0 137690 160001

13-76-90-16
(162.12)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

$14^{10} - 14^{14}$
$14^{43} - 14^{46}$

Вариант 11 класс 1

Место проведения Краснодар
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Кружмалева Михаила Андреевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«13» апреля 2025 года

Подпись участника

13-76-90-16
(162.12)

Черновик 1

№1.

$\sqrt{4x^2-12x+9} + \sqrt{x^2-6x+9} + (\sqrt{(2-x)}$

$2x-3 = 2x-3$

$0=0.$

$\frac{1}{3}+\frac{2n}{3}=\frac{3}{2}.$

$2+4n=9.$

$4n=7.$

$\sin(45+30) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4} = \underline{1{,}6}$

$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}$

$5 \div 3 = 1{,}6$; -3; 20

$81 \cdot 3 = 243$

$\frac{1}{6}+\frac{1}{3}^{12}=\frac{1}{2}.$

$\sin\alpha-\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$\begin{cases} |2x-3| = 2x-3 \\ x \ge \frac{3}{2} \\ x \le 2. \end{cases}$

$\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{3}{2}.$

$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$1+2t=9$

$2t=8$

$t=4$

$\underline{\frac{1}{3}}; \frac{2}{5}; \underline{\frac{1}{2}}; \underline{\frac{4}{5}}; \underline{\frac{5}{6}}; \underline{1}; \frac{7}{6}; \frac{6}{5}; \frac{3}{2}; \frac{8}{5}$

$a^3+b^3+c^3 = (a+b+c)^3$

$a = \cos(\pi x)$

$b = \cos$

$\frac{1}{6}+1=\frac{7}{6}$

$\frac{1}{6}+\frac{2}{3}^{12}=\frac{5}{6}.$

$\frac{1}{6}+\frac{4}{3}^{12}=\frac{9}{3}.$

$a^3+b^3+c^3-(a+b+c)^3 = -3(a+b)(b+c)(c+a)=0.$

$\left[\begin{array}{l} a=-b \\ b=-c \\ c=-a \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \sin(\pi x) = \sin(2\pi x) \\ -\sin(2\pi x) = -\sin(4\pi x) \\ \sin(4\pi x) = -\sin(\pi x) \end{array}\right.$

$\sin(\pi x)-\sin(2\pi x)=0.$

$\sin+\sin = 0$

Чистовик 1

№ 1

$$\sqrt{4x^2-12x+9}+\sqrt{x^2-6x+9}+\left(\sqrt{-(x-2)}\right)^2=\sqrt{3+\sqrt{8}}-\sqrt{3-\sqrt{8}}$$

ОДЗ:

$-(x-2)\geq 0$

$2-x\geq 0$

$x\leq 2$

$$\sqrt{4x^2-12x+9}+\sqrt{x^2-6x+9}+\left(\sqrt{-(x-2)}\right)^2=\sqrt{3+\sqrt{8}}-\sqrt{3-\sqrt{8}}=$$

$$=\sqrt{2}+1-(\sqrt{2}-1)=2.$$

$$|2x-3|+|x-3|-(x-2)=2$$

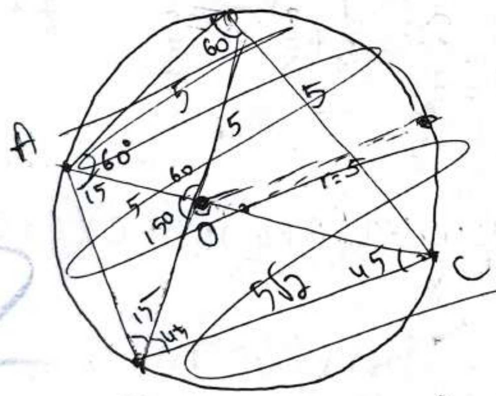
$|2x-3|-(x-3)-(x-2)=2$, т.к $x\leq 2$ по ОДЗ.

$$|2x-3|=x-3+x-2+2=2x-3\Rightarrow$$

$\Rightarrow x\geq\frac{3}{2}\Rightarrow$ ~~2 корня~~ $x\in\left[\frac{3}{2};2\right]$. ~~(т.к $\frac{3}{2}\leq x\leq 2$)~~

Ответ: $\left[\frac{3}{2};2\right]$.

№ 3.



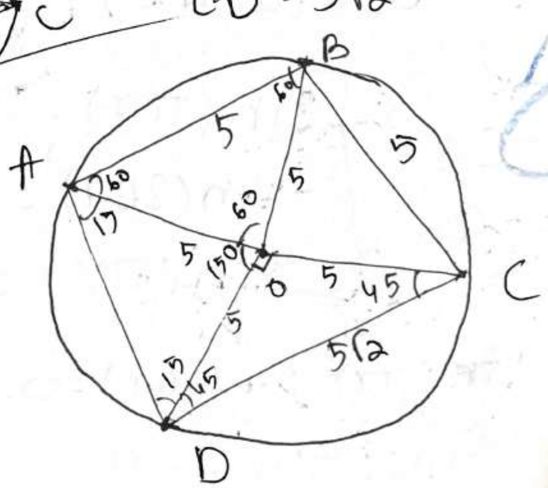
О – центр окр.

AB = 5

BC = 5

CD = $5\sqrt{2}$.

Рисунок к 1 случаю:



Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
13-76-90-16		+	∓	+	+	+	−	∅	∅

Работа идентична 41-33-57-94

Чистовик 2

Случай I: Стороны 5 и 5 смежные, $AB = BC = 5$, $CD = 5\sqrt{2}$, O - центр $\Rightarrow$ AOB и BOC - ~~пра~~ равностор. треуг. $\triangle DOC$ - прямоуг т.к $DC^2 = OD^2 + OC^2$, тогда $\cup AB = 60^\circ$, $\cup BC = 60^\circ$, $\cup DC = 90^\circ \Rightarrow$ дуга $AD = 150^\circ \Rightarrow \angle AOD = 150^\circ$.

По теор. кос. в $\triangle AOD$ $AD^2 = 5^2 + 5^2 + 2\cdot 5\cdot 5\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50 + 25\sqrt{3}$. Тогда $AD = 5\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{5\cdot(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{2}}$. Площадь $ABCD = S_{ABC} + S_{ADC} =$

$$= \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5\cdot \sin ABC = \cancel{\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5} + \frac{1}{2}\cdot AD\cdot DC\cdot \sin ADC =$$

$$= \frac{25}{2}\cdot \sin 120 + \frac{1}{2}\cdot \frac{5(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{2}} \cdot 5\sqrt{2}\cdot \sin 60 =$$

$$= \frac{25}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{25}{2}\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{4} + \frac{25\sqrt{3}}{4} +$$

$$+ \frac{25\cdot 3}{4} = \frac{50\sqrt{3}+75}{4} = \frac{25\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}{4}$$

Случай II: стороны 5 и 5 противополож. $\Rightarrow AB = 5$, $BC = 5\sqrt{2}$, $CD = 5$

Рисунок:

Чистовик 3

$\smile AB = 60^\circ$, $\smile BC = 90^\circ$, $\smile BD = 60^\circ \Rightarrow$

$\angle AOD = 150^\circ \Rightarrow AD = \sqrt{50+25\sqrt{3}} = 5\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{5\cdot(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ABD} = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5\sqrt{2}\cdot \sin 105^\circ + \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5\cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\cdot$

$\cdot \sin 75 = \frac{25}{2}\cdot \sin 75\cdot\left(\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{25}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} =$

$= \frac{25\sqrt{3}}{8}\cdot(1+\sqrt{3})^2 = \frac{25\sqrt{3}\cdot(4+2\sqrt{3})}{8} =$

$\frac{25\sqrt{3}\cdot(2+\sqrt{3})}{4}$

Ответ: $\frac{25\sqrt{3}\cdot(2+\sqrt{3})}{4}$

№ 2

$3^{5-\frac{1}{x}} \geq a + \sin 4^x$

$a > 0$ не имеет решений для $x > 0$

При $x > 0$: $5 - \frac{1}{x} < 5 \Rightarrow 3^{5-\frac{1}{x}} < 3^5 =$

$= 243$. Оценка сверху

Заметим, что при $x > 0$ найдутся такие, что $\sin 4^x = 1 \Rightarrow 3^{5-\frac{1}{x}}$ сколь угодно близко приближается к числу 243 снизу $\Rightarrow$ необходимо, чтобы при $x > 0$ было верно:

$a + \sin 4^x > 3^{5-\frac{1}{x}} > 243 \Rightarrow a > 243 - \sin 4^x \geq$

$\geq 244 \Rightarrow$ при $a < 245$ $a + \sin 4^x \leq 244$

при всех x, для которых $\sin 4^x = -1$

и при стремлении x к бесконечн.

Чистовик 4

Найдутся решения нер-ва $3^{5\cdot\frac{1}{x}} \geq a + \sin 4^x$ =)

=) $\min a = 244$.

Ответ: ~~245~~ 244

№ 5.

$f_1(x) = (x^3 + (a_1+b_1)\cdot x^2 + (6 + a_1\cdot b_1)x + 6a_1$

$f_2(x) = (x^3 + (a_2+b_2)\cdot x^2 + (8 + a_2\cdot b_2)x + 8a_2$

$f_3(x) = (x^3 + (a_3+b_3)\cdot x^2 + (12 + a_3 b_3)x + 12a_3$

Заметим, что условие $f_1(x) = f_2(x) = f_3(x)$ для $x \in R$ =) $f_1(x) - f_2(x)$; $f_1(x) - f_3(x)$; $f_1(x) - f_3(x)$ тождественно 0, что может быть только при равенстве коэфф при степенях x.

Тогда: $\begin{cases} a_1+b_1 = a_2+b_2 = a_3+b_3 \\ 6+a_1b_1 = 8+a_2b_2 = 12+a_3b_3 \\ 6a_1 = 8a_2 = 12a_3 = 24k, \ k \in R. \end{cases}$

$a_1 = 4k$; $a_2 = 3k$; $a_3 = 2k$.

Тогда:

$4k + b_1 = 3k + b_2 = 2k + b_3$ =) $b_2 = b_1 + k$;

$b_3 = b_1 + 2k$.

Подставим во 2-у строчку системы:

$6 + 4k\cdot b_1 = 8 + 3k\cdot b_2 = 12 + a_3 b_3$

$6 + 4k\cdot b_1 = 8 + 3k(b_1+k) = 12 + (b_1+2k)\cdot 2k$.

$6 + 4kb_1 = 8 + 3kb_1 + 3k^2 = 12 + 2kb_1 + 4k^2$

Чистовик 5

$$\begin{cases} kb_1 - 3k^2 = 2 \\ kb_1 - k^2 = 4 \end{cases}$$

$-3k^2 + k^2 = -2$

$-2k^2 = -2$

$k^2 = 1 \Rightarrow k = 1$, т.к числа положит.

Тогда:

$a_1 = 4$

$a_2 = 3$

$a_3 = 2$

Из системы:

$kb_1 - 3k^2 = 2 \quad (k = 1)$

$b_1 - 3 = 2$

$b_1 = 5 \Rightarrow b_2 = 6, b_3 = 7.$

Значит, $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3 =$

$= 4 + 5 + 3 + 6 + 2 + 7 = 27.$

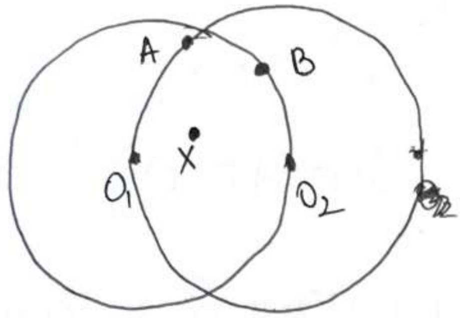
Ответ: 27.

№ 6.

Пусть r - радиус, $r = \frac{1}{2+\sqrt{2}}$

Сделаем рисунок

Чистовик 6



Мышь ходит в одну зону, где ~~одна~~ первая поливалка в точке A, там, ~~где~~ где 2 поливалка в т. B, X - нора $\Rightarrow$ минимизируем $AB + 2BX$. O_1, O_2 - центры окружностей $\Rightarrow O_1B = r = O_1O_2$. Обозначим $O_2B = t \Rightarrow BX = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2t^2+2r^2-r^2} =$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2t^2+r^2}$, при этом ~~$AB \geq r-t$~~

$AB \geq r-t$. $\min(AB+2BX) = \sqrt{2t^2+r^2}+r-t$

Найдем производную по t:

$$\left(\sqrt{2t^2+r^2}+r-t\right)' = \frac{2t}{\sqrt{2t^2+r^2}} - 1 = 0.$$

Тогда:

$2t^2 = r^2 \Rightarrow t = \frac{r}{\sqrt{2}}$ (+ - положит), это т. min функции $\Rightarrow$ минимальный путь будет равен $\sqrt{2}\cdot r - \frac{r}{\sqrt{2}} + r =$

$$= r\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right) = \frac{1}{2+\sqrt{2}}\cdot\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+2}$$

Ответ: $\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+2}$.

Чистовик 7.

№ 4.

$\sin^3(\pi x) - \sin^3(2\pi x) + \sin^3(4\pi x) =$

$= (\sin(\pi x) - \sin(2\pi x) + \sin(4\pi x))^3$

Пусть $\sin(\pi x) = a$, $-\sin(2\pi x) = b$, $\sin(4\pi x) = c$, тогда:

$a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)^3$

$a^3 + b^3 + c^3 - (a+b+c)^3 = -3(a+b)(b+c)(c+a) = 0$

$\left[\begin{array}{l} a = -b \\ b = -c \\ c = -a \end{array}\right.$ обр зам:

$\left[\begin{array}{l} \sin(\pi x) = \sin(2\pi x) \\ -\sin(2\pi x) = -\sin(4\pi x) \\ \sin(4\pi x) = -\sin(\pi x) \end{array}\right.$

Тогда:

$\left[\begin{array}{l} \sin(\pi x) - \sin(2\pi x) = 0 \\ \sin(2\pi x) - \sin(4\pi x) = 0 \\ \sin(4\pi x) + \sin(\pi x) = 0 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{ll} 2\sin\frac{\pi x - 2\pi x}{2} \cdot \cos\frac{\pi x + 2\pi x}{2} = 0 & (1) \\ 2\sin\frac{2\pi x - 4\pi x}{2} \cdot \cos\frac{2\pi x + 4\pi x}{2} = 0 & (2) \\ 2\sin\frac{4\pi x + \pi x}{2} \cdot \cos\frac{4\pi x - \pi x}{2} = 0 & (3) \end{array}\right.$

Чистовик 8

(1):

$$\left[\begin{array}{l} \sin\frac{-\pi x}{2}=0 \\ \cos\frac{3\pi x}{2}=0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{\pi x}{2}=\pi k, \quad x=2k, \ k\in Z. \\ \frac{3\pi x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi n \\ \frac{3x}{2}=\frac{1}{2}+n \\ x=\frac{1}{3}+\frac{2n}{3}, \quad n\in Z. \end{array}$$

(2)

$$\left[\begin{array}{l} \sin(-\pi x)=0 \\ \cos 3\pi x=0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} \pi x=\pi m \\ x=m, \quad m\in Z \\ 3\pi x=\frac{\pi}{2}+\pi t, \ t\in Z \\ \cancel{x=\frac{3}{2}} \ x=\frac{1}{6}+\frac{t}{3}, t\in Z \end{array}$$

(3) $$\left[\begin{array}{l} \sin\frac{5\pi x}{2}=0 \\ \cos\frac{3\pi x}{2}=0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{5\pi x}{2}=\pi l \\ x=\frac{2l}{5}, \quad l\in Z \end{array}$$

Имеем: $x=2k$; $x=\frac{1}{3}+\frac{2n}{3}$; $x=m$; $x=\frac{1}{6}+\frac{t}{3}$; $x=\frac{2l}{5}$ $(k, n, m, t, l\in Z)$.

Т.к $x\in[0,3; 1,6]$ $\Rightarrow$ при $x=2k$ $\varnothing$, при $x=\frac{1}{3}+\frac{2n}{3}$, $x=\frac{1}{3}; 1; \frac{3}{2}$ при $x=m$, $x=1$; при $x=\frac{1}{6}+\frac{t}{3}$ $x=\frac{1}{2}, \frac{5}{6}; \frac{7}{6}$, при $x=\frac{2l}{5}$ $x=\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \frac{8}{5}$

Ответ: $\frac{1}{3}; 1; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}; \frac{5}{6}; \frac{7}{6}; \frac{2}{5}; \frac{4}{5}; \frac{6}{5}; \frac{8}{5}$