0 655936 330006

65-59-36-33

(162.1)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11-2-11

Место проведения Краснодар
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Кузнецова Никиты Сергеевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«13» апреля 2025 года

Подпись участника

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
65-59-36-33	75	+	+	+	+	+	Ø	Ø	Ø

Лиев Зеленов (75) (семьдесят пять)

Чистовик

1) Перепишем уравнение выделив квадраты:

$$\sqrt{(2x+3)^2}+\sqrt{(3x+2)^2}-\left(\sqrt{-(x+1)}\right)^2=\sqrt{(\sqrt{6}+1)^2}-\sqrt{(\underbrace{\sqrt{6}-1}_{>0})^2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ имеем: $\begin{cases}|2x+3|+|3x+2|-(-(x+1))=\sqrt{6}+1-(\sqrt{6}-1) \Rightarrow \\ (-(x+1))\geq 0 \Rightarrow x+1\leq 0 \Rightarrow \underline{x\leq -1} \Rightarrow 3x+2<0 \Rightarrow\end{cases}$

$\Rightarrow$ раскр. с минусом $\Rightarrow \begin{cases}|2x+3|-3x-2+x+1=2 \\ x\leq -1\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases}|2x+3|=2x+3 \\ x\leq -1\end{cases} \Rightarrow$ при $2x+3\leq 0$: $-(2x+3)=2x+3 \Rightarrow 2x+3=0$

при $2x+3>0$: $2x+3=2x+3$ (V) $\Rightarrow x=-\frac{3}{2}$.

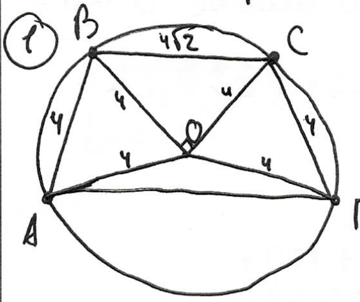
$\Updownarrow$

$\cancel{2x+3>}$ $2x>-3 \Rightarrow \underline{x>-\frac{3}{2}} \Rightarrow \begin{cases}x>-\frac{3}{2} \\ x\leq -1\end{cases} \Rightarrow x\in(-\frac{3}{2};-1]$

$\Rightarrow$ Ответ: $x\in[-\frac{3}{2};-1]$.

2) Рассмотрим 2 случая: [есть равн. сос. стороны / нет равн. сос. сторон

(1)



Если $AB=CD$, то $ABCD$ - р/б трапеция. т.к $OB=OC=OD=OA$: $\triangle ABO$, $\triangle OCD$ - равностор., их $S_{равны}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 4\cdot 4=4\sqrt{3}$.

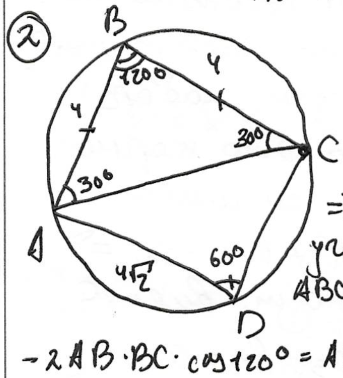
т.к $BC=4\sqrt{2}$, $OB=OC=4 \Rightarrow BOC$ - р/б $\triangle$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_{BOC}=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4=8$. $\angle AOD=360°-\angle AOB-\angle DOC-\angle BOC=360-210=150°$

$\Rightarrow S_{AOD}=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\cdot\sin 150°=4 \Rightarrow$ т.к $S_{ABCD}=S_{ABO}+S_{BOC}+S_{OCD}+S_{AOD}$,

то $S_{ABCD}=4\sqrt{3}\cdot 2+8+4=12+8\sqrt{3}$. $\leftarrow$ это верно при усл, что O лежит внутри $ABCD$, иначе: $S_{ABCD}\leq 12+8\sqrt{3}$

(2)



Если $AB=BC$, то т. синусов: $\frac{BC}{\sin\angle BAC}=2R_{(ABCD)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\angle BAC=\frac{1}{2}$, аналогично: $\sin\angle ACB=\frac{1}{2}$

Если один из углов $=150°$, то $\angle BAC+\angle ACB\geq 180$

$\Rightarrow$!? (т.к сумма всех углов треуг. $=180°$, а у нас еще угол $\angle ABC$) $\Rightarrow \angle BAC=\angle BCA=30° \Rightarrow \angle ABC=120°$. $\Rightarrow$ т.к $ABCD$ впис, то $\angle ADC=60° \Rightarrow$ по т. косинусов: AB^2+BC^2-

$-2AB\cdot BC\cdot\cos 120°=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cdot\cos 60°=AC^2 \Rightarrow \cancel{32}+32\cdot\frac{1}{2}=\cancel{32}+CD^2-\cancel{2}\cdot CD\cdot 4\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow CD^2-4\sqrt{2}CD-16=0 \Rightarrow (CD-2\sqrt{2})^2-24=0 \Rightarrow$ $\cancel{CD-2\sqrt{2}=24}$ $(CD-2\sqrt{2})^2=24 \Rightarrow$

$\Rightarrow CD-2\sqrt{2}=\pm 2\sqrt{6} \Rightarrow CD=2\sqrt{6}+2\sqrt{2} \Rightarrow S_{ACD}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 4\sqrt{2}(2\sqrt{6}+2\sqrt{2})=2\sqrt{6}(\sqrt{6}-\sqrt{2})=12+4\sqrt{3}$

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 4\cdot 4=4\sqrt{3} \Rightarrow S_{ABCD}=12+8\sqrt{3} \Rightarrow$ Ответ: $S_{ABCD\,max}=12+8\sqrt{3}$.

чистовик

~~2) Рассмотрим $x=\log_3(2^k\cdot\pi)$, $k\in\mathbb{N} \Rightarrow \sin 3^x=\sin(2^k\pi)=0$ $\forall k\in\mathbb{N}$, Заметим, что при $k\to\infty$: $5^{3-\frac{1}{x}}\to 125$, (т.к $\log_3(2^k\pi)\to\infty$ при $k\to\infty$) $\Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{1}{x}\to 0 \Rightarrow 3-\frac{1}{x}\to 3$). Отсюда, следует вывод, что при любом $a<125$ $\exists$ такое k, что: $5^{3-\frac{1}{\log_3 2^k\pi}}>a$, а т.к при таком x: $\sin 3^x=0$, то при любом $a<125$ будет существовать решение нер-ва вида: $x=\log_3(2^k\pi) \Rightarrow a\geq 125$. Несложно заметить, что такое a подходит. И правда: при~~

2) Покажем, что $a\geq 126$. Рассмотрим $x_0=\log_3(2^k\cdot\pi-\frac{\pi}{2})$, $k\in\mathbb{N}$, т.к мы хотим, чтобы нер-во не вып. $\forall x$, то должно вып. нер-во: $5^{3-\frac{1}{x}}-\sin 3^x<a$. Заметим, что при выбранном x_0: $\sin 3^x=\sin(2^k\cdot\pi-\frac{\pi}{2})=-1$. Несложно заметить, что при очень больших k: $x_0\to\infty \Rightarrow \frac{1}{x}\to 0 \Rightarrow 3-\frac{1}{x}\to 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow 5^{3-\frac{1}{x_0}}-\sin 3^{x_0}\to 126$. Равенство не достигается, но вполне очевидно, что $\forall a<126$ $\exists x_0$ такое, что левая часть нер-ва будет больше правой $\Rightarrow a\geq 126$. Очевидно, что такое a подходит, т.к при $x>0$: $5^{3-\frac{1}{x}}<125$, а т.к $\sin 3^x\geq -1$, то правая часть исходного нер-ва $\geq 125 \Rightarrow$ Ответ: $a=126$.

5) Раскроем скобки: $f_1(x)=x^3+(a_1+b_1)x^2+(12+a_1b_1)x+12a_1$ (1)
$f_2(x)=x^3+(a_2+b_2)x^2+(15+a_2b_2)x+15a_2$ (2)
$f_3(x)=x^3+(a_3+b_3)x^2+(20+a_3b_3)x+20a_3$.

Т.к f_i равны на всей числовой оси, то все f_i - равные многочлены (приведенные) $\Rightarrow 12a_1=15a_2=20a_3$ (*) $\Rightarrow$ если предположить, что какие-то 2 a_i равны, мы получим $a_i=0$, но по условию $a_i\neq 0$?! $\Rightarrow a_1\neq a_2\neq a_3$. Т.к многочлены равны, то у них один. набор корней и т.к $\deg f_i=3$, то их ≤ 3, заметим, что это корни: $-a_1,-a_2,-a_3$. Рассмотрим $f_1(x)$, т.к помимо $-a_1$ он имеет корни $-a_2,-a_3$, они могут сод. только в скобке: $x^2+b_1x+12 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ данный трехчлен имеет корни: $-a_2,-a_3 \Rightarrow$ по т. Виета: $-a_2+(-a_3)=-b_1 \Rightarrow b_1=a_2+a_3$. Аналогично: $b_2=a_1+a_3$, $b_3=a_1+a_2$ $\Rightarrow$ сумма из условия $=3(a_1+a_2+a_3)$. Приравняем 1 и 2: $12+a_1b_1=15+a_2b_2 \Rightarrow a_1b_1=a_2b_2+3 \Rightarrow a_1(a_2+a_3)=a_2(a_1+a_3)+3 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 a_3 = a_2 a_3 + 3$. Выражая a_3, a_2 через a_1 исходя из (*) имеем: $a_1 \cdot \frac{3}{5}a_1 = \frac{4}{5}a_1 \cdot \frac{3}{5}a_1 + 3 \Rightarrow 15a_1^2 = 12a_1^2 + 45 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3a_1^2 = 45 \Rightarrow a_1 = 5 \Rightarrow a_3 = 3,\ a_2 = 4 \Rightarrow 3(\underset{5}{a_1} + \underset{3}{a_2} + \underset{4}{a_3}) = 36.$

Ответ: 36.

4). Пусть $\cos\pi x = a$, $\cos 2\pi x = b$, $\cos 4\pi x = c \Rightarrow$

$\Rightarrow a^3 + b^3 = (a+b-c)^3 + c^3 \Rightarrow$ По формуле суммы кубов:

$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ac - (ac + bc - c^2) + c^2)$

$\Rightarrow$ либо $a+b=0$.

либо: $\cancel{a^2} - ab + \cancel{b^2} = \cancel{a^2} + \cancel{b^2} + 3c^2 + 2ab - 3bc - 3ac \Rightarrow$

$\Rightarrow 3c^2 + 3ab - 3bc - 3ac = 0 \Rightarrow c^2 + ab - bc - ac = 0 \Rightarrow a(b-c) - c(b-c) = 0$

$\Rightarrow (a-c)(b-c) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=c \\ b=c \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a+b=0 \\ a=c \\ b=c \end{array}\right.$. Обр. замена:

① $\cos\pi x + \cos 2\pi x = 0 \Rightarrow 2\cos\left(\frac{\pi x + 2\pi x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi x - 2\pi x}{2}\right) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\frac{3\pi}{2}x = 0 \\ \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{3\pi}{2}x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ \frac{\pi}{2}x = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{array}\right. \Rightarrow \quad \cos\left(\frac{2\pi x - \pi x}{2}\right)$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}k \\ x = 1 + 2k \end{array}\right., k \in Z.$

② $\cos\pi x = \cos 4\pi x \Rightarrow -\cos\pi x + \cos 4\pi x = 0 \Rightarrow \cos 4\pi x - \cos\pi x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\sin\left(\frac{4\pi x + \pi x}{2}\right)\sin\left(\frac{4\pi x - \pi x}{2}\right) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{5\pi x}{2} = \pi k \\ \frac{3\pi x}{2} = \pi k \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{2k}{5} \\ x = \frac{2k}{3} \end{array}\right.; k \in Z$

③ $\cos 2\pi x = \cos 4\pi x \Rightarrow \cos 4\pi x - \cos 2\pi x = 0 \Rightarrow 2\sin\left(\frac{4\pi x + 2\pi x}{2}\right)\sin\left(\frac{4\pi x - 2\pi x}{2}\right) = 0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3\pi x = \pi k \\ \pi x = \pi k \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{k}{3} \\ x = k \end{array}\right.; k \in Z. \Rightarrow$ объединяя все решения имеем:

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{k}{3} \\ x = k \\ x = \frac{2k}{5} \end{array}\right.; k \in Z. \Rightarrow$ подходящие интервалу $[0,3;\ 1,6]$ иксы:

$\Updownarrow$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{k}{3} \\ x = \frac{2k}{5} \end{array}\right.; k \in Z.$

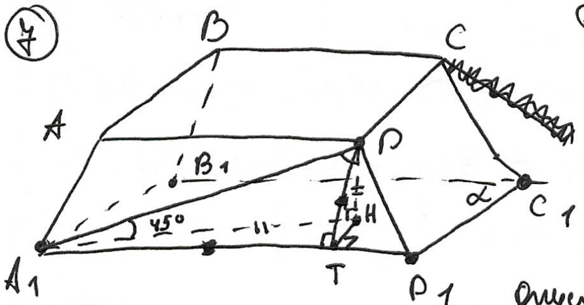
① $\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{3}{3}; \frac{4}{3}$

② 1

③ 0,4; 0,8; 1,2; 1,6.

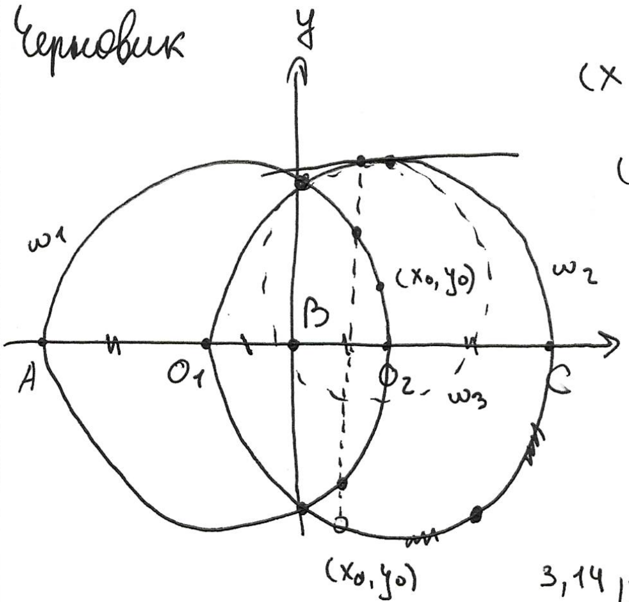
$\Rightarrow$ Ответ: $\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1; \frac{4}{3}$; 0,4; 0,8; 1,2; 1,6.

7



Пусть A_1 - первая точка бок. ребра, до которой спустился путешественник, проведем через A_1 плоскость $\alpha \parallel (ABCD)$. Пусть она пересек. ост. 3 ребра в точках B_1, C_1, D_1. Опустим $\perp$ из D на α $\Rightarrow$ исх. из условия $\angle DA_1H = 45°$ $\Rightarrow$ т.к $\angle A_1HD = 90$, то $\triangle ADH$ - р/б $\triangle$. $\Rightarrow$ $\Rightarrow AH = DH$. Опустим $\perp$ из H на A_1D_1 $\Rightarrow$ $\triangle A_1HT$ - $\triangle$, $\triangle DHT$ - $\triangle$, т.к $DH \perp$ к $\alpha \supset HT$ ~~$\Rightarrow$ т.к $AH = DH$, HT общая, то т.к $\angle A_1TH = \angle THD = 90°$, $\triangle AHT = \angle DHT$ $\Rightarrow$ $DT = A_1T$. $\Rightarrow$ $\triangle A_1DT$ - р/б $\triangle$. $\Rightarrow$ $A_1D = \sqrt{2} A_1T = \sqrt{2}(A_1D_1 - AD)$. Аналогично применяя рассуждения для 4 следующих косых прямых имеем: $l_2 = \sqrt{2}(A_2D_2 - A_1D_1)$, $l_3 = \sqrt{2}(A_3D_3 - A_2D_2)$, $l_4 = \sqrt{2}(A_4A_3 - A_4)$.~~

Черновик



$(x-\frac{R}{2})^2+y^2=R^2$

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$

$3{,}14 \mid 2 < \boxed{1{,}6}$

$(\cos\pi x+\cos2\pi x)(\cos^2\pi x$

$\cos^3\pi x=f(x)$

$(\cos\pi x+\cos2\pi x-\cos4\pi x)^3+\cos^3 4\pi x$

$f(x)+f(2x)=f(4x)$

$(a+b-c)^3+c^3=(a+b)(a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc+$
$+ac+bc+c^2+c^2)$

$\cos^3\pi x+\cos^3 2\pi x=((\cos\pi x+\cos2\pi x)(\cos^2\pi x+\cos^2 2\pi x+2\cos\pi x\cos2\pi x$
$-2\cos\pi x\cos4\pi x-$
-2

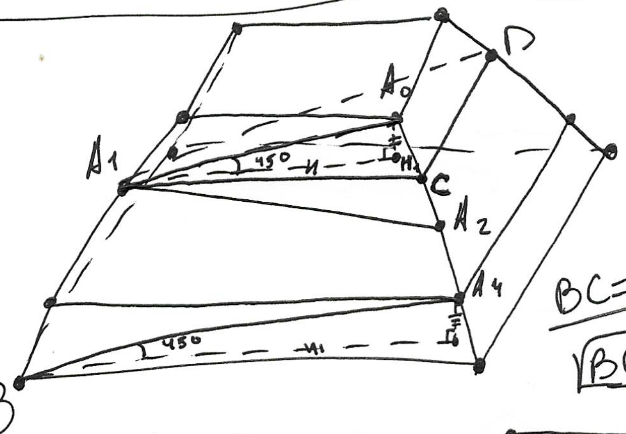
$\cancel{(a+b)}$ $\cancel{a^3}$ $(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$\cancel{a^2}-ab+\cancel{b^2}=\cancel{a^2}+\cancel{b^2}+3c^2+2ab-3ac-3bc\Rightarrow$

$\Rightarrow c^2+ab-ac-bc=0\Rightarrow a(b-c)-c(b-c)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}(a-c)(b-c)=0\\ a+b=0\Rightarrow\end{array}\right.$

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=c\\ b=c\\ a=-b\end{array}\right.$

А-старше

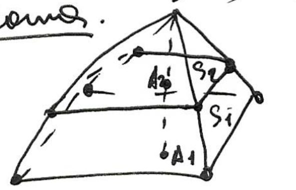


$\frac{\sum A_iA_{i+1}}{\sqrt2}=\boxed{h}$

A_0H_1 - высота.

$BC=AC=\boxed{\sqrt{48}}$

$\boxed{BC=t-8}$

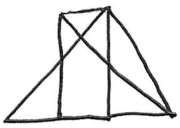


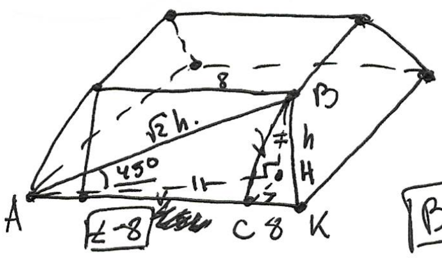
$\cancel{\frac{S_1}{S_2}}$ $\frac{S_2}{S_1}=\left(\frac{SA_2}{SA_1}\right)^2$

$h=\sqrt2$

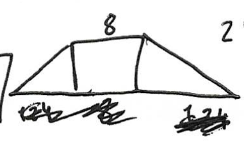
$\frac{8}{S_1}=S$

$256 \mid 2$
248





$\boxed{BC=AC}$



черновик

1) $\sqrt{24} = 2\sqrt{6} \Rightarrow \sqrt{(\sqrt{6}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{6}-1)^2} = \sqrt{6} + 1 \cancel{+} \sqrt{6} + 1 = 2\cancel{\sqrt{6}}$

$\sqrt{(2x+3)^2} + \sqrt{(3x+2)^2}$ $\quad x \to \infty: \; 5^3 \geq a + \underbrace{\sin 3^x}_{<1}$ $\quad \geq 124$

$-(x+1) \geq 0 \Rightarrow x+1 \leq 0 \Rightarrow \boxed{x \leq -1}$

$x = \log_3(2^x \pi) \Rightarrow$

$\Rightarrow 3^x = 2^x \pi. \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\sin 3x = 0}$

$\Rightarrow 3x + 2 + |2x+3| - (-(x+1)) = 2\sqrt{6}$

$3x + \cancel{2} + |2x+3| + x + 1 = \cancel{2\sqrt{6}}$

$4x + 1 + |2x+3| = 0$

1 $4x + 1 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow 6x + 4 = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$

2 $a > 0, x > 0$, min $\overset{>0}{a}$, что нет решений при $x > 0$ -?

125

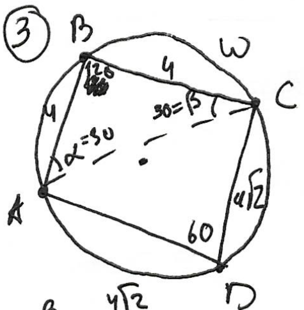
$5^{3-\frac{1}{x}} - \sin 3^x \geq a$

при $x \to 0$ $\quad 5^{3-\frac{1}{x}} \to 0$

$\sin 3^x \to 0$

$\left(3 - \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$

$\frac{125}{5^{\frac{1}{x}}} - \sin 3^x$ $\quad f'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \ln 5 \cdot 5^{3-\frac{1}{x}} - \ln 3 \cdot 3^x \cdot \cos x$

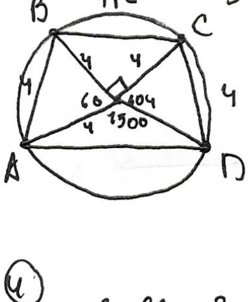
3 

$AD^2 + CD^2 -$

$R_\omega = 4$

$\frac{BC}{\sin\alpha} = 2R \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{2}, \sin\beta = \frac{1}{2}$

$AC^2 = 2 \cdot 4^2 (1 - \sin 60)$ $\quad$ 150 $\quad$ 30



$60 + 60 + 90 = 210$ $\quad$ 8

$\Rightarrow S = 4 \cdot \overset{2}{\cancel{4}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} + \cancel{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{4^2} + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} =$

$= 8 + 4 + 8\sqrt{3} \cancel{=} 12 + 8\sqrt{3}$

4 $a^3 + b^3 - c^3 = (a+b-c)^3$ $\quad (a+b-c)^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc)$

$(a+b-c) =$

Черновик.

а) $a_i, b_i > 0$. $\qquad f_i$ - равны! $\qquad a_1+b_1+a_2+b_2+a_3+b_3$ - ? $= a_1+a_2+a_3 = 3(a_1+a_2+a_3)$

$x^3+b_1x^2+12x+a_1x^2+a_1b_1x+12a_1=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f_1(x)=x^3+(a_1+b_1)x^2+(12+a_1b_1)x+12a_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow f_2(x)=x^3+(a_2+b_2)x^2+(15+a_2b_2)x+15a_2$

$f_3(x)=x^3+(a_3+b_3)x^2+(20+a_3b_3)x+20a_3$

$12a_1=15a_2=20a_3 \Rightarrow a_i \neq a_j$.

$x_1+x_2=-b_1$

$\cancel{a_2+a_3=+b_1}$

$\cancel{a_1+a_3=+b_2}$

$-a_2+(-a_3)=-b_1 \Rightarrow a_2+a_3=b_1$

$a_1+a_3=b_2$

$a_1+a_2=b_3$

$a_2=\frac{4}{5}a_1$

$a_3=\frac{3}{5}a_1$

$12+a_1(a_2+a_3)=15+a_2(a_1+a_3) \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{12}+a_1a_3=\cancel{15}+a_2a_3 \Rightarrow a_1a_3=3+a_2a_3$

$A_1T=A_1D_1$

$\Rightarrow a_1\cdot\frac{3}{5}a_1=3+\frac{4}{5}a_1\cdot\frac{3}{5}a_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3(a_1+\frac{4}{5}a_1+\frac{3}{5}a_1)=$ $\qquad AD+\frac{A_1D_1-AD}{2}=\frac{A_1D_1+AD}{2}$

$\Rightarrow 15a_1^2=45+12a_1^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1^2=\sqrt{15} \Rightarrow a_1=\sqrt{15}$

$=\frac{3}{5}(12a_1)=\frac{36\sqrt{15}}{5}=\boxed{\frac{36\sqrt{3}}{\sqrt{5}}}$

$V=S_{\text{снар}}+2\cdot S_{\text{внутр}}$.

б)