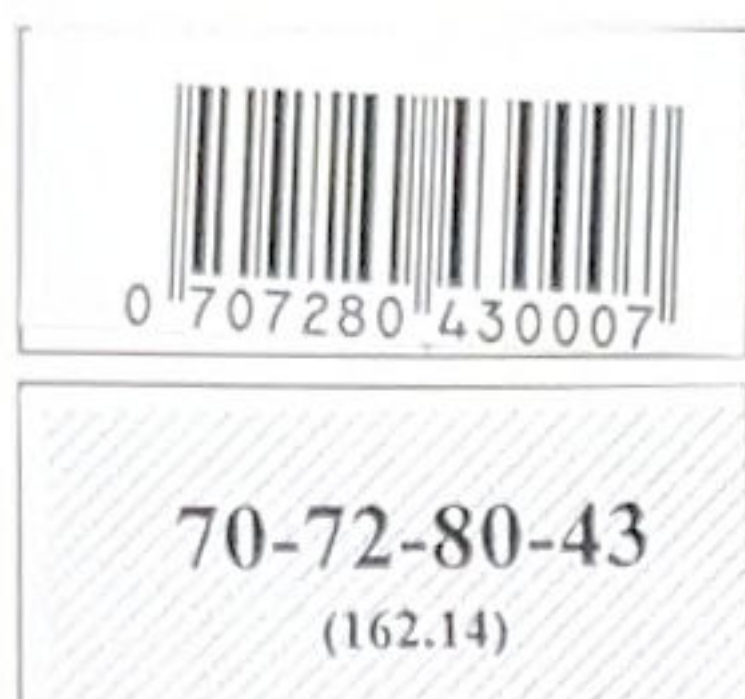




МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10

14⁰⁷ - 14¹⁰

Место проведения Краснодар
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Косточка Захара Андреевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«13» апреля 2025 года

Подпись участника

[Signature]

Числовый

55 (пятьдесят пять)

Задача 1: $\sqrt{\log_2^2 x + 3 \log_2 x} - \sqrt{\log_2^2 x + 3 \log_2 x - 4} \geq \log_2 x + 1$
 Пусть $\log_2 x = y$, тогда условие

$$\sqrt{y^2 + 3y} - \sqrt{y^2 + 3y - 4} \geq y + 1$$

$$1) y^2 + 3y - 4 \geq 0$$

$$(y-1)(y+4) \geq 0$$

$$\begin{cases} y \geq 1 \\ y \leq -4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$2) y^2 + 3y - \sqrt{y^2 + 3y - 4} \leq 0$$

$$y^2 + 3y = z \geq 4 \text{ из (1)}$$

$$z \geq \sqrt{z-4} \geq 0$$

$$z^2 - z + 4 \geq 0$$

$$D = 1 - 16 = -15 < 0$$

$\Rightarrow$ (2) выполнено всегда

$$3) \text{ Для } y \geq 1: y^2 + 3y - \sqrt{y^2 + 3y - 4} \geq y^2 + 2y + 1 \text{ (т.е. } y+1 \leq 2)$$

$$y - 1 \geq \sqrt{y^2 + 3y - 4} \quad (y-1 \geq 0)$$

$$y^2 - 2y + 1 \geq y^2 + 3y - 4$$

$$5y \leq 5$$

$$y \leq 1, \text{ но } y \geq 1$$

$$\Rightarrow y = 1$$

4) для $y \leq -4$ левая часть ^{из кал.} неравенства ≥ 0 ,

$$\text{а } y+1 \leq -3, \text{ т.е. } y+1 \leq -3 < 0 \leq \sqrt{y^2 + 3y} - \sqrt{y^2 + 3y - 4}$$

$\Rightarrow y \leq -4$ подходит.

$$\text{итого: } \begin{cases} y=1 \\ y \leq -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ 0 < 16x \leq 1 \end{cases}, \text{ тогда } \begin{cases} 16x = 32 \\ 0 < 16x \leq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{нужная сумма} = 32 + 1 = 33$$

Ответ: 33

Числовый

Задача 3. $\sqrt{\cos x} + 2\sqrt{-3\sin x} \geq 2\sqrt{\cos x} - \sqrt{-3\sin x}$

ОДЗ:

$\cos x \geq 0$
 $\sin x \leq 0 \Rightarrow \sqrt{\cos x} + 2\sqrt{-3\sin x} \geq 0$

$\sqrt{\cos x} - \sqrt{3}\sqrt{-\sin x} \geq 0$

$\sqrt{\cos x} \geq \sqrt{3}\sqrt{-\sin x}$

$\cos x \geq -3\sin x$ ($\sin x \neq 0$, т.к. $\sqrt{\cos x} \neq 2\sqrt{\cos x}$)

$\operatorname{ctg} x \leq -3$

$\sqrt{\cos x} + 2\sqrt{3}\sqrt{-\sin x} \geq 4\sqrt{\cos x} - 4\sqrt{3}\sqrt{-\sin x}$

$2\sqrt{3}\sqrt{-\sin x} \geq \sqrt{\cos x}$

$-12\sin x \geq \cos x$

$\operatorname{ctg} x \geq -12$

тогда $\begin{cases} \operatorname{ctg} x \leq -3 \\ \operatorname{ctg} x \geq -12 \end{cases}$

Ответ: $x \in \mathbb{R} \setminus \text{аргументы}$

$x \in \mathbb{R} \setminus [-\arccos 3; -\arccos 12 + 2\pi k]$, где $k \in \mathbb{Z}$

Задача 4: $-1 \leq x \leq 1$; $|x+1-a| + |4^x - a| = 4^x - x - 1$

~~$|x+1-a| + |4^x - a| \leq 4^x - x - 1$~~

$|x+1-a| + |a - 4^x| \geq |x+1-a+a-4^x| \geq 4^x - x - 1$

т.е. $4^x - x - 1 \geq 0$ и $|x+1-a|$; $|4^x - a|$ ~~не могут~~
~~разные знаки~~ (раскрываются с разными знаками)

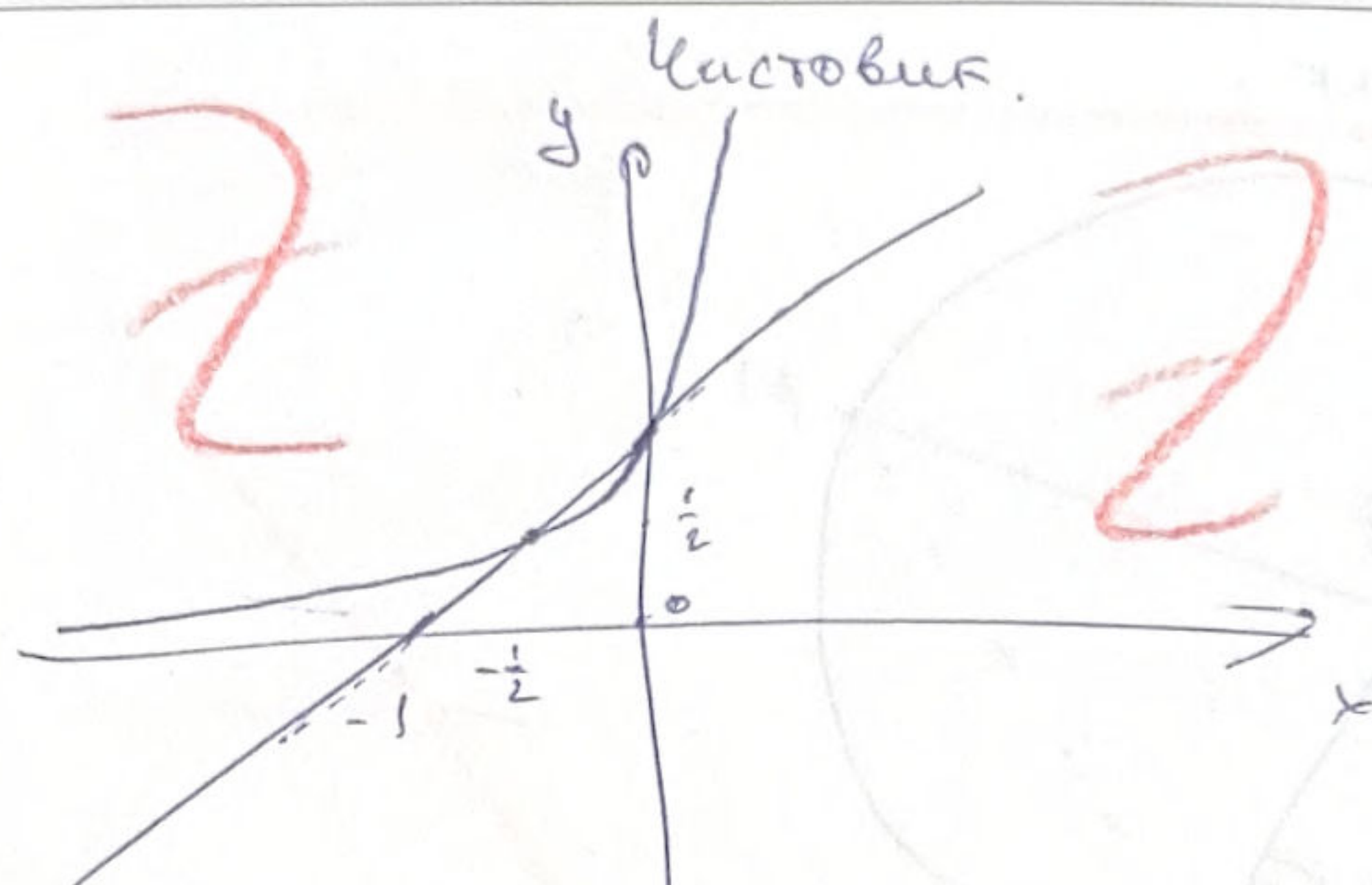
т.е. либо (1) $x+1 \leq a \leq 4^x$

либо (2) $4^x \leq a \leq x+1$,

но тогда $4^x - x - 1 \leq 0$, но $4^x - x - 1 \geq 0$

$\Rightarrow 4^x - x - 1 = 0$, позже разберем это в (к)

(1) Заметим, что $4^x = x+1$ в $x = -\frac{1}{2}$; ~~иметь~~
 график показательной функции может максимум
 2 общ. точки с прямой, тогда график всегда
 вот так:



из графика видно!

Для $a \in \cancel{(0; 1/2)} \cup (0; 1/2) \setminus \{0\}$ в левой окрестности, причем не один, для $a \in (1; +\infty)$ аналогично в правой, а для $a \in (1/2; 1)$ не выполнено $4^x \geq x + 1$;

Очевидно, что $a = 0; 1/2; 1$ подходят. т.к.

для $a = 0$ $0 \geq x + 1$, но $x \geq -1 \Rightarrow x = -1$

для $a = 1/2$ для $x < -1/2$; $a > 4^x > x + 1$

для $x > -1/2$ $a < 4^x < x + 1$

в $x = -1/2$ $4^x = x + 1$, т.е. $4^x \geq a \geq x + 1$

для $a = 1$ $1 \geq x + 1$, но $x + 1 \geq 1$ (т.к. $x \geq 0$)
 $\Rightarrow x = 0$

Ответ: $0; 1/2; 1$

Задача 6: Воспользуемся геометрическим определением параболы и её свойствами

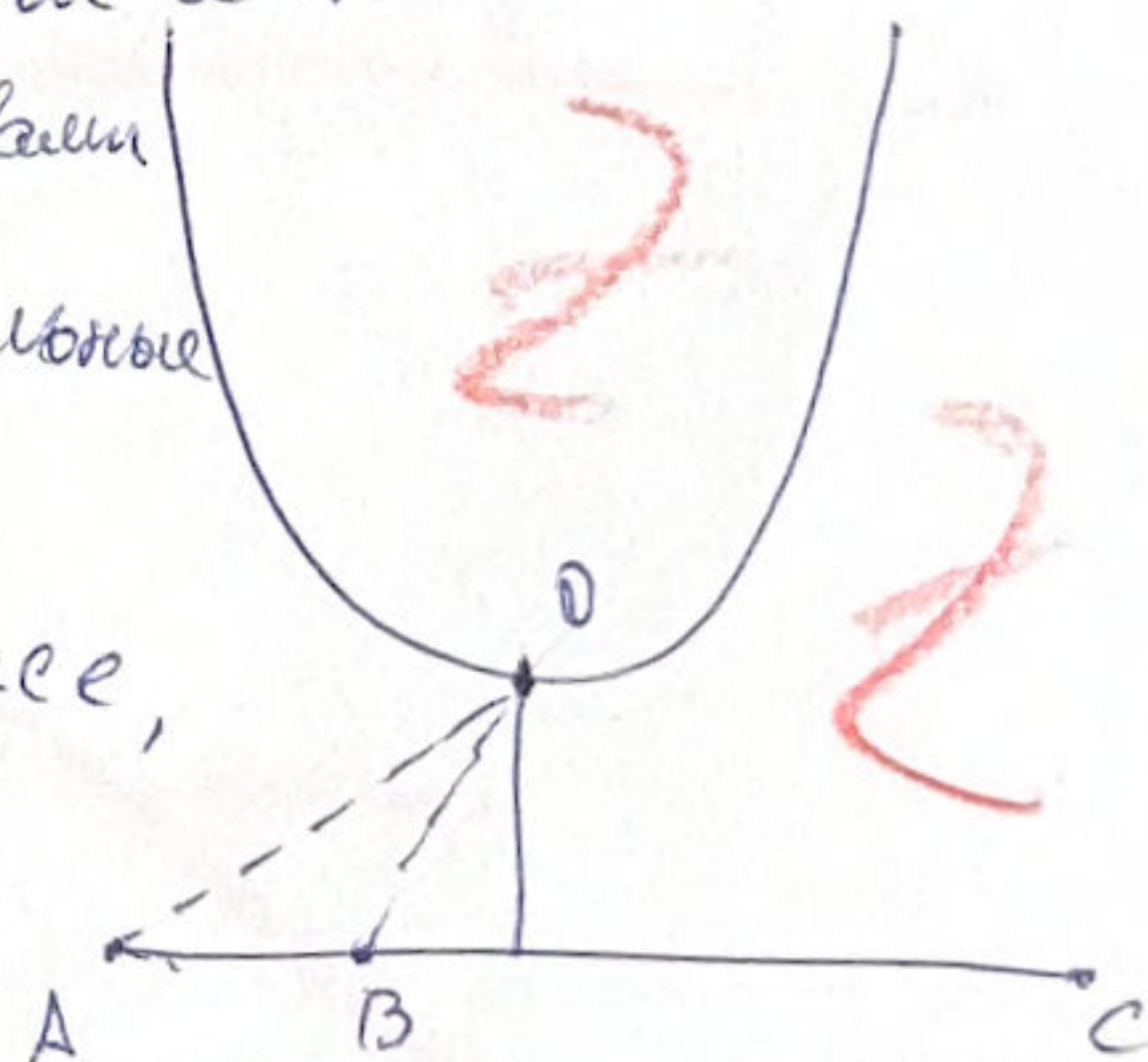
По признаку, т.к. из A, B, C касательные к параболе перпендикулярны, то

~~AB = AC = AB, C~~ - лежат на дуге окружности, т.е. коллинеарны.

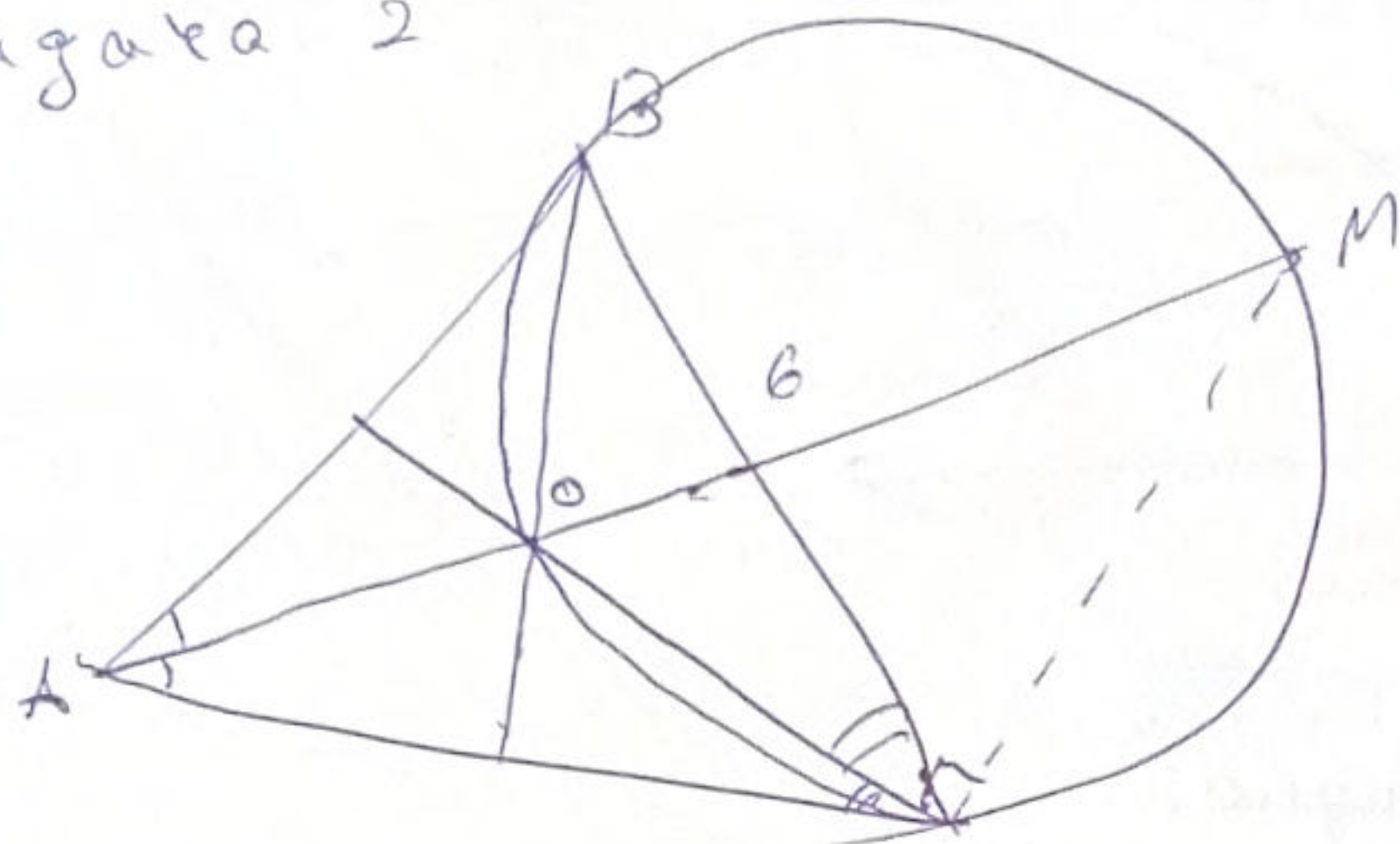
тогда $AB = AC - BC = 4 - 3 = 1$,

по формуле $S_{ABO} = \frac{AB \cdot h}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$

Ответ: 1



Чистовик.
Задача 2



$$\angle BOM = 30^\circ + \frac{\angle ABC}{2} \quad \text{как внешн}$$

причем $\angle BOM = \angle BCM$ как внешне.

$$\text{тогда } \angle OCM = \angle BCO + \angle BCM = 30^\circ + \frac{\angle ABC}{2} + \frac{\angle BCA}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

т.е. OM — диаметр. $OM = 2R$

$$\angle BOC = 180^\circ - \frac{\angle ABC}{2} - \frac{\angle BCA}{2} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\Rightarrow \text{по т. синусов. } 2R = \frac{6}{\sin 120^\circ} \Rightarrow R = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow OM = 2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

Ответ: $4\sqrt{3}$

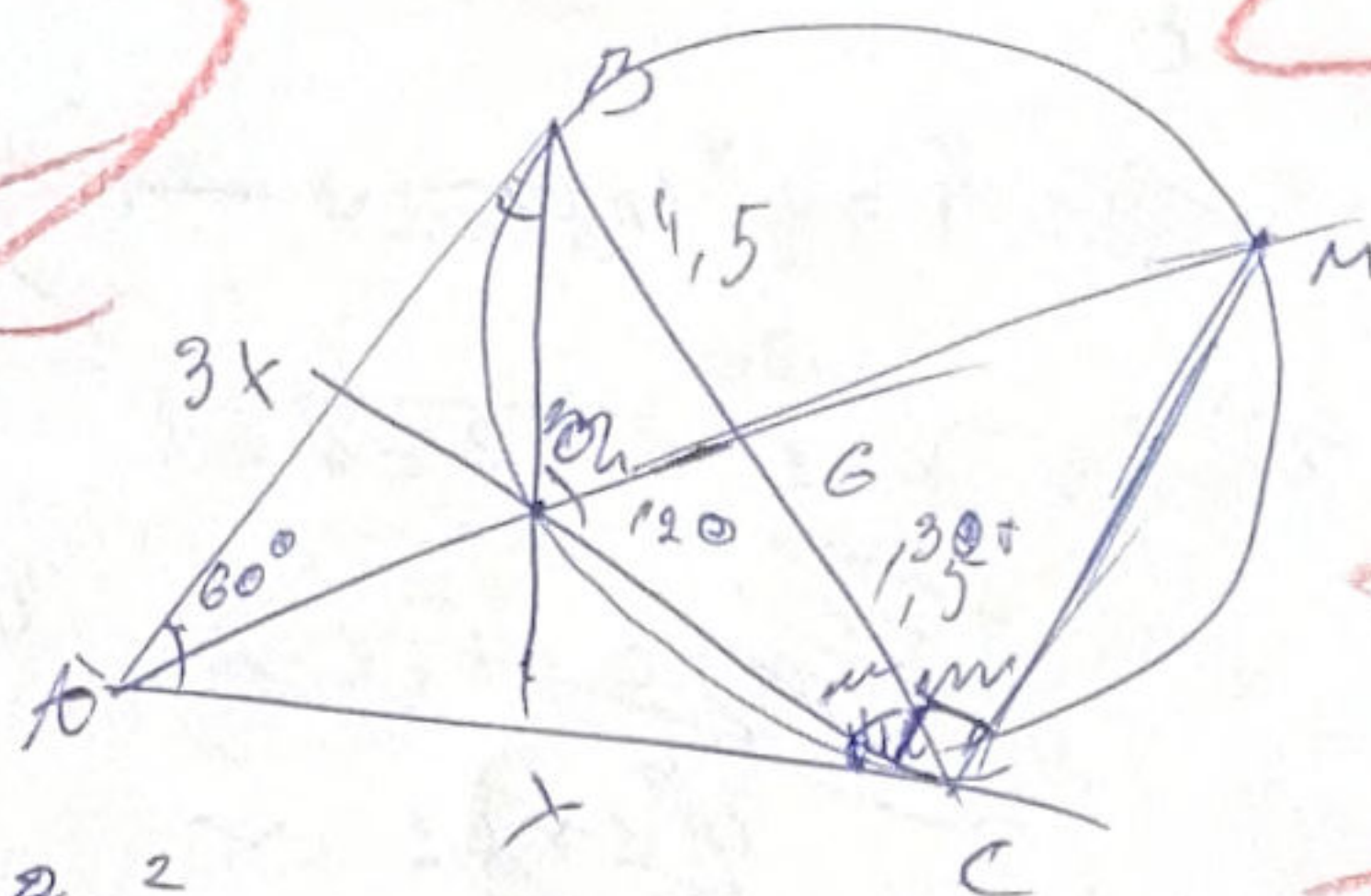
чертovsky.

$$y_2 = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12$$

$$y_3 = \frac{6 \cdot 4 \cdot 4}{3} = 32$$

$$y_4 = y_2$$

$$\sum \frac{1}{2} = 90^\circ$$



$$36 = x^2 + 9x^2 - 8x^2$$

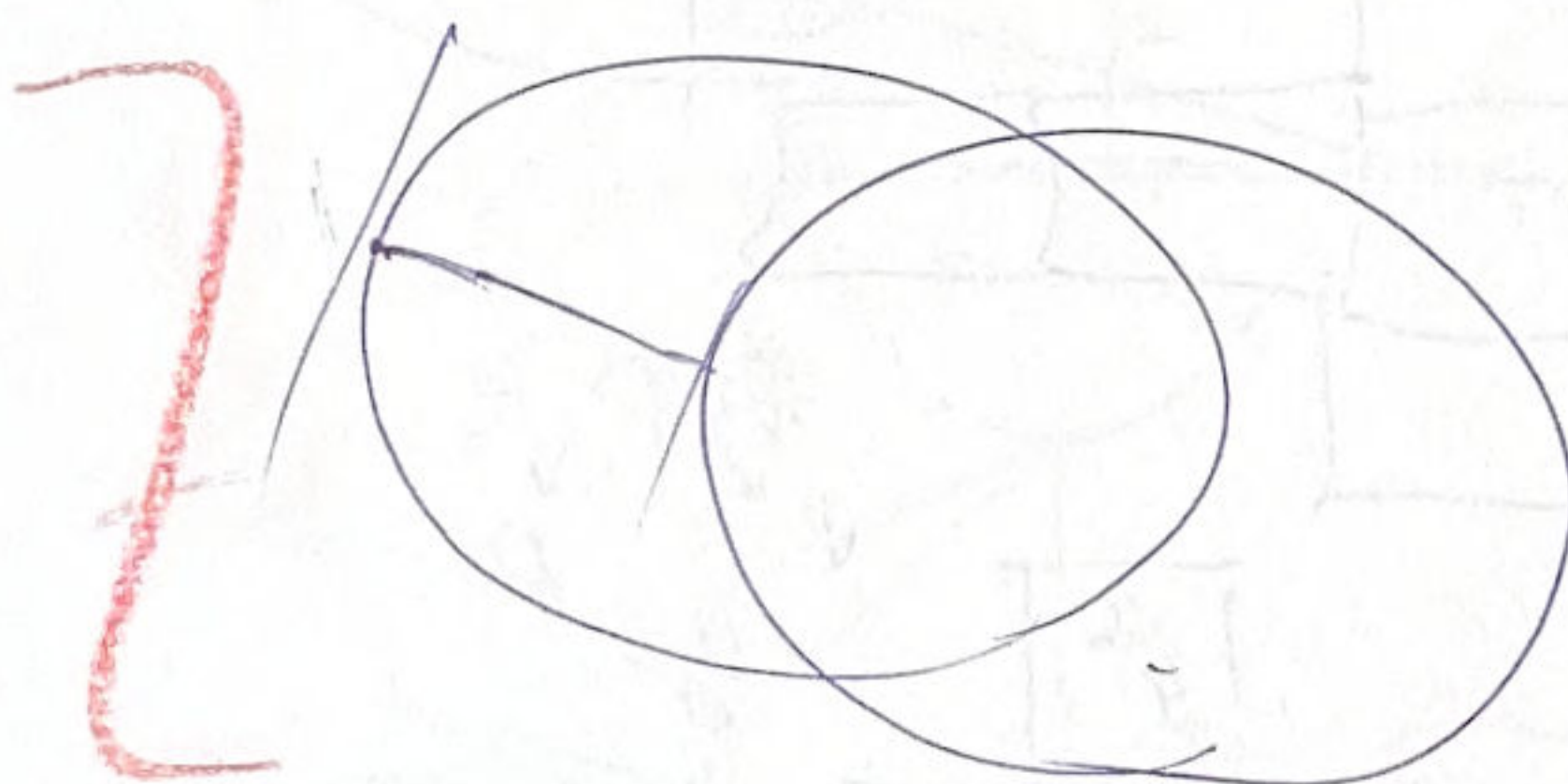
$$x = \frac{6}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{6}{\sin 120^\circ} = 2R$$

$$R = \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3}$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{\sin a} = \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\sin a = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$



Чертовик.

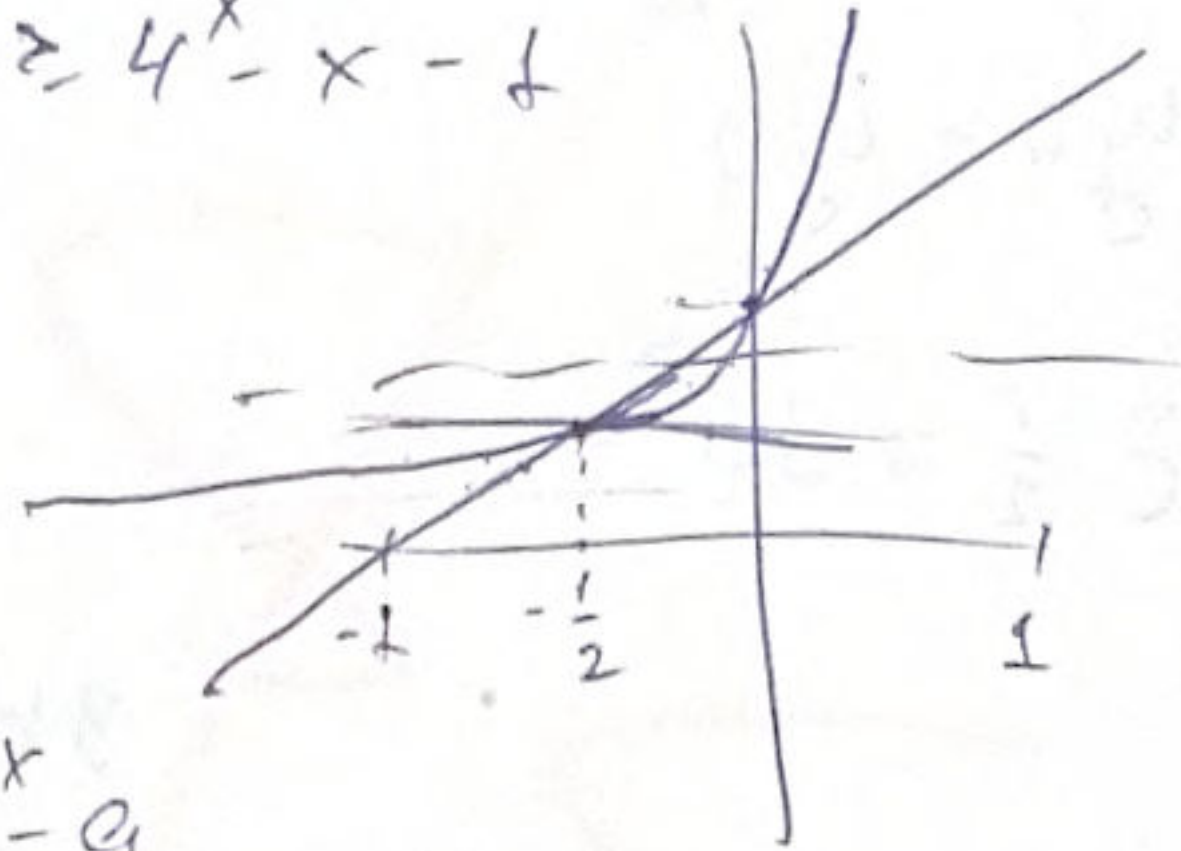
$$-1 \leq x \leq 1$$

$$|4^x - a| + |x + 1 - a| = 4^x - x - 1$$

$$|4^x - a| + (a - x - 1) \geq 0 \quad |4^x - x - 1| \geq 4^x - x - 1$$

$$4^x - x - 1 \geq 0$$

$$4^x \geq x + 1 \quad f' = 4^x \ln 4$$



~~мндо~~
~~Р₄~~

$$4^x - a$$

мндо

$$x + 1 - a \leq 0 \leq 4^x - a$$

мндо

$$4^x - a \geq 0 \leq x + 1 - a$$

$$4^x \leq x + 1$$

$$4^x \ln 4 = 1$$

$$4^x = \frac{1}{\ln 4}$$

$$x = -\log_4 \ln 4$$

~~Р₄~~

$$|4^x - a| + |x + 1 - a| = 0$$

$$2(1 - a) = 0$$

$$a = 1$$

$$x + 1 \leq a \leq 4^x$$

$$4^x \geq a \geq x + 1$$

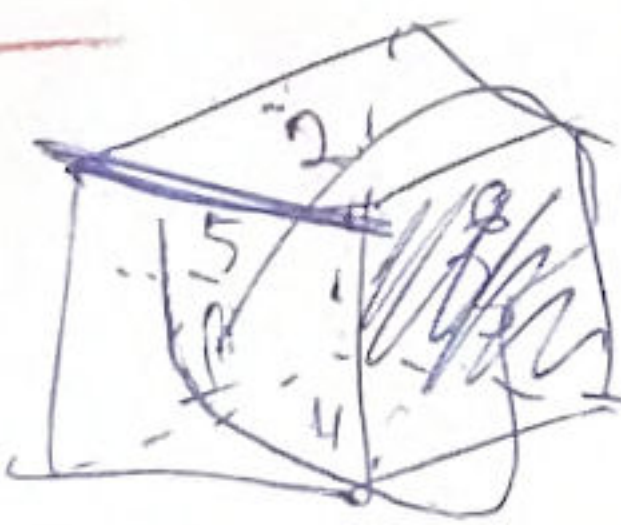
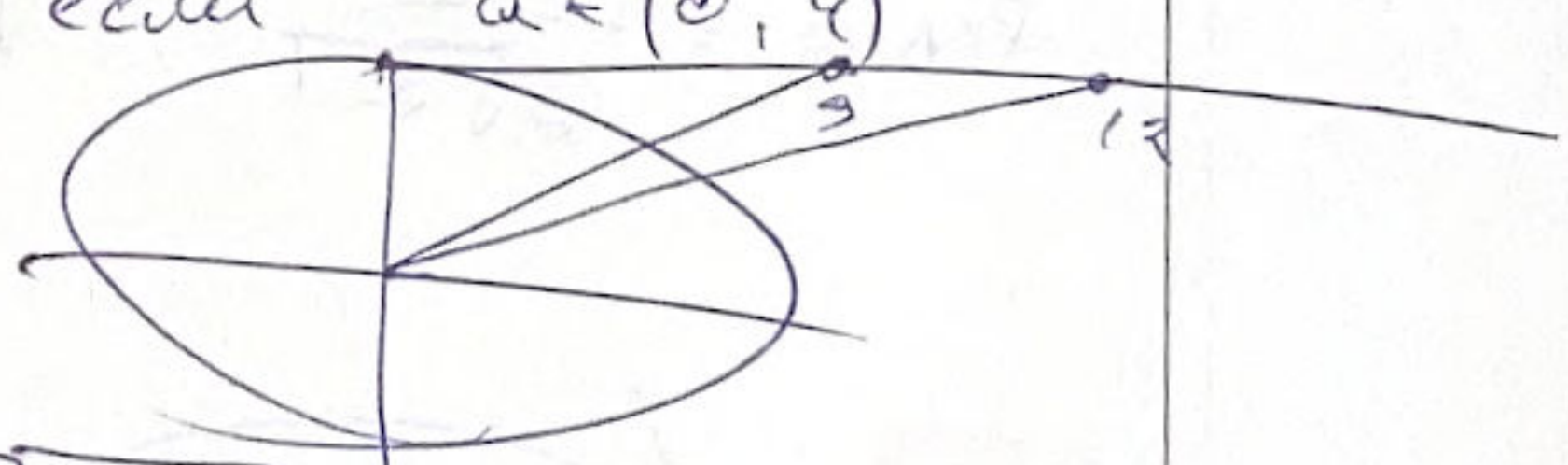
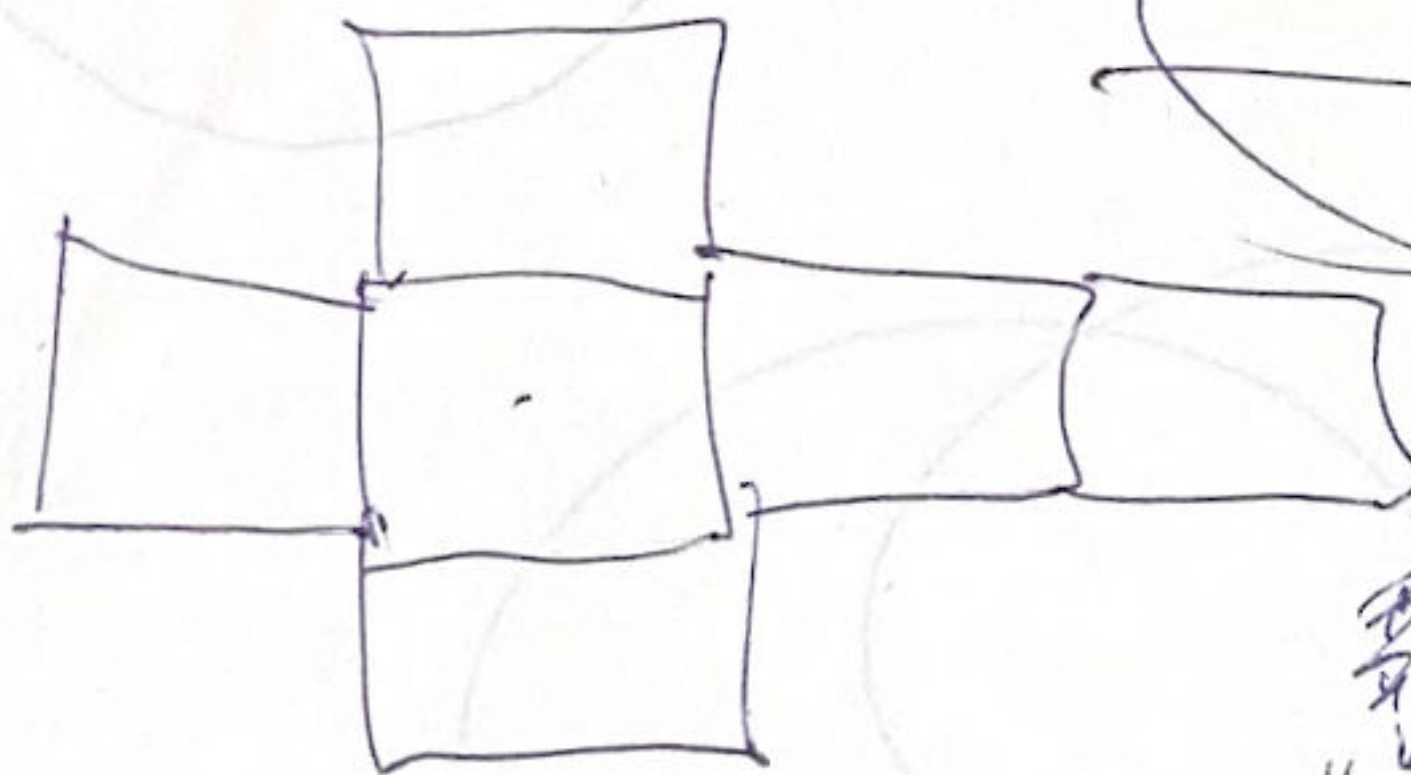
$$a = 0; \frac{1}{2}; 1$$

$$0 \leq x + 1 \leq 2$$

$$\frac{1}{4} \leq 4^x \leq 4$$

$$\arcsctg 3 > \arcsctg 12 \quad \text{если}$$

$$a \in (0; 1)$$



$$4^6$$

$$\frac{3}{4} P \quad \frac{3}{4}$$

$$4^2$$

$$4 \cdot 2 = 8$$

$$4 \cdot 3 = 4 \cdot 2 = 8$$

$$4 \cdot 4 \geq 4 \cdot 2 = 8$$

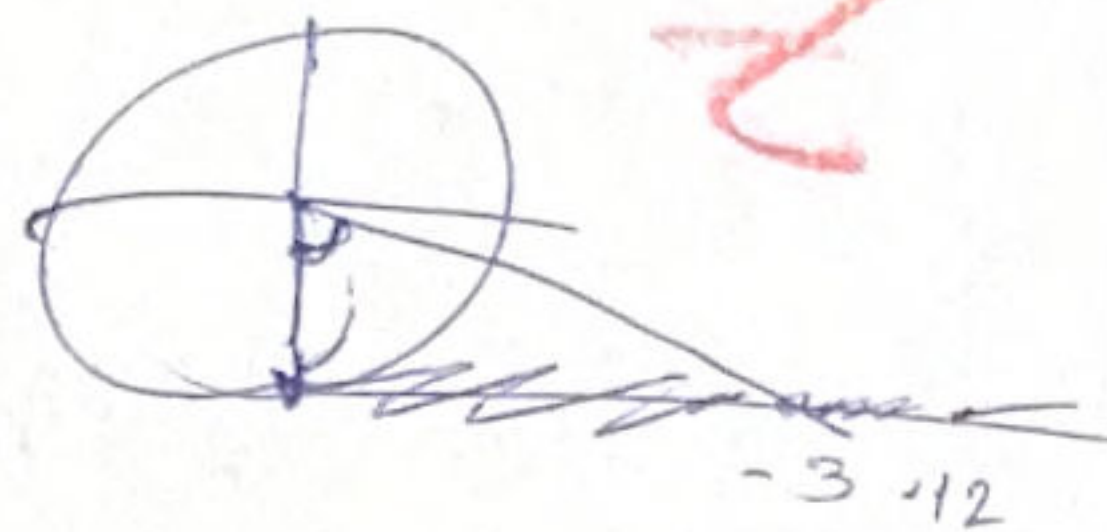
Черновик.

$$\sqrt{\cos x} + 2\sqrt{3}\sqrt{-\sin x} > 2\sqrt{\cos x} - \sqrt{3}\sqrt{-\sin x}$$

$$\sqrt{\cos x} \geq \sqrt{3}\sqrt{-\sin x}$$

$$\cos x \geq -3\sin x \neq 0$$

$$0 > \operatorname{ctg} x \geq -3$$



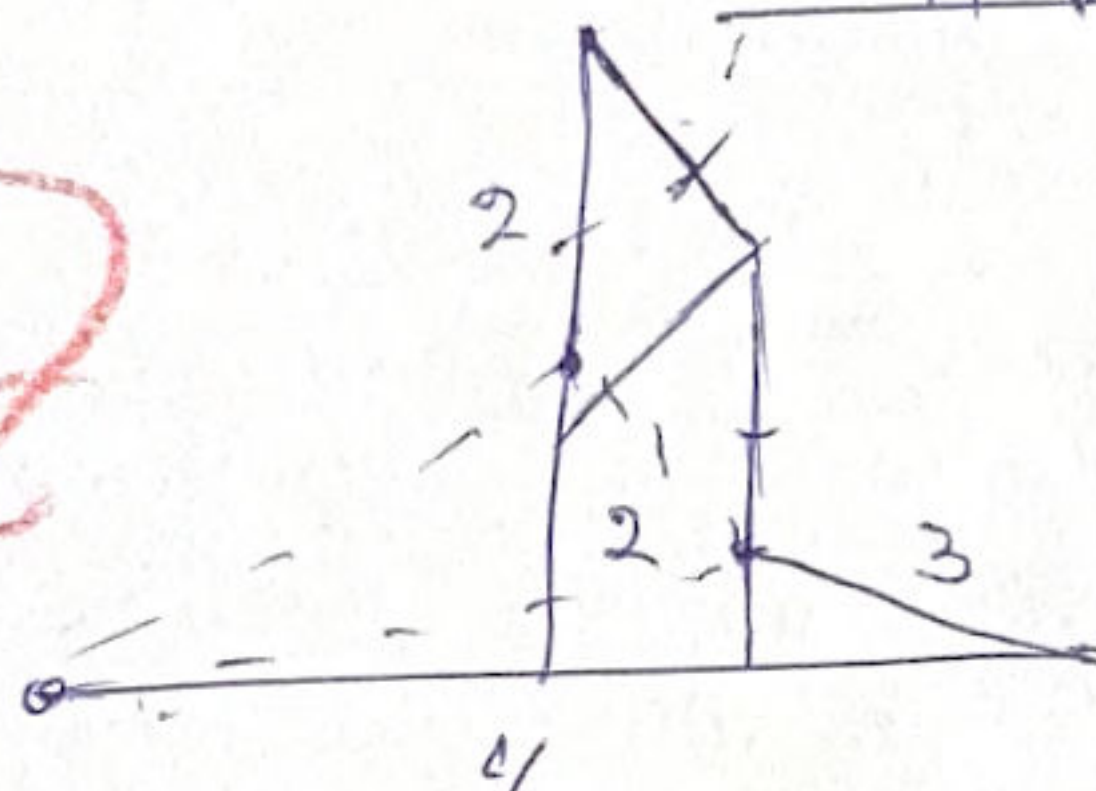
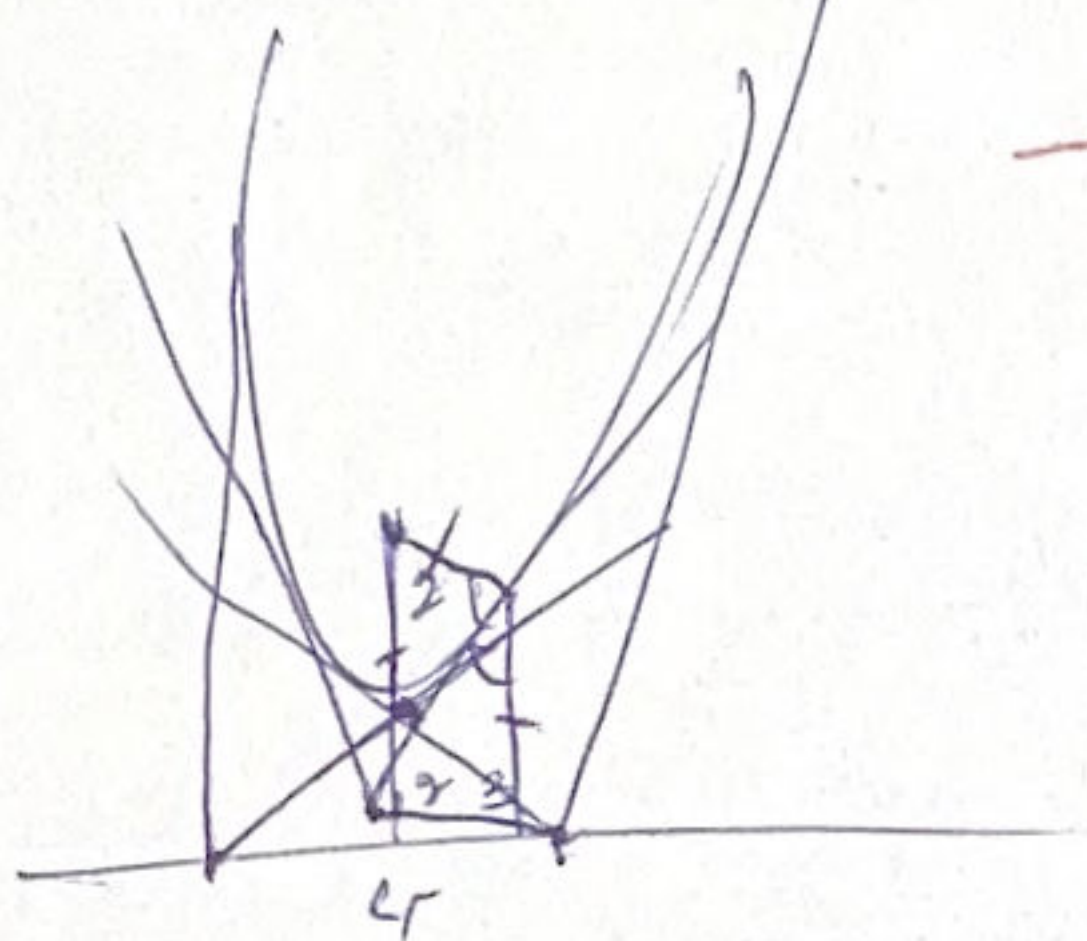
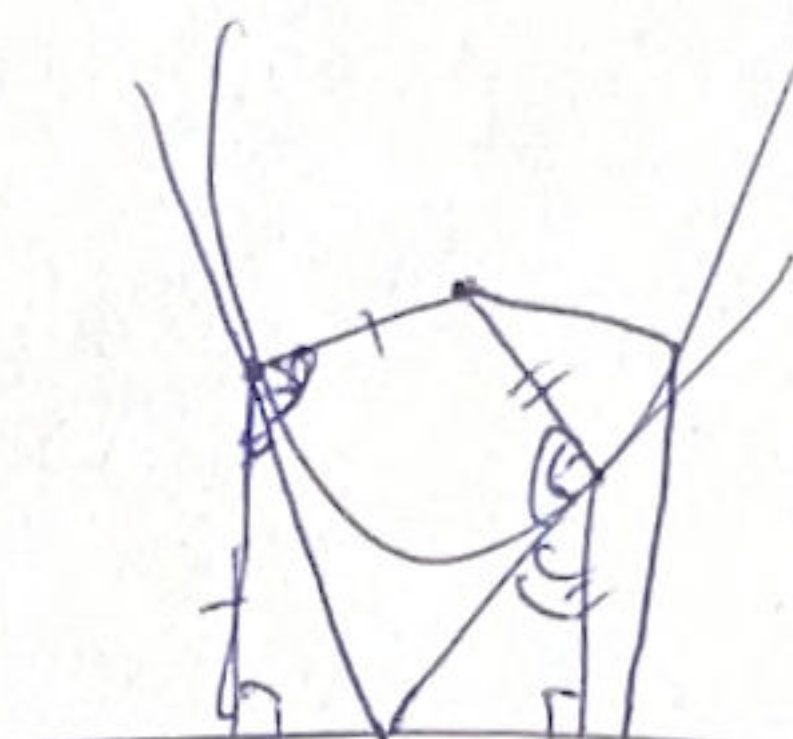
$$\sqrt{\cos x} + 2\sqrt{3}\sqrt{-\sin x} = 4\sqrt{\cos x} - 4\sqrt{3}\sqrt{-\sin x} \geq 0$$

$$6\sqrt{3}\sqrt{-\sin x} > 3\sqrt{\cos x}$$

$$2\sqrt{3}\sqrt{-\sin x} > \sqrt{\cos x}$$

$$-12\sin x > \cos x$$

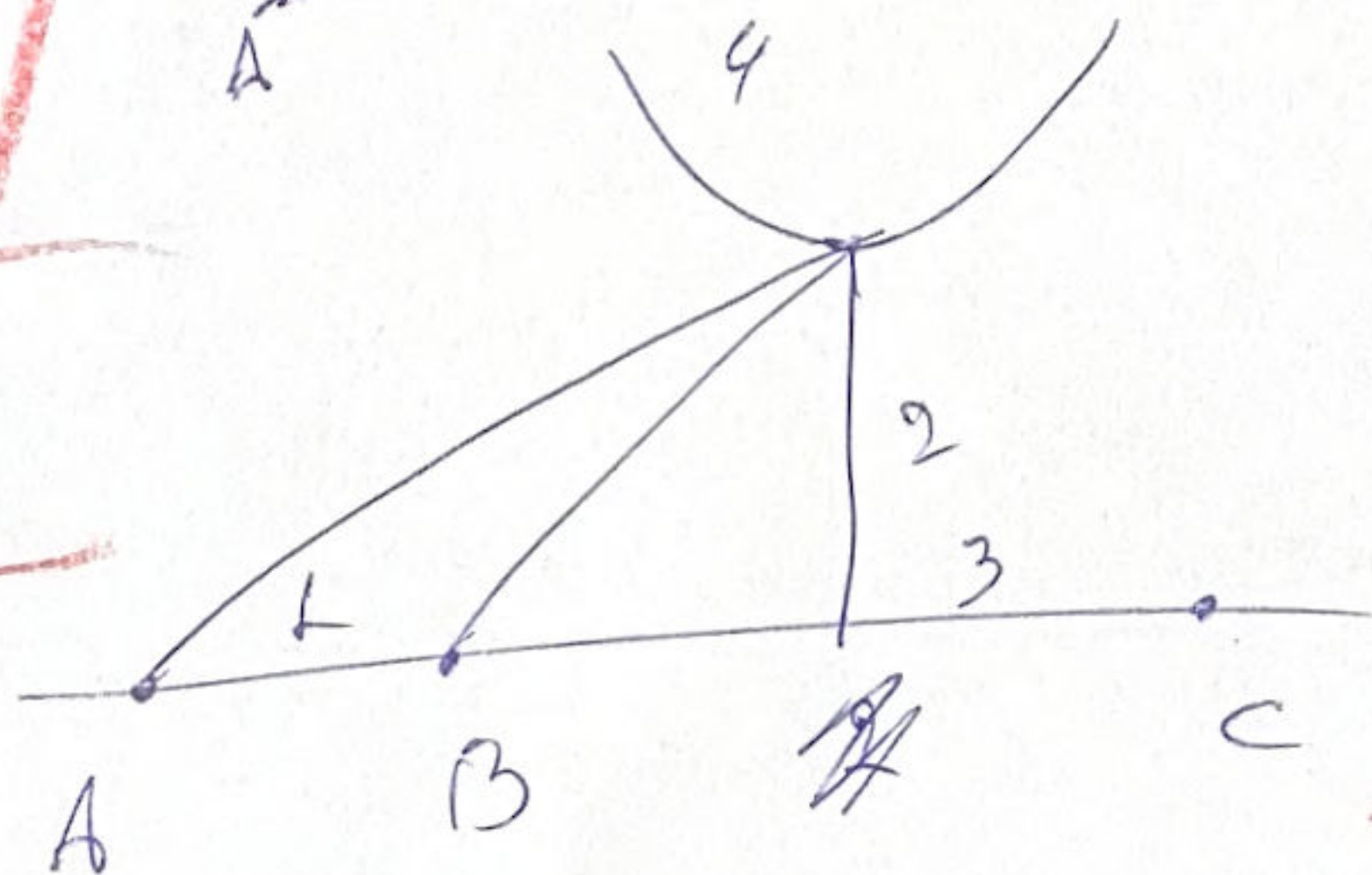
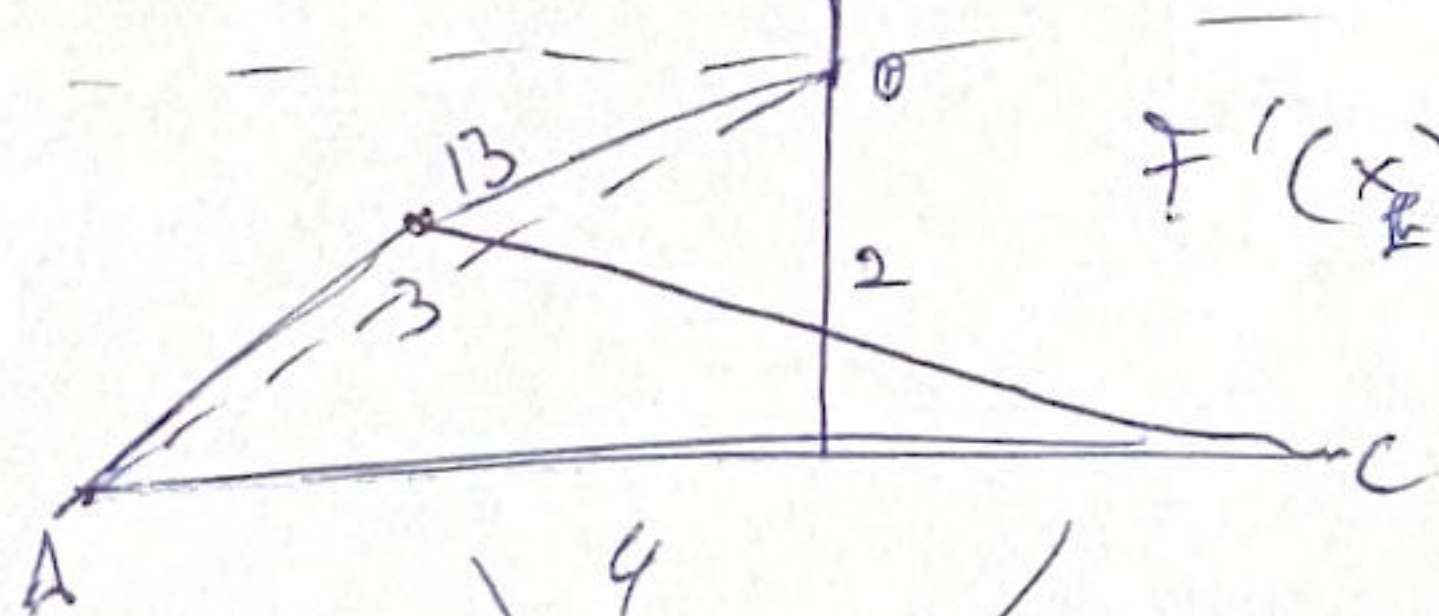
$$\operatorname{ctg} x < -12$$



$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f'(x) = 2ax + b$$

$$f'(x) = \frac{1}{f(x)}$$



$$S = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$$

Керновик.

$$\mathbb{Z} 16 x_i \{ 16 x_i \in \mathbb{Z} \}$$

~~Ж~~

$$\sqrt{y^2 + 3y - 4} - \sqrt{y^2 + 3y - 4} \geq y + 1$$

$$(y-1)(y+4)$$

$$\begin{cases} y \geq 1 \\ y \leq -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq \frac{1}{16} \end{cases}$$

~~Ж~~

$$y^2 + 3y - \sqrt{(y-1)(y+4)} \geq y^2 + 2y + 1$$

$$y - 1 \geq \sqrt{(y-1)(y+4)}$$

$$y^2 - 2y + 1 \geq y^2 + 3y - 4$$

$$y^2 + 3y \geq \sqrt{y^2 + 3y - 4} \quad \checkmark$$

$$\cancel{y(y+3)} \quad 5 \geq 5y$$

$$y \leq 1, \text{ но } y \geq 1 \quad !?$$

$$z \geq \sqrt{z-4}$$

~~Ж~~

$$z^2 - z + 4 = 0$$

$$0 < 16 x_0 \leq 1$$

$$D = 1 - 16 = -15$$

$$0, b \in \mathbb{Z} \quad \textcircled{1}$$

$$\log_2 x \leq -4$$

$$x \leq 16^{-4}$$