


0 727338 470007

72-73-38-47
(160.5)



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников "Ломоносов"
наименование олимпиады

ПО МАТЕМАТИКЕ
профиль олимпиады

Кудряшова Александра Сергеевна
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата
«13» апреля 2025 года

Подпись участника
Куд

72-73-38-47
(160.5)

Числовые 1/9

$$\sqrt{\log_2^2 x + 3 \log_2 x - 4} - \sqrt{\log_2^2 x + 3 \log_2 x - 4} \geq \log_2 x + 1$$

Подкоренные выражения должны быть ≥ 0 , так $x > 0$

$$\log_2^2 x + 3 \log_2 x - 4 = (\log_2 x - 1)(\log_2 x + 4) \geq 0$$

невозможны интервалы: нули: $\begin{cases} \log_2 x = 1 \\ \log_2 x = -4 \end{cases}$

$$\log_2 x \in (-\infty; -4] \cup [1; +\infty)$$

Значит, что ил. $\log_2^2 x + 3 \log_2 x - 4 \geq 0 \Rightarrow \log_2^2 x + 3 \log_2 x \geq 4$,

$$\text{тогда } \log_2^2 x + 3 \log_2 x > \sqrt{\log_2^2 x + 3 \log_2 x - 4} > \sqrt{\log_2^2 x + 3 \log_2 x - 4}$$

~~возведём в квадрат, ил. квадрат~~

$$\log_2^2 x + 3 \log_2 x - \sqrt{\log_2^2 x + 3 \log_2 x - 4} > 0$$

на ∞

① Пусть $\log_2 x \leq -1$, тогда $\log_2 x + 1 \leq 0$

удовлетворяет условию при всех $\log_2 x \in \infty$

Но если $\log_2 x$ равен отрицательному числу, x — не целое $\Rightarrow$ не подходит (нужно выбрать только целые значения $x \cdot 16$)
и все значения подставляем

$$1) \log_2 x = -4 \Rightarrow x = \frac{1}{2^4}$$

$$x \cdot 16 = 1 \text{ не подходит}$$

$$2) \log_2 x = -5 \Rightarrow x = \frac{1}{2^5}$$

$$x \cdot 16 = \frac{1}{2} \text{ не подходит}$$

при меньших значениях логарифма $x \cdot 16$ будет еще меньше

② Пусть $\log_2 x \geq -1$, тогда $\log_2 x + 1 \geq 0$. Возведём в квадрат обе части неравенства, ил. ≥ 0

$$\log_2^2 x + 3 \log_2 x - \sqrt{\log_2^2 x + 3 \log_2 x - 4} \geq \log_2^2 x + 2 \log_2 x + 1$$

$$\log_2 x - 1 \geq \sqrt{\log_2^2 x + 3 \log_2 x - 4}$$

Понимать, что правая часть ≥ 0 , левая должна быть $\geq 0 \Rightarrow \log_2 x \geq 1$

$$\text{Снова вводим: } \log_2^2 x - 2 \log_2 x + 1 \geq \log_2^2 x + 3 \log_2 x - 4$$

$$5 \log_2 x \leq 5$$

$$\log_2 x \leq 1$$

$$\boxed{\log_2 x = 1}$$

$$x = 2$$

$$x \cdot 16 = 32$$

$$32 + 1 = 33$$

Продукт таких x . нам

Ответ: 33

85 (восемьдесят)
пять

Численик 2/9

$$\sqrt{\sqrt{\cos x} + 2\sqrt{-3\sin x}} > 2\sqrt{\sqrt{\cos x} - \sqrt{-3\sin x}} \quad | \cdot 12$$

$$\sqrt{\cos x} + 2\sqrt{-3\sin x} > 4\sqrt{\cos x} - 4\sqrt{-3\sin x}$$

$$\sqrt{\cos x} < 2\sqrt{-3\sin x} \quad | \cdot 12$$

$$\cos x < -12\sin x \quad | \cdot 12$$

$$\cos^2 x \leq 144\sin^2 x \quad | +144\cos^2 x$$

$$145\cos^2 x \leq 144$$

$$\cos^2 x \leq \frac{144}{145}$$

$$\begin{cases} \cos x \leq \frac{12\sqrt{145}}{145} \\ \cos x \geq \frac{3\sqrt{10}}{10} \end{cases} \Rightarrow \cos x \in \left[\frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{12\sqrt{145}}{145} \right]$$

Обс: $\cos x \geq 0$
 $\sin x \leq 0$

$$\sqrt{\cos x} \geq \sqrt{-3\sin x}$$

$$\cos x \geq -3\sin x$$

$$\cos^2 x \geq 9\sin^2 x$$

$$1 = \cos^2 x + \sin^2 x, 10\sin^2 x$$

$$\sin^2 x \leq \frac{1}{10} \quad \cos^2 x \geq \frac{9}{10}$$

$$|\sin x| \leq \frac{\sqrt{10}}{10} \quad 13. \cos x \geq \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

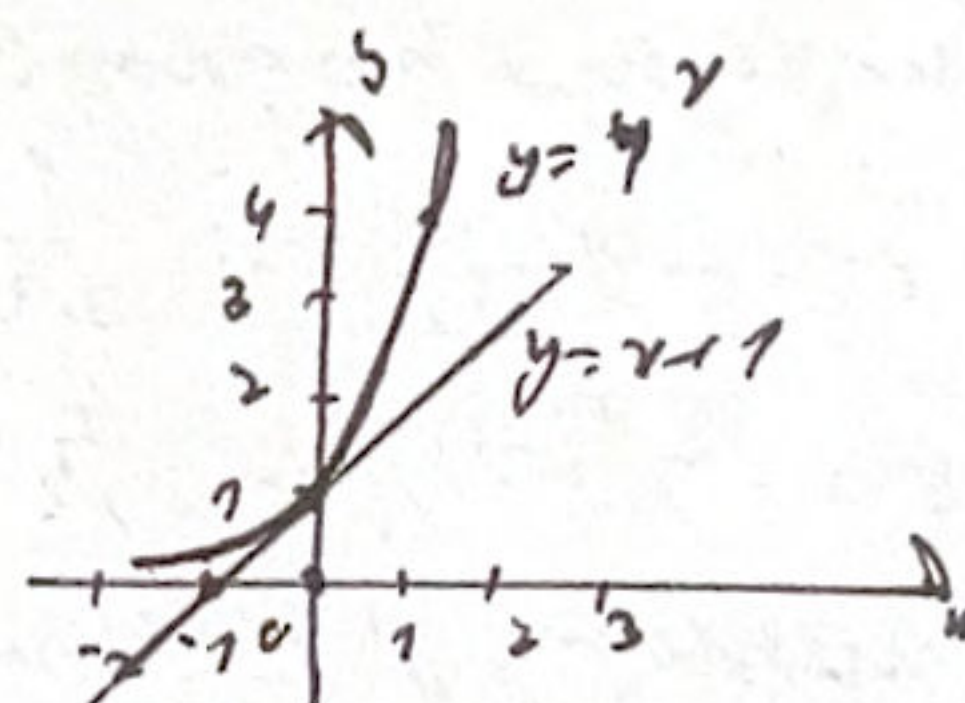
$$0 \geq \sin x \geq -\frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$x \in \left[-\arccos \left(\frac{3\sqrt{10}}{10} \right) + 2\pi n; -\arccos \left(\frac{12\sqrt{145}}{145} \right) + 2\pi n \right]$$

Ответ: $x \in \left[-\arccos \left(\frac{12\sqrt{145}}{145} \right) + 2\pi n; -\arccos \left(\frac{3\sqrt{10}}{10} \right) + 2\pi n \right]; n \in \mathbb{Z}$

$$|x+1-9| + |y^x-9| = y^x - x - 1$$

Левая часть $\geq 0 \Rightarrow y^x - x - 1 \geq 0$
 $y^x \geq x+1$ (на графике)



Равенство достигается при $x=0$. $4^0=1; 0+1=1$

При $x < 0$ $y^x < 1$.
 Тригонометрические функции $(0|1)$, или $(y^x)^1$ при $x=0$
 равны 1, или $(x)^1$

Потому $y^x - x - 1 \geq 0$ выполняется $y^x \geq x+1$

тогда $y^x - 9 \geq (x+1) - 9$

① При $x+1-9 \geq 0$
 $x \geq 8$
 $y^x - 9 \geq x+1-9 = x-8$
 $y^x \geq x-1$
 $y^x = 9$

② При $x+1-9 < 0$
 $x < 8$
 $y^x - 9 \leq 0$
 $x+1$

72-73-38-47
(160.5)

Умножил 3/9

~~1) При $x \neq 0$ $a \neq 0$~~
 ~~$a \neq 0$~~
 ~~$x-1-a+y^x-1 = y^x-x-1$~~
 ~~$a=y^x$~~

2

1) При $x+1-a > 0$ (тогда $y^x-1 > 0$)
 $a < x+1$
 $x+1-a+y^x-1 = y^x-x-1$
 $a = x+1$ не верно

2) При $y^x-1 < 0$ (тогда $x < -1$)
 $a > y^x$
 $-x-1-a+y^x-1 = y^x-x-1$
 $a = y^x$ не верно

3) При $x+1-a \leq 0$
 $y^x-1 \geq 0$
 $y^x \geq a > x+1$

2

Итак, мы выяснили, что единственное значение a , которое удовлетворяет условию $a \in [x+1, y^x]$

2 $-x-1+a+y^x-1 = y^x-x-1$
 $0=0$ верно

2

Это верно и в обратном направлении: для любого ненулевого значения a и x такое, что $y^x \geq a > x+1$, то x - корень уравнения $x+1-a+y^x-1 = y^x-x-1$

~~Поэтому, что если $x < -1$, то $y^x < a > x+1$~~

Найдем минимальное a , для которого уравнение имеет корни на $[-1, 1]$

1) $a=0$, при $x > -1$ $a > x+1$ неверно, $x=-1$ - корень (единственный на $[-1, 1]$)

2) $a=y$, при $x < 1$ $y^x \geq a$ неверно, $x=1$ - единственный корень на $[-1, 1]$

~~3) $a=1$, при $x > 0$ $a > x+1$ неверно на $[-1, 1]$~~

~~при $a > y$ $y^x > a$ неверно на $[-1, 1]$~~

~~при $y > a > 0$ для любого x не существует a , где $a \in [x+1, y^x]$~~

2

3) $a=1$ - можно показать графиком $y=y^x$ и $y=x+1$ на промежутке $[-1, 1]$

найдем еще одно значение a : единственное: при $x=0$: $y^0=1 \geq a \geq 0+1=1$

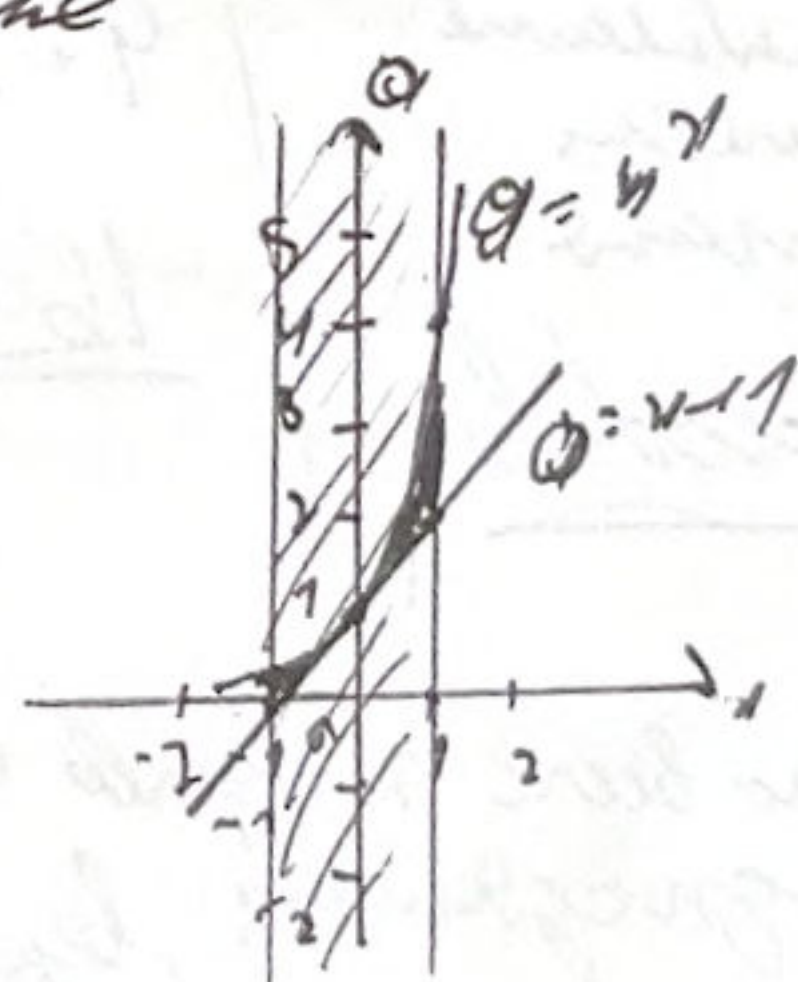
при $x > 0$ $x+1 \leq a$ неверно, при $x < 0$ $y^x \geq a$ неверно

В целом корень можно найти непосредственно из графика:

Значение решения - показатель степени, значение которого равно a (или $a-1$), когда $y^x = a$ (или $y^x = a-1$)

1 корень: $a=y$; $a=1$ и $a=0$

Ответ: $a \in \{0, 1, y\}$



NS

~~it includes the lower division~~

~~Вопрос~~ Если представить себе, что мы берем
ураг, а переносим его туда, где не будет
нужно урагана (возмущение, с 2 вершинами)
Каковы



Синимолд, келсе, тузун
исоседина уунада
чечендине келетин.

Капнуго бе бажуомноу уагоу. 4 год. Капнуго векумано агуен.

[illegible]

$$4 \cdot 2 = 8$$

Kaspiabereine
in einem
Zuhause

Succinob



Учредил ~~благотворительство~~^{учреждение}
на содержание уч-
ных книг и
(предназначенных
для учения детей),
не зная и не имея
зачиненных нарав-
ление коз, учив

$$4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

16 curcads



in order to be more
~~more~~ by

$$\frac{4 \cdot 6}{2} = 12$$

[illegible]

12-20-24

24 milder

$$\frac{40}{4096} = \frac{10}{1024} = \frac{5}{512}$$



интерес в жизни
всего в мире

$$4 \cdot (2 \cdot 3 + 1 \cdot 2) = 16$$

normale (gymnos),
cyrenen naupliiden
b r puzg > ; 16.2=32

32 enclos

Answer: $\frac{5}{512}$

Учебник 5/9

№

Значит, все суперсоставные числа оканчиваются на 9.
 Действительно, если бы происходил переход через разряд,
 сумма цифр была бы нечетной, так как сумма цифр 1-го
 разряда была бы нечетной, а сумма цифр 2-го разряда
 была бы четной, и т.д. Значит, все
 числа должны иметь четную сумму цифр, и в. ч. цифр должно
 быть четным. Сравним сумму цифр. Могут быть: суперсостав-
 ные числа имеют четную сумму цифр и оканчиваются на 9,
 значит, то ~~число~~ 9 — самая большая цифра, и может
 быть произведено только одно число: 9. Могут быть и другие
 числа, но тогда было бы составное. Тогда на примере
 [100; 999] составные числа, которые могут быть супер-
 составными:

459	549	639	729	819	909
+1	460	<u>550</u>	640	730	820
			730	820	910

Из них только одно суперсоставное: 549

Теперь для четных составных чисел:

При умножении единиц к числу вида 10^k оно
 становится числом вида $10^k \cdot 10^m$. Если оно составное,
 то и число $(k+1)$ — составное, или нечетное 0.

~~Каждое составное число оканчивается на 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90~~
 составные не оканчиваются на 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90;

101, 110, 112, 121, 123, 132, 134, 143, 145, 154, 156, 165, 167, 176, 178;
 187, 189, 198, 202, 211, 213, 220, 224, 231, 235

Первое число 101 — все действительно.

Значит, все же число 143 является составным, не
 так как сумма цифр была бы нечетной (1-1) будет < 9 (число 110, не
 число 1099 не составное => не составное)

145 составное, и (1449) составное и (1450) составное

~~154 не составное~~

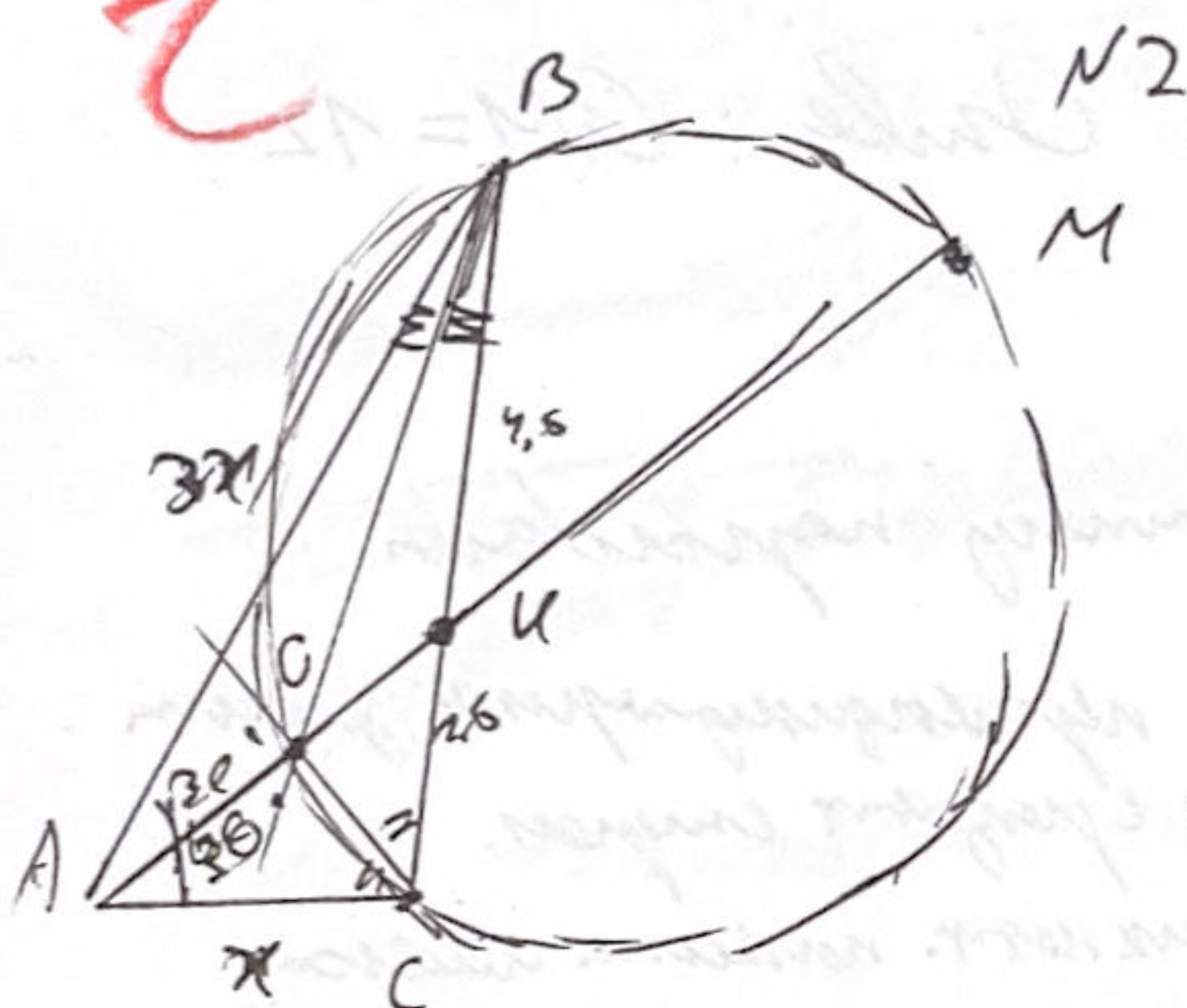
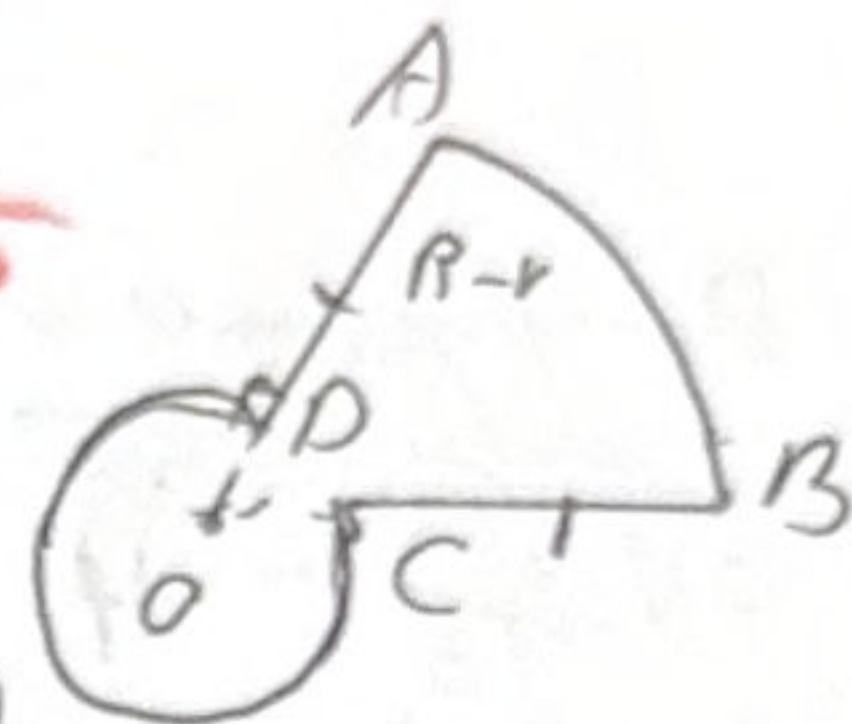
Воспользуемся тем, что составные все же, увеличивая на 1 из
 каждого числа и цифр будет 9. Это (145); (154); (1235)

(156); (165) тоже составные, и $(9+1) = 5+6-1 = 10$

Далее все же не оканчиваются на 167 до 198 являются составными и составными,
 и.ч. сумма цифр была > 9, и сумма цифр была < 10 = 9+1, число 198 = 9+9-1,
 и.ч. все числа являются. и.ч. есть (переход через разряд не)

Yumbum 7/9

Если AD и BC не пересекаются;
сумма квадратов не равна нулю, т.е.
по мере движения центра тяжести
квадрата $R \rightarrow r$. Пусть $AB = (x)$, $CD = (x) - x$



Do b-by successfull (agents to π > k)

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

Ученик 8/9

$$D - \text{средняя линия треугольника: } AK = \sqrt{AB \cdot AC - BK \cdot CK} = \sqrt{3 \cdot 4 - 1.5 \cdot 1.5} =$$

$$= \sqrt{\frac{3 \cdot 4}{13} - \frac{2.25}{13}} = 3 \sqrt{\frac{12 - 3}{13 \cdot 4}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{9}{13}} = \frac{9}{2\sqrt{13}}$$

$$D - \text{б-го медианой в } \triangle ACK: \frac{AO}{OK} = \frac{AC}{CK} = \frac{4}{1.5} = \frac{8}{3}$$

$$AO = \frac{8}{11} AK$$

$$AK = AO + OK = OK \left(1 + \frac{8}{3} \right) = \frac{9}{11} OK$$

$$OK = \frac{9 \cdot \sqrt{13}}{2 \cdot \sqrt{13} (\sqrt{13} + 4)} = \frac{9}{2(\sqrt{13} + 4)}$$

Для симметричности верши, но $CK \cdot BK = OK \cdot MK$

$$\frac{1.5 \cdot 1.5}{\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}} = \frac{9}{2(\sqrt{13} + 4)} \cdot MK$$

$$\frac{3}{2} \cdot (\sqrt{13} + 4) = MK$$

$$\text{Итого } CM = MK + OK = \frac{3(\sqrt{13} + 4)}{2} + \frac{9}{2(\sqrt{13} + 4)} =$$

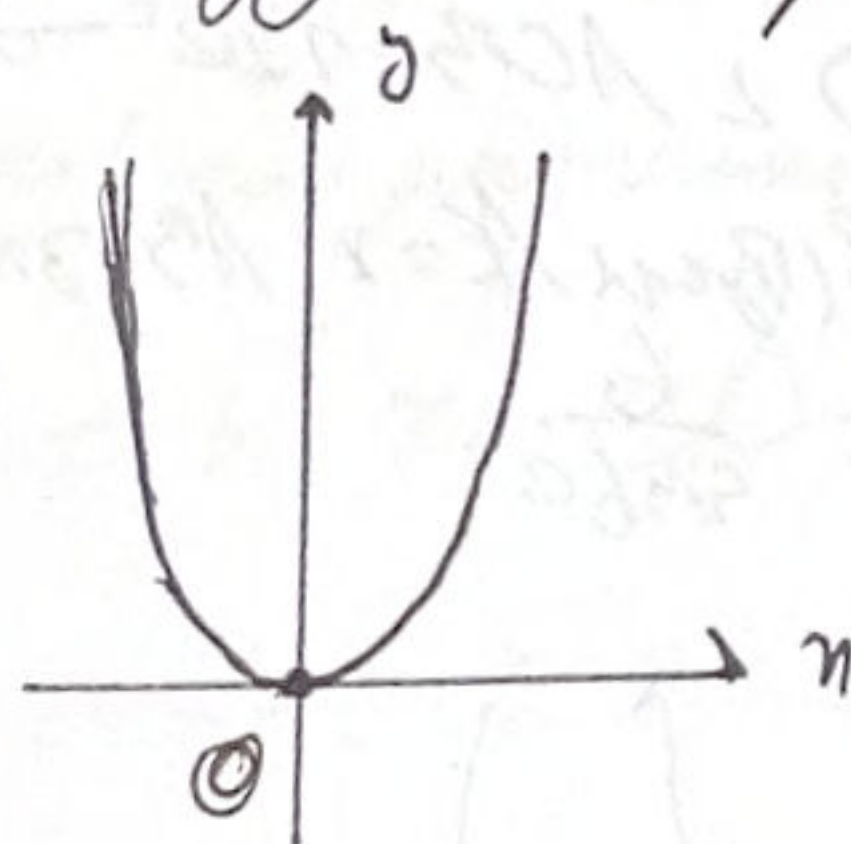
$$= \frac{3(\sqrt{13} + 4)^2 + 9}{2(\sqrt{13} + 4)} = \frac{3(13 + 16 + 8\sqrt{13}) + 9}{2(\sqrt{13} + 4)} = \frac{96 + 24\sqrt{13}}{2(\sqrt{13} + 4)} =$$

$$= \frac{24(4 + \sqrt{13})}{2(\sqrt{13} + 4)} = 12$$

Ответ: $CM = 12$

N6

Проведу ось координат через вершину параболы



Есть касательные перпендикулярны, значит от центра параболы отрезки перпендикулярны.

Вспомогательная окружность и ее радиус известен

для знака, от, как известно, или уравнение $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2 \perp$, но $k_1 \cdot k_2 = -1$

Итого все точки A, B, C лежат на окружности.

А для параболы заданной функцией $y = kx^2$

Две касательные: $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$
касательная к окружности от C касательная к параболе от O

Умножим 9/9

$$\begin{cases} Kx^2 = K_1x + b_1 \\ -Kx^2 = K_2x + b_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Kx^2 - K_1x - b_1 = 0 \\ Kx^2 + K_2x - b_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} D_1 &= K_1^2 + 4b_1K = 0 \\ D_2 &= K_2^2 - 4b_2K = 0 \end{aligned}$$

или 1 корень

$$b_1 = -\frac{K_1^2}{4K} \quad b_2 = \frac{K_2^2}{4K}$$

$$b_1 \cdot b_2 = -\frac{(K_1 \cdot K_2)^2}{16K^2} = -\frac{1}{16K^2}$$

Каждый метр пересечетя этих касательных

$$y = K_1x + \frac{K_1^2}{4K}$$

$$y = K_2x + \frac{K_2^2}{4K}$$

$$K_1x - \frac{K_1^2}{4K} = K_2x + \frac{K_2^2}{4K}$$

$$(K_1 - K_2)x = \frac{K_1^2 + K_2^2}{4K}$$

$$x = \frac{K_1^2 + K_2^2}{4K(K_1 - K_2)}$$

$$y = \frac{K_1^3 + K_1K_2^2 - K_1^3 + K_1^2K_2}{4K(K_1 - K_2)} = \frac{K_1K_2(K_1 + K_2)}{4K(K_1 - K_2)} = \frac{-(K_1 + K_2)}{4K(K_1 - K_2)}$$

~~Значит, по x и y~~

~~$$\begin{aligned} \text{Значит, по } x \text{ и } y \text{ (или } K_1 \text{ и } K_2) \\ y = \frac{K_1^2 + K_2^2 - K_1^2 - K_1K_2}{4K(K_1 - K_2)} = \frac{K_2^2 - K_1K_2}{4K(K_1 - K_2)} \end{aligned}$$~~

Пусть перед тем, что их касательные $\perp$ - $x = \frac{K_1^2 + K_2^2}{4K(K_1 - K_2)}$

где $K_1 \cdot K_2 = -1$ - преобразованная пара
($K_1 > 0$); ($K_2 < 0$)

$$y = \frac{-(K_1 + K_2)}{4K(K_1 - K_2)}$$

$$x = \frac{K_1^2 + \frac{1}{K_1^2}}{4K(K_1 + \frac{1}{K_1})} = \frac{K_1^4 + 1}{4KK_1(K_1^2 + 1)}$$

$$y = \frac{-(K_1 - \frac{1}{K_1})}{4K(K_1 + \frac{1}{K_1})} = \frac{1 - K_1^2}{4K(K_1^2 + 1)}$$

Черновик

$$\sqrt{\log^2 x + 3 \log x} - \sqrt{\log^2 x + 3 \log x - 4} \geq \log x + 1 \quad x \geq 0$$

$$\frac{(\log x - 1)(\log x + 4)}{\log x + 1}$$

$$\log^2 x + 3 \log x - \sqrt{(\log x - 1)(\log x + 4)} \geq \log x + 1$$

$$\log x \geq \sqrt{\log x + 2 \log x - 4} + 1$$

$$\log x \geq \log$$

$$\log^2 x - 2 \log x + 1 \geq \log x + 3 \log x - 4$$

$$5 \log x \leq 5$$

$$\log x \leq 1$$

$$x+1-9 \leq 0$$

$$9x+1$$

$$9-x-1+9-4=4^2 \cdot x-1$$

$$9=4^2$$

$$2.5 \cdot 1.5 = 0.4 \cdot 1.4$$

$$K_1 K_2 = -1 \rightarrow \perp$$

$$A \quad x_1 \log$$

$$3x$$

$$y = \log x$$

$$y = K_1 x$$

$$\sqrt{\cos x + 2\sqrt{-3 \sin x}} > 2\sqrt{\cos x} - \sqrt{-3 \sin x}$$

$$\cos x \geq 0$$

$$\sin x \leq 0$$

$$\sin x = \frac{3}{4}$$

$$\sin x = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{4} + 1 = 1 \frac{1}{4}$$

$$4 \geq 1 + 1 = 2$$

$$\sin x \cdot \cos x - \cos x \cdot \sin x = 3 \sin x$$

$$-\frac{1}{2}$$

$$3.5 \sin^2$$

$$7 \sin^2 = \sqrt{3} \cos^2$$

$$10 \cos^2 x > 9$$

$$\cos^2 x > \frac{9}{10}$$

$$\cos x > \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$4 \sin^2 x = 3 \cos^2 x$$

$$52 \sin^2 x = 3$$



$$\frac{6}{x} = \frac{y}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{12\sqrt{52}}{52} = \frac{3\sqrt{52}}{13}$$



$$1 > 4 \sin^2 x$$

$$\sin^2 x < \frac{1}{4}$$

$$|\sin x| < \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{\cos x + 2\sqrt{-3 \sin x}} > 4\sqrt{\cos x} - 4\sqrt{-3 \sin x}$$

$$3\sqrt{\cos x} < \frac{1}{2}\sqrt{-3 \sin x}$$

$$\cos x < -12 \sin x$$

$$\cos^2 x < 144 \sin^2 x$$

$$1 < 144 \sin^2 x$$

$$\sin^2 x = \frac{3}{52}$$

$$\cos^2 x = \frac{49}{52}$$

$$\cos x = \frac{7\sqrt{52}}{52}$$

$$|\sin x| > \frac{1}{\sqrt{148}}$$