тогда, по определению  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a$ , т.е.  
 $f(x) > 33 - \varepsilon = a$ , т.е. у  $\forall$   $x$   $f(x) > a$  для  
 любых  $x$ . Значит,  $a \geq 33$ .  
 Если  $a < 33$ , то  $a = 33 - \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ).  
 Тогда, по определению  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a$ , т.е.  
 $f(x) > 33 - \varepsilon = a$ , т.е. у  $\forall$   $x$   $f(x) > a$  для  
 любых  $x$ . Значит,  $a \geq 33$ .

$-\sin^2 x < 33$ , т.е.  $f(x) > 33$  не выполняется при  $x > 0$ .

Оценим: 33.

N6



$O_1, O_2$  - центры окружностей  $\omega_1, \omega_2$ .  
 $A, B$  - м-ка  $\omega_1$ . Заранее известно, что  $\omega_1$  и  $\omega_2$  касаются в точке  $P$ .  
 Пусть  $M$  - точка (ср.  $O_1 O_2$ ).

Доказать, что прямая  $PM$  является продолжением  $AB$  и  $CD$  (или  $EF$ ).  
 Пусть  $1$  и  $2$  - две окружности, касающиеся в точке  $P$ . Пусть  $A, B$  - м-ка  $\omega_1$ . Пусть  $C, D$  - м-ка  $\omega_2$ . Пусть  $M$  - точка (ср.  $O_1 O_2$ ).  
 Доказать, что прямая  $PM$  является продолжением  $AB$  и  $CD$  (или  $EF$ ).

Заметим, что прямая  $PM$  является продолжением  $AB$  и  $CD$  (или  $EF$ ).  
 Пусть  $1$  и  $2$  - две окружности, касающиеся в точке  $P$ . Пусть  $A, B$  - м-ка  $\omega_1$ . Пусть  $C, D$  - м-ка  $\omega_2$ . Пусть  $M$  - точка (ср.  $O_1 O_2$ ).  
 Доказать, что прямая  $PM$  является продолжением  $AB$  и  $CD$  (или  $EF$ ).

Решение

$$O_1A = O_1B = O_2A = O_2B = O_1O_2 \Rightarrow O_1AO_2B \text{ — ромб и } \angle AAO_2 = \angle BO_2B = \angle BO_1A = \angle AO_1B = \angle AOB = \angle BOA = 120^\circ, \angle AOB = \angle BOA = 120^\circ \Rightarrow \angle AOB = \angle BOA = 120^\circ \Rightarrow \angle AOB = \angle BOA = 120^\circ$$

$$\angle AOB = 120^\circ, \angle AOB = \angle BOA = 120^\circ \Rightarrow \angle AOB = \angle BOA = 120^\circ$$

$$\angle AOB = 120^\circ, \angle AOB = \angle BOA = 120^\circ \Rightarrow \angle AOB = \angle BOA = 120^\circ$$

$$\angle AOB = 120^\circ, \angle AOB = \angle BOA = 120^\circ \Rightarrow \angle AOB = \angle BOA = 120^\circ$$

$$\angle AOB = 120^\circ, \angle AOB = \angle BOA = 120^\circ \Rightarrow \angle AOB = \angle BOA = 120^\circ$$

$$\angle AOB = 120^\circ, \angle AOB = \angle BOA = 120^\circ \Rightarrow \angle AOB = \angle BOA = 120^\circ$$

$$\angle AOB = 120^\circ, \angle AOB = \angle BOA = 120^\circ \Rightarrow \angle AOB = \angle BOA = 120^\circ$$

$$\angle AOB = 120^\circ, \angle AOB = \angle BOA = 120^\circ \Rightarrow \angle AOB = \angle BOA = 120^\circ$$

$$\angle AOB = 120^\circ, \angle AOB = \angle BOA = 120^\circ \Rightarrow \angle AOB = \angle BOA = 120^\circ$$

$$\angle AOB = 120^\circ, \angle AOB = \angle BOA = 120^\circ \Rightarrow \angle AOB = \angle BOA = 120^\circ$$

$$\angle AOB = 120^\circ, \angle AOB = \angle BOA = 120^\circ \Rightarrow \angle AOB = \angle BOA = 120^\circ$$

$$\angle AOB = 120^\circ, \angle AOB = \angle BOA = 120^\circ \Rightarrow \angle AOB = \angle BOA = 120^\circ$$

$$\angle AOB = 120^\circ, \angle AOB = \angle BOA = 120^\circ \Rightarrow \angle AOB = \angle BOA = 120^\circ$$

$f(d)$ :



$f(d)$ :



$$\min_{d \in [0, R]} f(d) = f\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right) = R + \sqrt{R^2 + \frac{R^2}{3}} - \frac{R}{\sqrt{3}}$$

$$f(d) = R + \sqrt{R^2 + \frac{R^2}{3}} - \frac{R}{\sqrt{3}} = 2$$

$$= 2$$

В случае, если имеет место равенство, то 2 точки, расположенные на прямой, имеют расстояние  $AN = R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$  расстояние между ними  $2R \geq R \cdot \sqrt{3} > R \cdot (1 + \frac{\sqrt{3}}{2})$ , т.к.  $(1 + \frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{3}{2} + \sqrt{3} < \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}} = 3$ , т.е.  $1 + \frac{\sqrt{3}}{2} < \sqrt{3}$ .

Ответ: 2.

