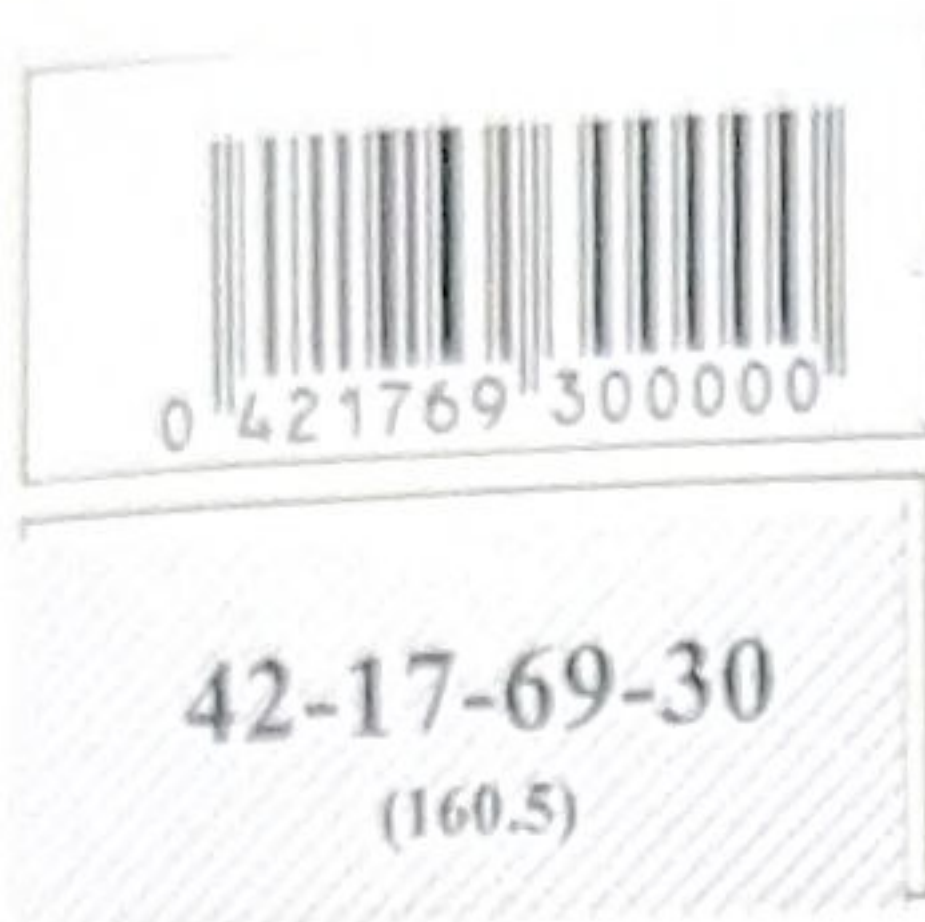




МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 10 класс

Место проведения Москва
город

дедлайн

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников "Ломоносов"
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Журотасенко Ульяна Игоревна
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

выход: 13:13 - 13:17

Дата

«13» апреля 2025 года

Подпись участника

Ульяна

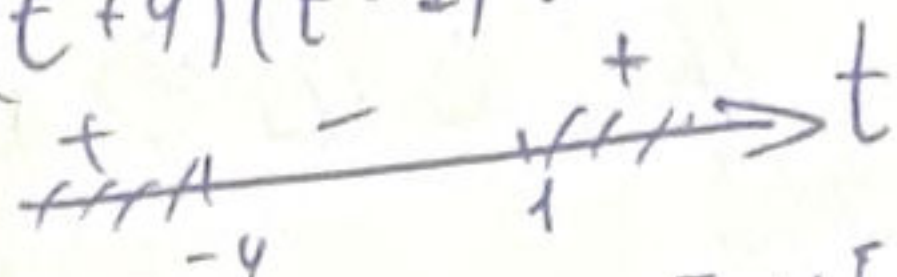
$$① \sqrt{\log_2^2 x + 3\log_2 x} - \sqrt{\log_2^2 x + 3\log_2 x - 4} \geq \log_2 x + 1$$

Пусть $t = \log_2 x$. Здесь $x > 0$, ~~и~~ $t \in \mathbb{R}$.

$$\sqrt{t^2 + 3t} - \sqrt{t^2 + 3t - 4} \geq t + 1 \quad (*)$$

Ограничения: 1) $t^2 + 3t - 4 \geq 0$

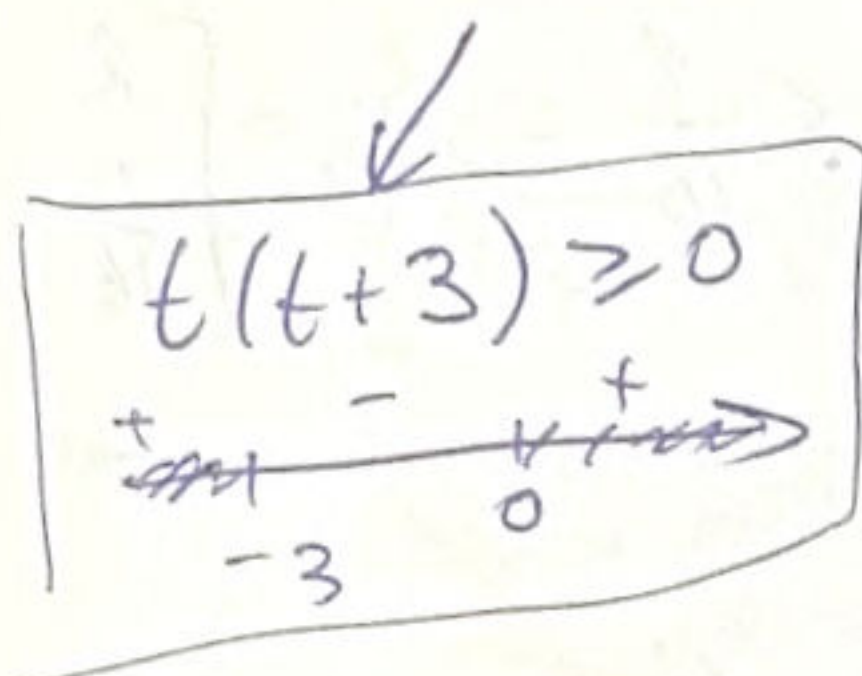
$$(t+4)(t-1) \geq 0$$



$$t \in (-\infty; -4] \cup [1; +\infty).$$

$$2) t^2 + 3t - \sqrt{t^2 + 3t - 4} \geq 0$$

$$t^2 + 3t \geq \sqrt{t^2 + 3t - 4}$$



Пусть $a = t^2 + 3t$

$$a \geq \sqrt{a-4}; a \geq 0, a-4 \geq 0$$

$$a^2 \geq a-4$$

$$a^2 - a + 4 \geq 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot 4 < 0 \Rightarrow \text{всегда выполнено}$$

Значит, ограничение —
 $t \in (-\infty; -4] \cup [1; +\infty).$

Теперь переходим к ур-ю (*).

при $t \leq -1$ н-во будет выполнено, т.к. левая часть всегда ≥ 0 ,
а правая — всегда ≤ 0 .

$\Rightarrow$ при $t \in (-\infty; -4]$ верно

при $t \geq -1$ возведем в квадрат, т.к. обе части ≥ 0

$$|t^2 + 3t - \sqrt{t^2 + 3t - 4}| \geq t^2 + 2t + 1$$

поскольку выражение,
 ≥ 0

$$t^2 + 3t - \sqrt{t^2 + 3t - 4} \geq t^2 + 2t + 1$$

$$t - 1 \geq \sqrt{t^2 + 3t - 4}$$

$$t^2 - 2t + 1 \geq t^2 + 3t - 4$$

$$5t \leq 5 \Rightarrow t \leq 1 \Rightarrow t = 1, \text{ т.к.}$$

Чтобы н-во было выполнено, t не может
быть < 1 , т.к. правая часть $\geq 0 \Rightarrow$
левая тоже ≥ 0 . Тогда возведем в квадрат

подходит по ОДЗ

стр 1

① (продолжение) Тогда (*) ~~выполнено~~ ^{числов} при $t \in (-\infty; -4] \cup \{1\}$.

$$\log_2 x = t \Rightarrow x = 2^t$$

$$\begin{array}{l} \text{при } t = 1 \quad x = 2 \\ \text{при } t \leq -4 \quad x \leq \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16} \end{array} \Rightarrow x \in \{2\} \cup \left(0; \frac{1}{16}\right].$$

Нужно найти все x_0 т.ч. $16x_0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x_0 \in \mathbb{Q}$, иначе

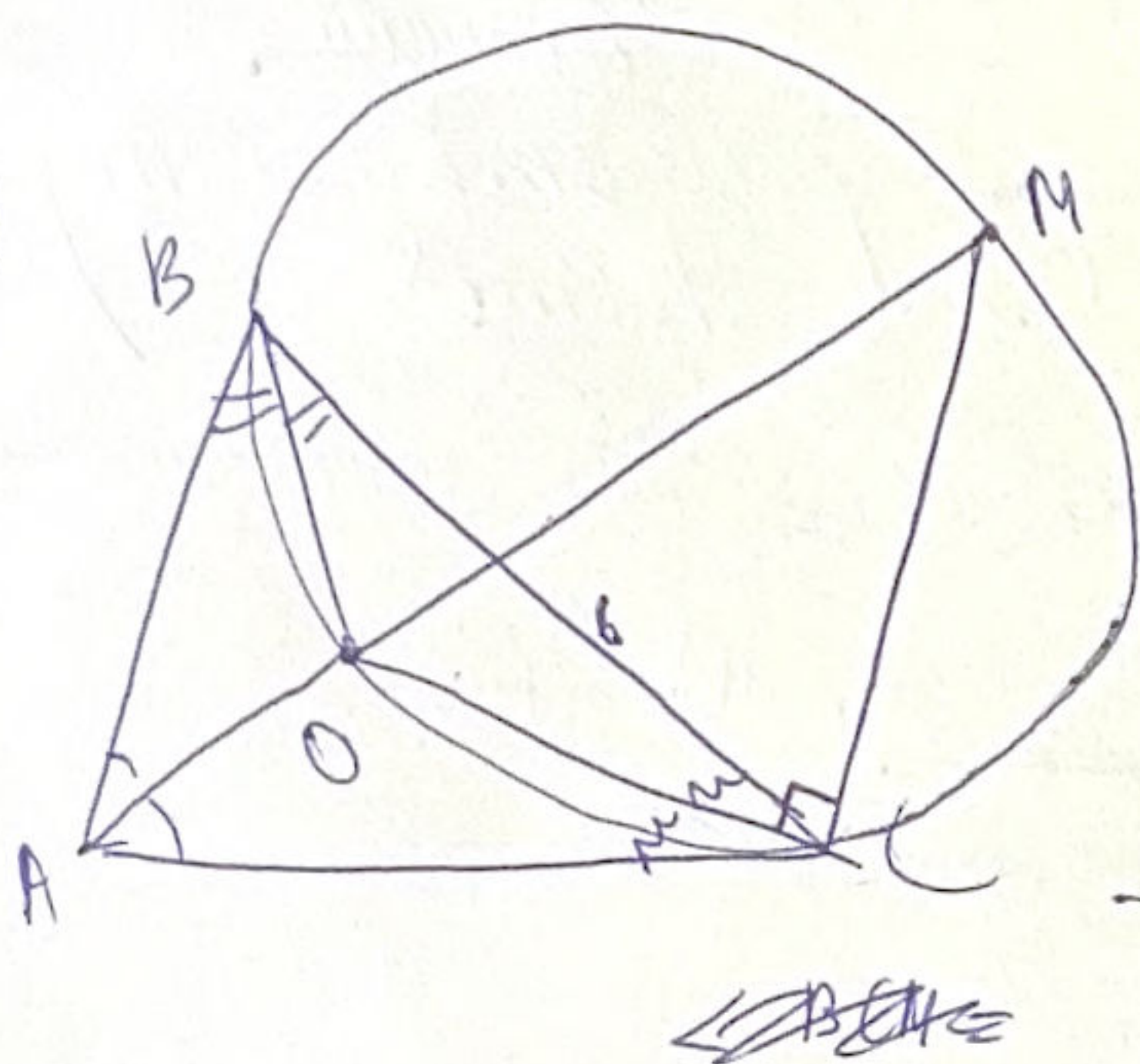
$x_0 \neq 2$, ^{несократ.}
Пусть $x_0 = \frac{p}{q}$; $16 \frac{p}{q} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 16 : q \Rightarrow q = \begin{matrix} 2 \\ 4 \\ 8 \\ 16 \end{matrix}$

$q = \begin{matrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{matrix}$ не подх., т.к. дроби больше $\frac{1}{16} \Rightarrow x_0 = \begin{matrix} 2 \\ \frac{1}{16} \end{matrix} \Rightarrow$

$16x_0 = \begin{matrix} 32 \\ 1 \end{matrix}$

Ответ: 33.

②



$BC = 6$; $\frac{AB}{AC} = 3$; $\angle BAC = 60^\circ$

^{решение:}
 $\angle ABC + \angle BCA = 180^\circ - \angle BAC = 120^\circ \Rightarrow$

$\angle CBO + \angle OCB = \frac{\angle ABC}{2} + \frac{\angle BCA}{2} = 60^\circ$

т.к. биссектрисы $\Rightarrow \angle BOC = 180^\circ - \angle CBO - \angle OCB = 120^\circ$

$\angle BCM = \angle BOM$, как вписанные, опирающиеся на 1 дугу

$\angle BOM = \angle ABO + \angle BAO$, как внешний

$\angle OCM = \angle OCB + \angle BCM = \angle OCB + \angle ABO + \angle BAO =$
 $= \frac{\angle BAC}{2} + \frac{\angle ACB}{2} + \frac{\angle ABC}{2} = 90^\circ$, т.к. биссектрисы

стр. 2

② (продолжение)

$\angle OCM = 90^\circ \Rightarrow OM$ - диаметр

Теорема синусов для $\triangle BOC$: $\frac{BC}{\sin \angle BOC} = d_{\text{опис}} = OM$

Тогда $OM = \frac{BC}{\sin \angle BOC} = \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{4 \cdot 3}{\sqrt{3}} = \underline{4\sqrt{3}}$

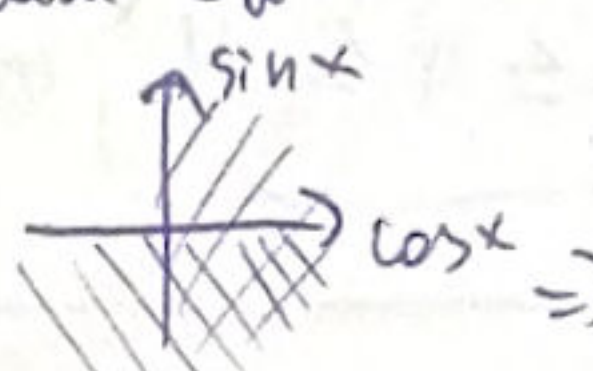
Ответ: $4\sqrt{3}$.

③ $\sqrt{\cos x} + 2\sqrt{-3\sin x} > 2\sqrt{\cos x} - \sqrt{-3\sin x}$ ~~или $\sqrt{\cos x} > \sqrt{-3\sin x}$~~

ОДЗ:

$$\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ -3\sin x \geq 0 \\ \sqrt{\cos x} - \sqrt{-3\sin x} \geq 0 \end{cases}$$

Решим ОДЗ:

$$1) \begin{cases} \cos x \geq 0 \\ \sin x \leq 0 \end{cases}$$


$\Rightarrow x \in [-\pi/2; 0] + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

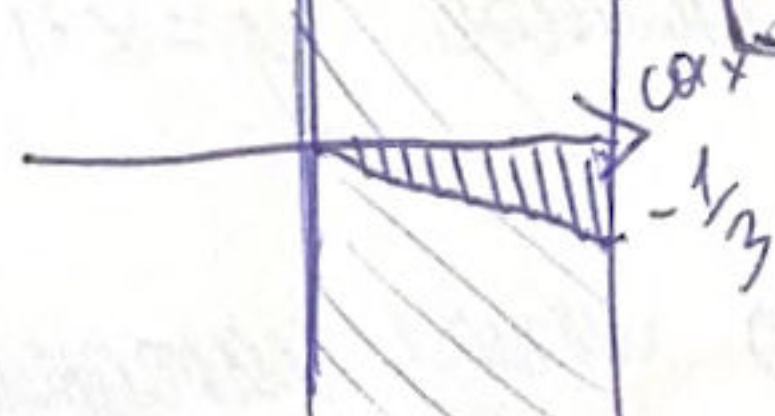
2) $\sqrt{\cos x} \geq \sqrt{-3\sin x}$
Возведем в квадрат.

$\cos x \geq 3\sin x \geq 0 \quad | : \cos x$
при $\cos x > 0$

$1 + 3\operatorname{tg} x \geq 0$

$\operatorname{tg} x \geq -\frac{1}{3} \Rightarrow$

(учтем ОДЗ 1) $x \in [\arctg(-\frac{1}{3}); 0] + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$



при $\cos x = 0$ $\sin x = -1$ неверно

Возведем в квадрат, т.к. обе части ≥ 0

$\sqrt{\cos x} + 2\sqrt{-3\sin x} > 2\sqrt{\cos x} - \sqrt{-3\sin x}$
 $\sqrt{\cos x} + \sqrt{-3\sin x} > \sqrt{\cos x}$

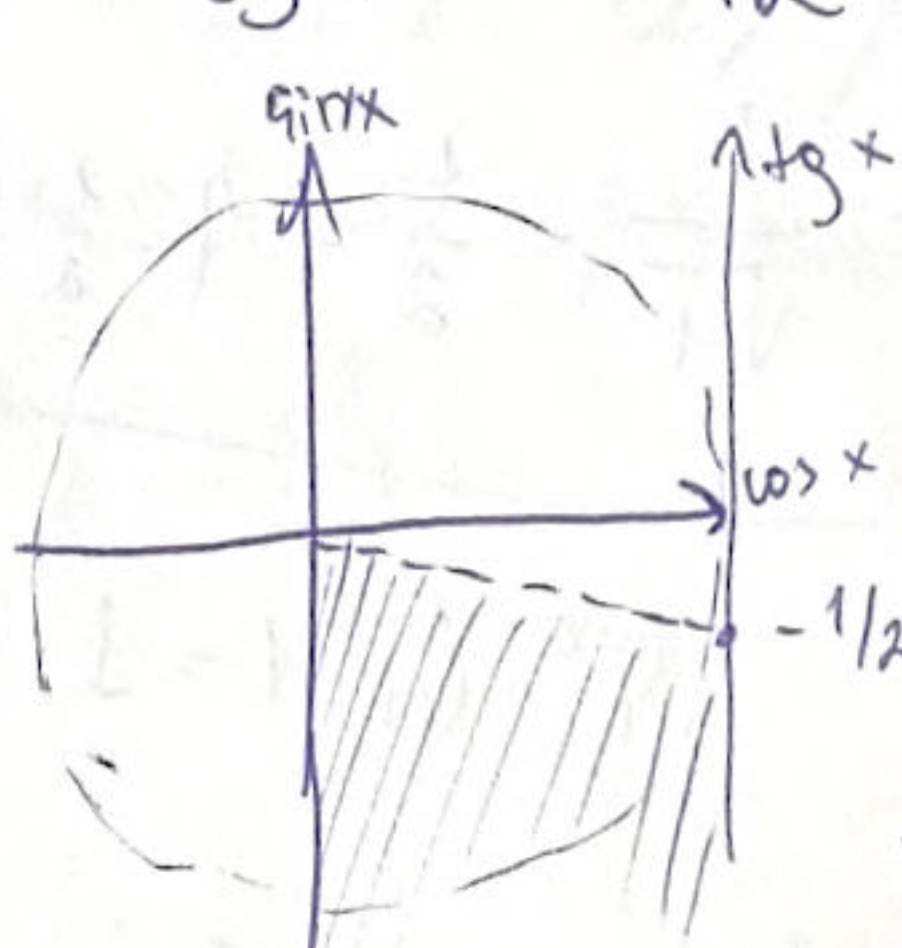
$2\sqrt{-3\sin x} > \sqrt{\cos x}$

Возведем в квадрат

$\cos x + 12\sin x < 0 \quad | : \cos x$ (всегда > 0 , см. ОДЗ)

$1 + 12\operatorname{tg} x < 0$

$\operatorname{tg} x < -\frac{1}{12}$ (учтем ОДЗ)



$\operatorname{tg} x \geq -\frac{1}{3}$

$\operatorname{tg} x \in [-\frac{1}{3}; -\frac{1}{12})$

Ответ:

$x \in [\arctg(-\frac{1}{3}); \arctg(-\frac{1}{12})] + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

стр. 3

④ $|x+1-a| + |4^x-a| = 4^x - x - 1$ (*)

Мисловка

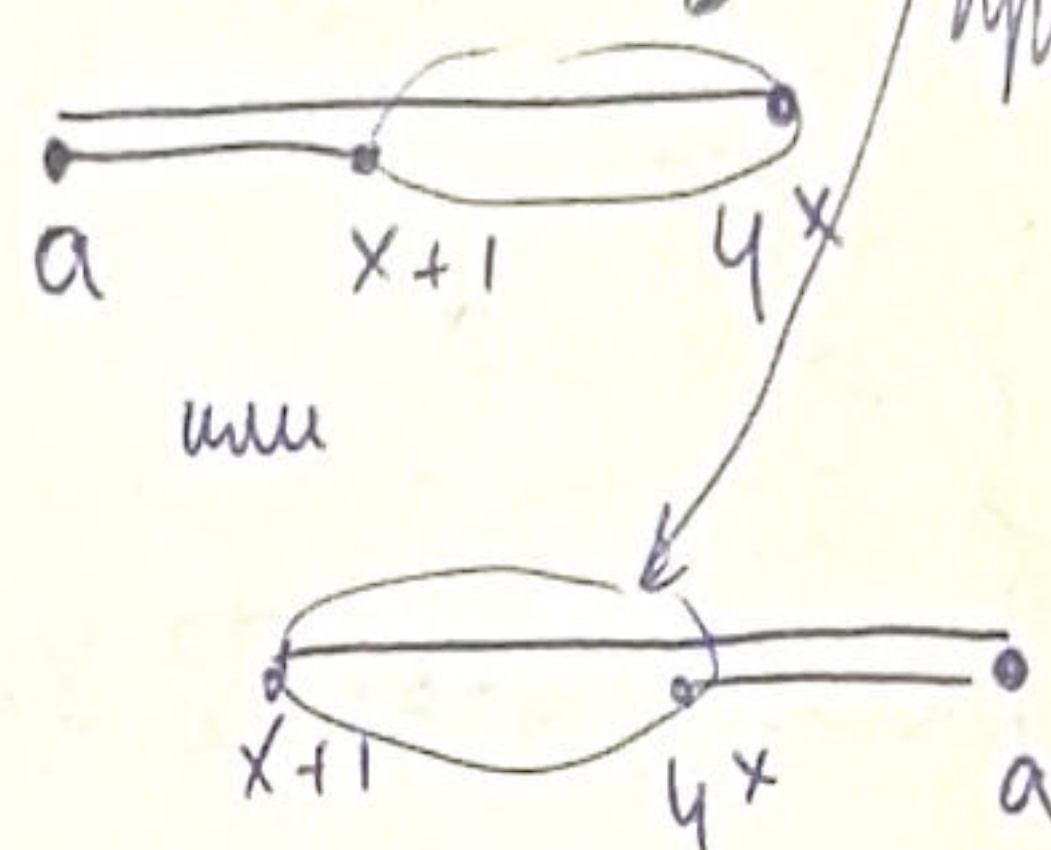
↑
расстояние
от $x+1$ до a
на числ. прямой

↑
расстояние
от 4^x до a
на числ. прямой

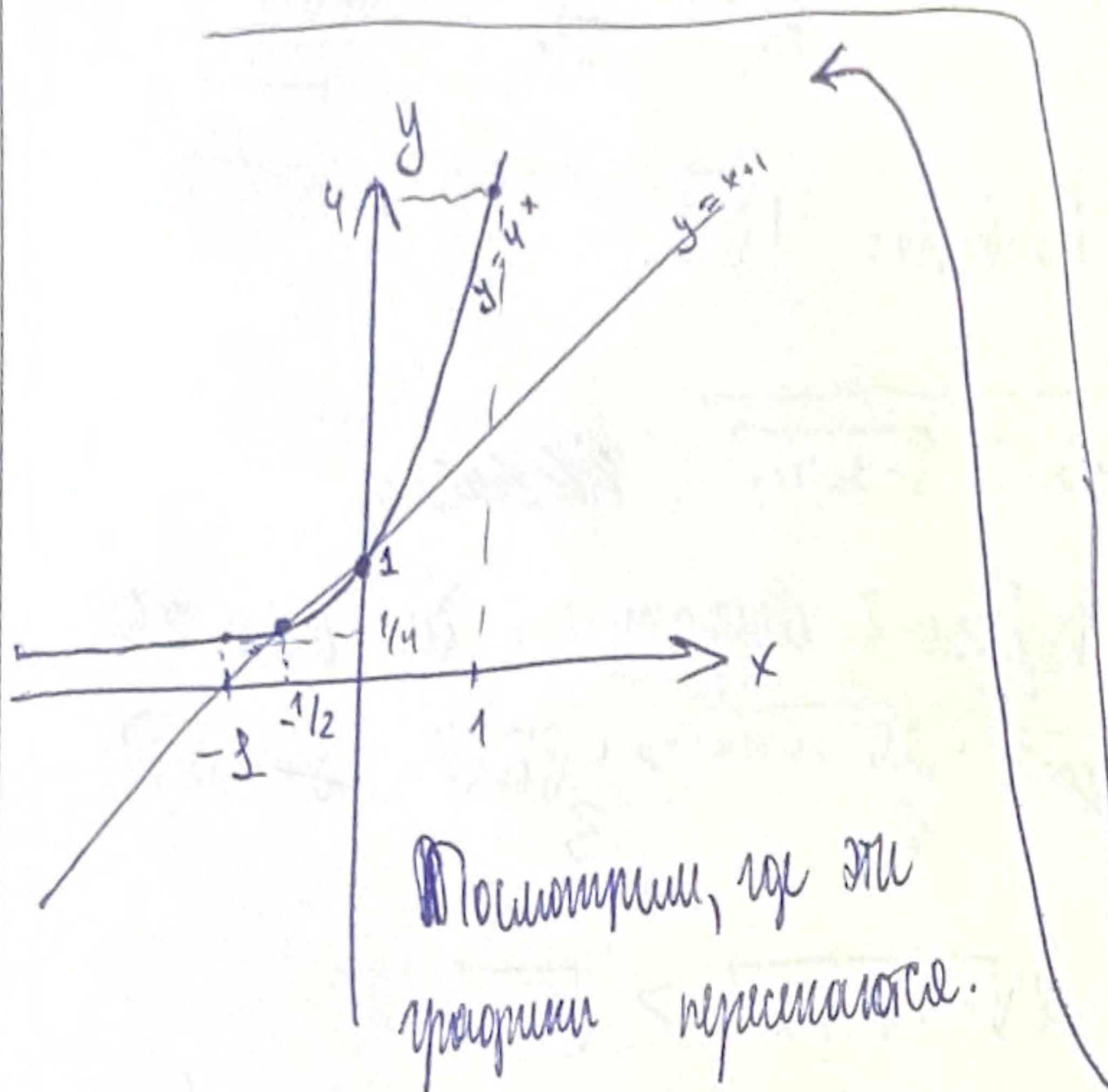
1) $4^x \geq x+1$, т.к. модуль ≥ 0

2) $4^x - x - 1 \leq |4^x - x - 1| =$
= расстояние на числ. прямой
от 4^x до $x+1$

При $a \notin [x+1; 4^x]$ любая
гаша $*$ > это расстояние $\rightarrow$ противоречие



Значит,
 $x+1 \leq a \leq 4^x$, чтобы было
решение.



$4^x = x+1$

$x=0$ и $x=-1/2$ — это пересек.

1) $x=0$
 $4^0 = 1 = 0+1$ ✓

2) $x = -1/2$
 $4^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} = -1/2 + 1$ ✓

Почему больше точек пересечения нет?

$(4^x)' = (e^{\ln 4 \cdot x})' =$
 $e^{\ln 4 \cdot x} \cdot \ln 4 = 4^x \cdot \ln 4$

$(4^x)' = 1$, когда $4^x \cdot \ln 4 = 1 \Rightarrow x = \log_4 \frac{1}{\ln 4}$ — одна точка,
когда производная равна коэффициенту к прямой $y=x+1$.

Если бы точек пересечения было больше двух, между которыми
функции пересекались бы точка, ~~где~~
производная $y=4^x$ в которой равнялась бы
уловому коэффициенту прямой, соот-
ветствующей точке пересечения (по ГЛ Лагранжа).

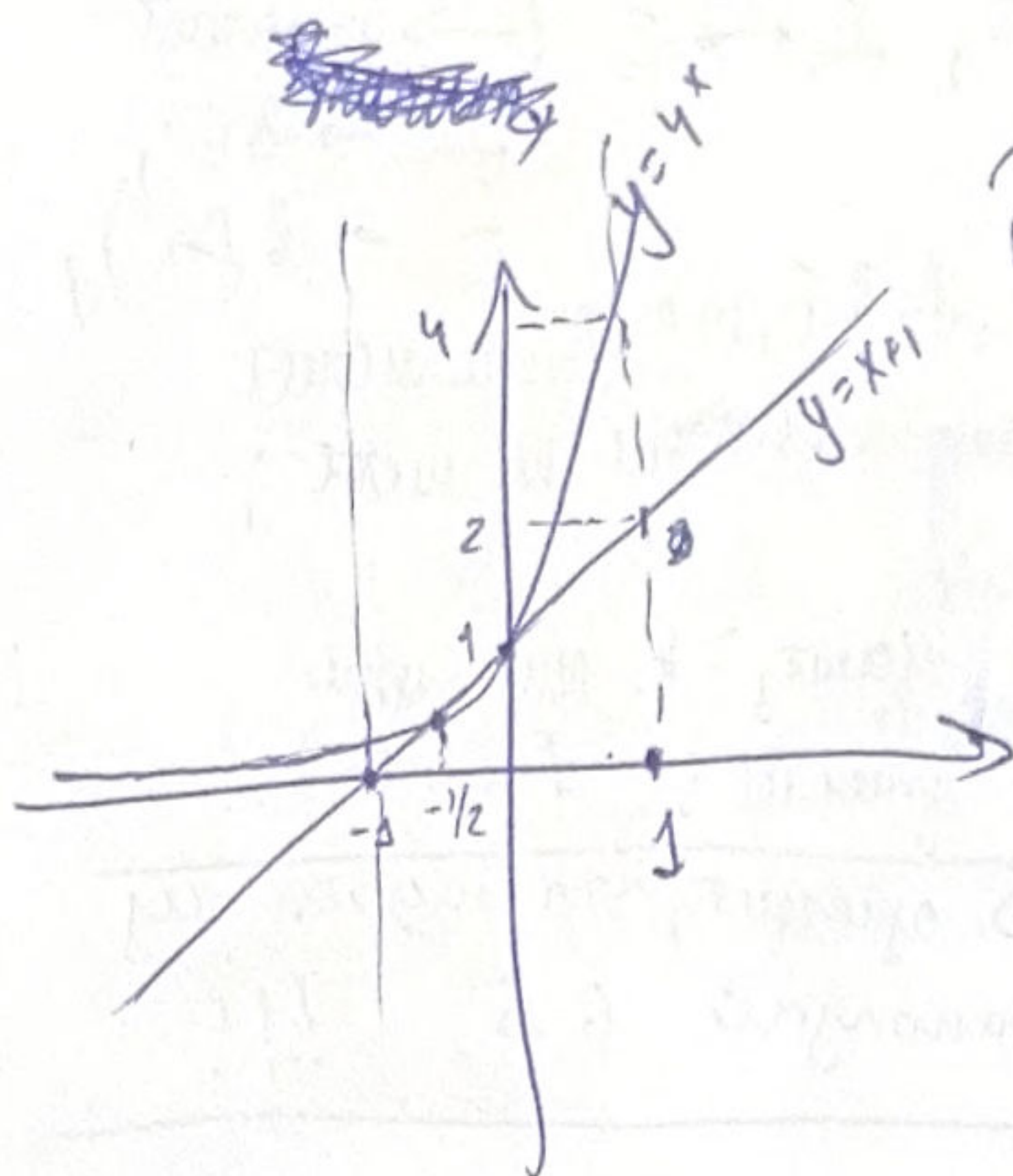


стр. 4

④ (продолжение)

(Числовые)

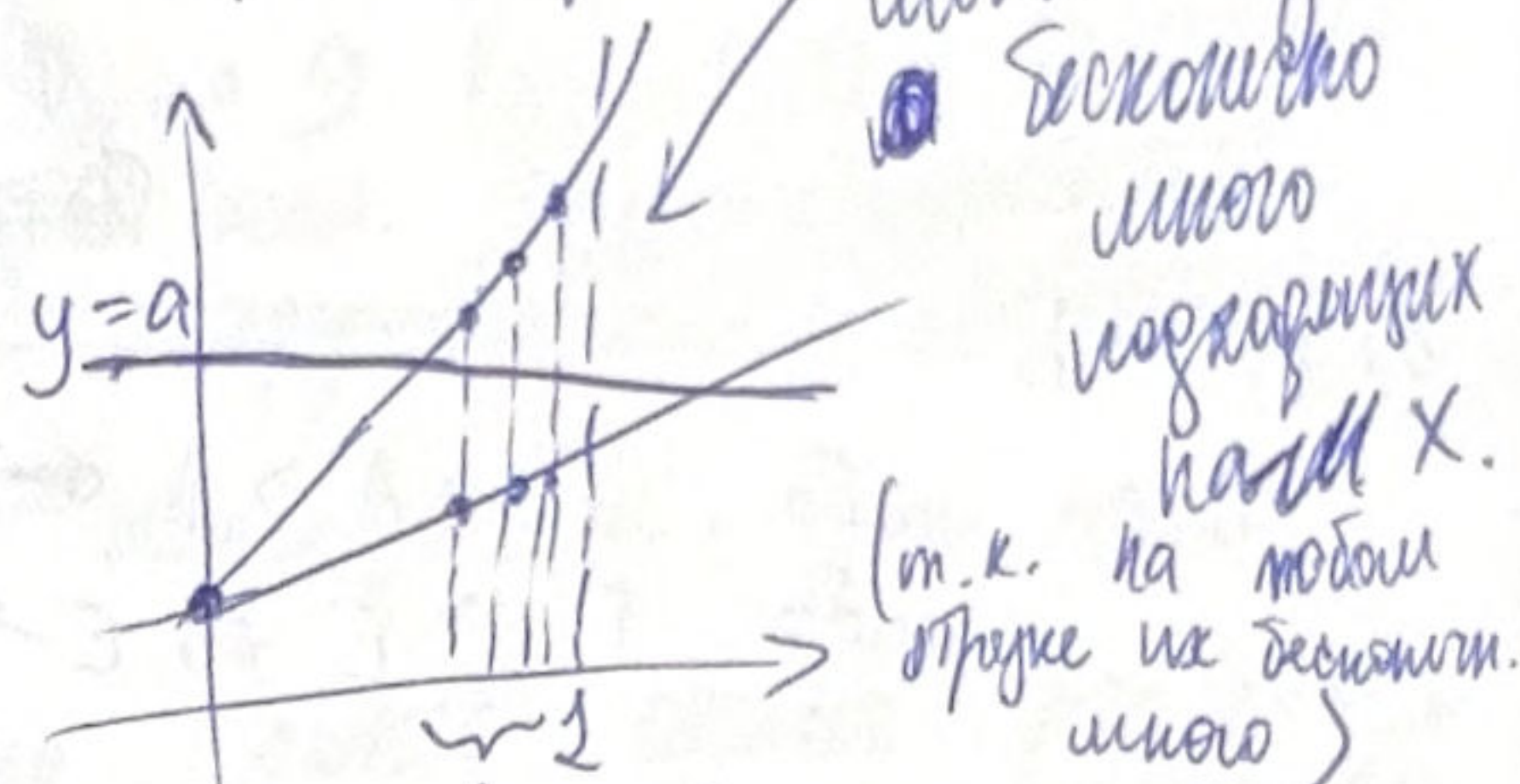
(этот координатный = 1, т.к. обе точки принадлежат прямой на $y = x + 1$). Точка с описанным выше св-вом одна $\rightarrow$ ~~две~~ точки пересечения не более двух.



Будем давать прямую $y = a$.

• $a > 4$ нет решений на $[-1; 1]$ $x + 1 \leq a \leq 4^x$

• $a \in (1; 4]$ решений много



• $a = 1$ 1 решение (т.к. 1 точка перес.)

• $a \in (-1/2; 1)$ решений нет, т.к.

• $a = -1/2$ 1 решение $4^x < x + 1$

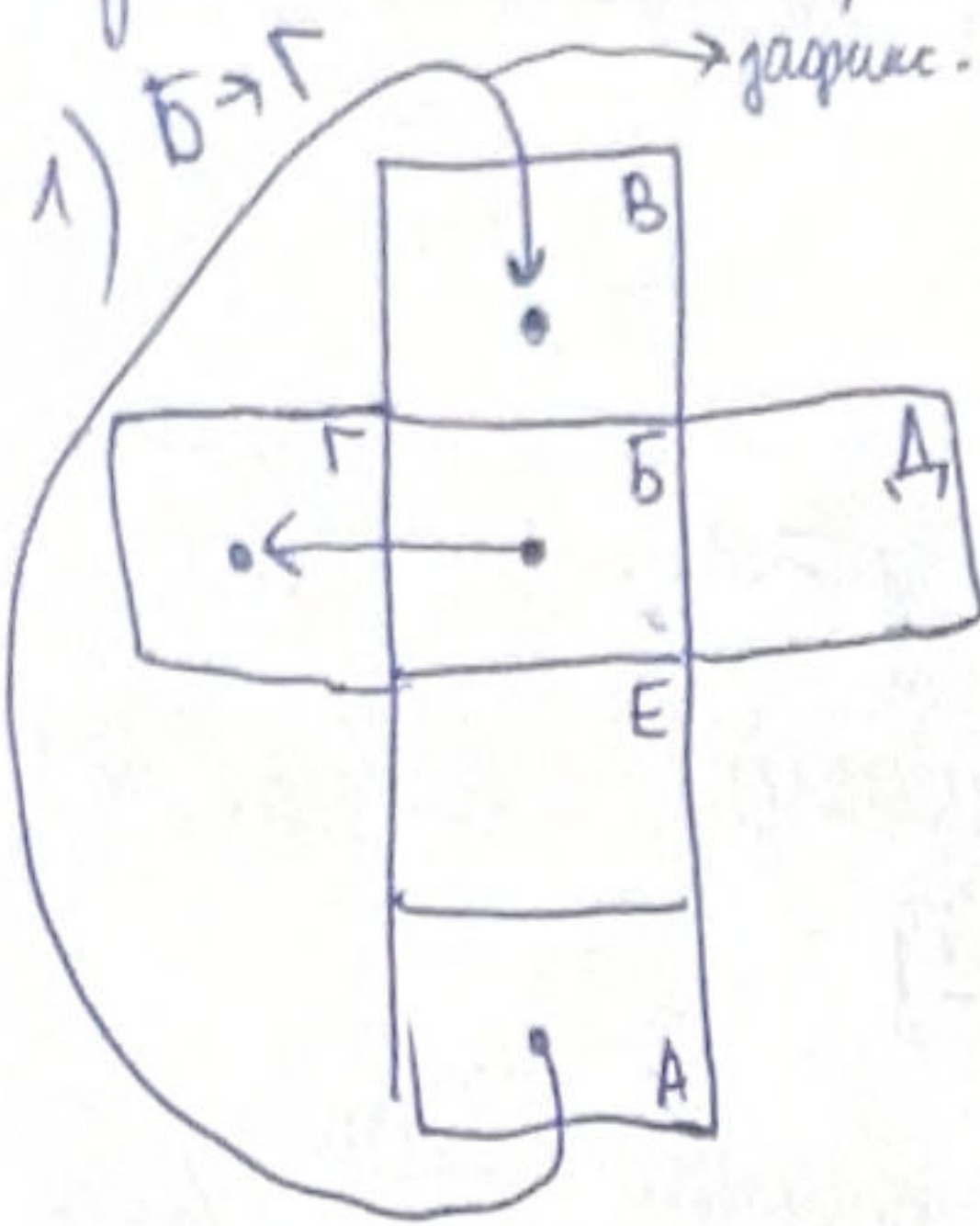
• $a \in [-1; -1/2)$ решений бесконечно много

• $a < -1$ нет решений

Ответ: ~~для~~ $a \in \{1; -1/2\}$.

Чистовик

5) Зафиксируем одно ~~лицо~~ и его приращение (выборки строки, не нам подходить)
уменьше бумажки, т.к. они все одинаковые. Рассмотрим случаи:



а) Путь из Б прямо в А

Тогда либо Γ в Б, $A \leftrightarrow E$ ($\leftrightarrow$ означает

либо Γ в Е, $E \rightarrow B, A \rightarrow B$, т.к. А не может остаться на месте;

(Γ в Б или А не может, т.к. они уже заняты: $A \leftrightarrow B$).

$A \rightarrow B$ означает, что путь из А приводит в Б !!!

б) $B \rightarrow Б$

Тогда либо $\Gamma \rightarrow A \rightarrow D \leftrightarrow E$,
либо $\Gamma \rightarrow E \Rightarrow E \rightarrow D, A \rightarrow A$, т.к. А не может ост. на месте

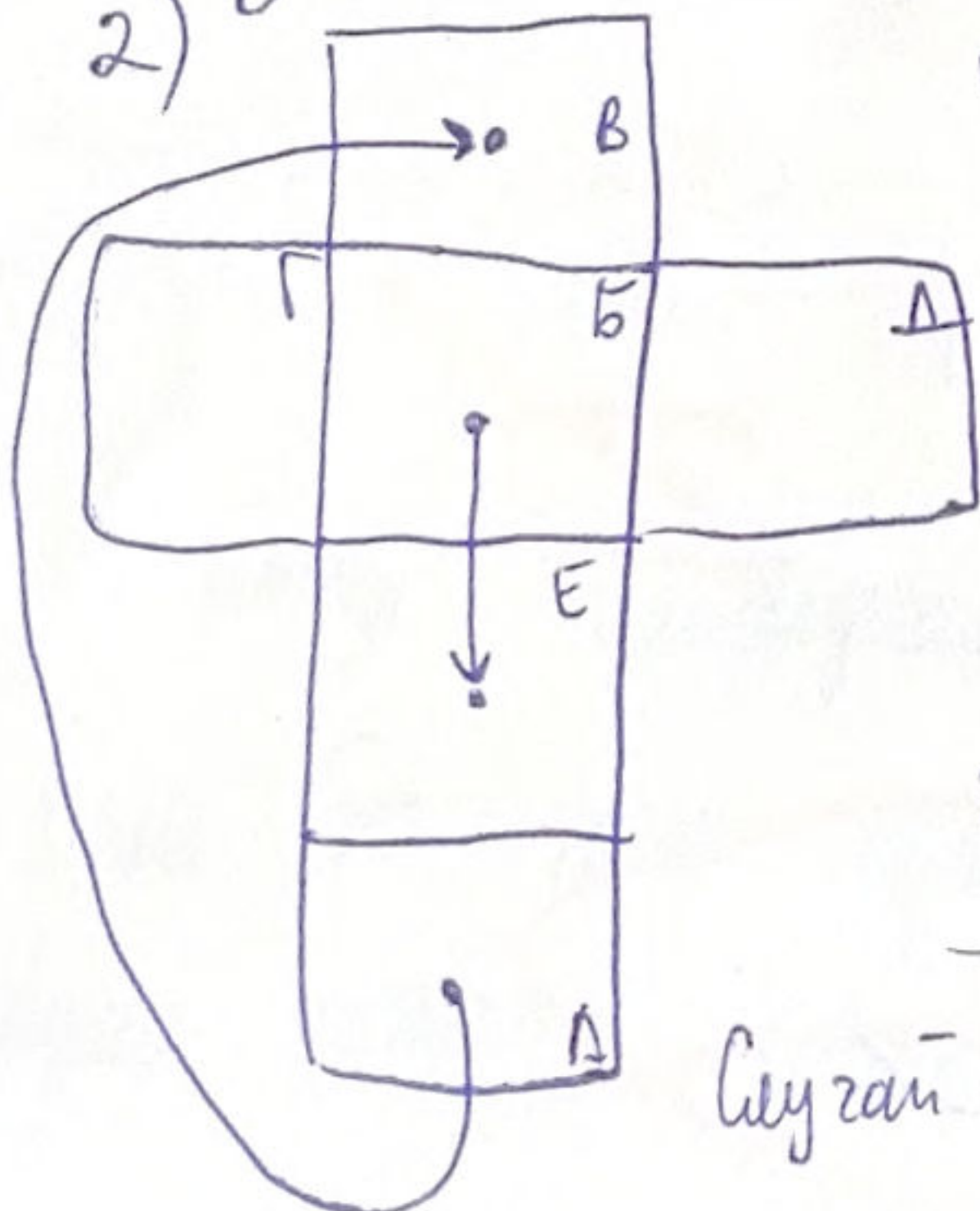
в) $B \rightarrow D$

Тогда либо $D \rightarrow Б \Rightarrow \Gamma \rightarrow E, E \rightarrow A$, т.к. Е не м.б. на месте,
либо $D \rightarrow E \Rightarrow \begin{cases} E \rightarrow A; \Gamma \rightarrow Б \\ E \rightarrow Б; \Gamma \rightarrow A \end{cases}$

либо $D \rightarrow A \Rightarrow \Gamma \rightarrow E, E \rightarrow Б$

в случае 1 7 вариантов

2) $B \rightarrow E$



а) $E \rightarrow Б \Rightarrow D$ и Γ могут переместиться только в А, противоречие

б) $E \rightarrow A \Rightarrow D$ и Γ могут переместиться только в Б, противоречие

в) $E \rightarrow \Gamma \Rightarrow$ либо $\Gamma \rightarrow Б \Rightarrow D \rightarrow A; Б \rightarrow D$;
либо $\Gamma \rightarrow A \Rightarrow Б \rightarrow D; D \rightarrow Б$

г) $E \rightarrow D$ (аналогично в), т.к. симметрично

т.к. А не м.б. на месте

Случай 3 ($B \rightarrow A$) симметричен 1) $\Rightarrow$ тоже 7 вариантов $\Rightarrow$ в случае 2 4 варианта

Тогда всего $7+7+4=18$ вариантов.

стр. 6

⑤ Всего вариантов: ^(Числовый) каждый из 5 (кроме записанного) цифр выбирает одно из 4 цифровых $\Rightarrow 4^5$

$$P(\text{вероятность}) = \frac{18}{4^5} = \frac{2 \cdot 9}{2^{10}} = \frac{9}{2^9} = \frac{9}{512}$$

Ответ: $\frac{9}{512}$

⑦ Если число ~~треугольное~~, сумма двух цифр равна цифре не оканчивающейся на девятку, то число цифровое по цифре меньше при увеличении на 1 $\Rightarrow$ одно из двух чисел нечетное $\Rightarrow$ рассматриваем только числа, оканчивающиеся на 9. Рассмотрим варианты четных чисел. ~~Другие записывать, чтобы не было ошибок.~~

Заметим, что если число — треугольное, то при прибавлении 1, оно станет оканч. на 0 $\Rightarrow$ чтобы оно осталось четным, оно должно быть четным

~~Рассмотрим~~ $aaa - 1$

Рассмотрим

$440 - 1 = 339$	X
$550 - 1 = 449$	X
$660 - 1 = 559$	X
$770 - 1 = 669$	X
$880 - 1 = 779$	X
$990 - 1 = 889$	X

$\Rightarrow$ среди треугольных таких чисел нет

~~Рассмотрим~~ 1) $1 \dots 9 \Rightarrow$ при +1 должно получиться $1a+1$ 0 или $1a+1$ a 0, чтобы $1+a = (a+1)+0$

Рассмотрим

$1010 - 1 = 1009$	X
$1100 - 1 = 1099$	X
$1230 - 1 = 1229$	X
$1320 - 1 = 1319$	X
$1320 - 1 = 1339$	X
$1340 - 1 = 1339$	X
$1430 - 1 = 1429$	X
$1450 - 1 = 1449$	V (1+4+4=9)
$1450 - 1 = 1439$	V (1+5+3=9)
$1540 - 1 = 1539$	X
$1560 - 1 = 1559$	X
$1650 - 1 = 1649$	V (1+6+4=9)
$1670 - 1 = 1669$	X
$1760 - 1 = 1759$	X
$1780 - 1 = 1779$	X
$1870 - 1 = 1869$	X
$1890 - 1 = 1889$	X
$1980 - 1 = 1979$	X

$\Rightarrow$ 3 числа

2) $2 \dots 9 \Rightarrow$ При прибавлении 1 число имеет вид $\overline{2a \ a+20}$,
либо $\overline{2a \cdot 2 \ a \ 0}$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} 2020-1 &= 2019 \times \\ 2200-1 &= 2199 \times \\ 2130-1 &= 2129 \times \\ 2310-1 &= 2309 \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2240-1 &= 2239 \times \\ 2350-1 &= 2349 \checkmark \quad (3+2+4=9) \quad | \Rightarrow 1 \text{ число} \\ \text{остальные} &> 2400 \end{aligned}$$

3) Переходный шаг $\begin{cases} 999+1=2000 \\ 999 \times 1=1000 \end{cases}$ не подходит

Тогда всего 4 числа

Ответ: 4

6) ~~сместил~~ O в $(0;0)$; парабола $-ax^2$

стр. 2

Мирнов

$\log_2 x = t$ ~~тогда~~ $x > 0, t$ -любое

$$\sqrt{t^2 + 3t} - \sqrt{t^2 + 3t - 4} \geq t + 1$$

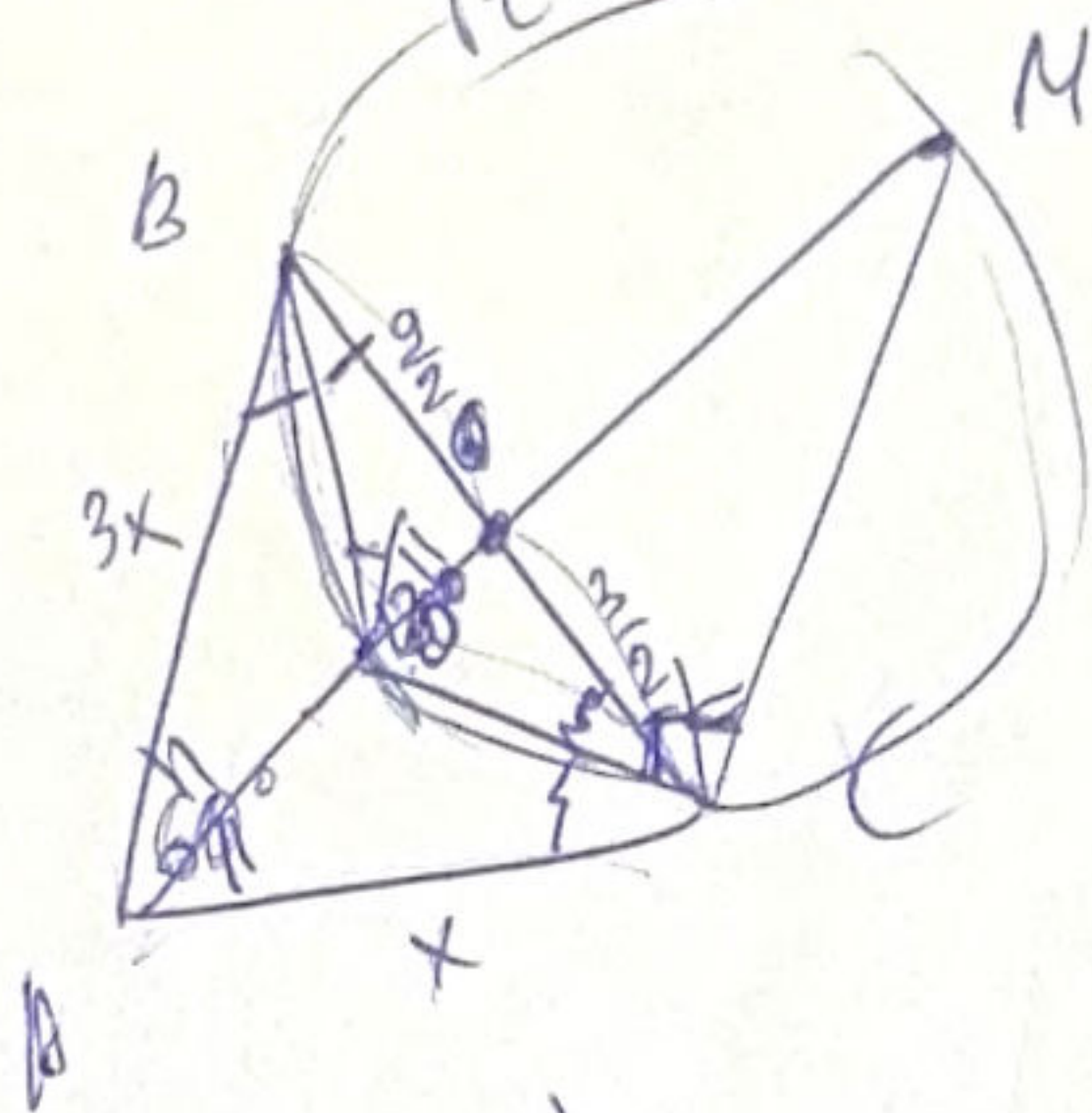
$$\frac{t^2 + 3t - \sqrt{t^2 + 3t - 4}}{t} \geq t^2 + 2t + 1$$

$$t - 1 \geq \sqrt{t^2 + 3t - 4}$$

$$t^2 - 2t + 1 \geq t^2 + 3t - 4$$

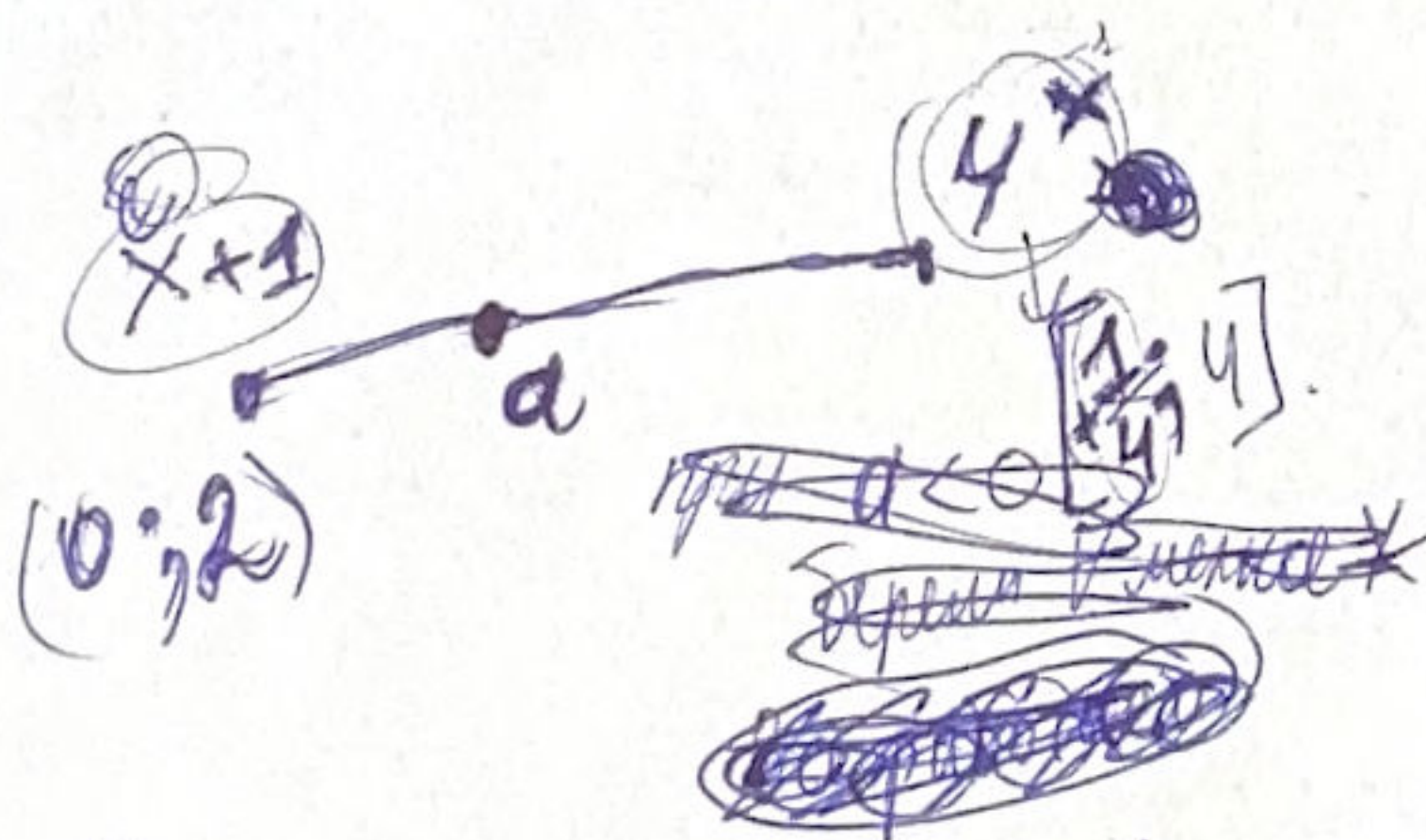
$$5t \leq 5$$

$$t \leq 1$$



$|a-b|$ — расстояние между a и b

Пусть $\begin{cases} a \neq x+1 \\ a \neq 4 \\ a \neq x \end{cases}$



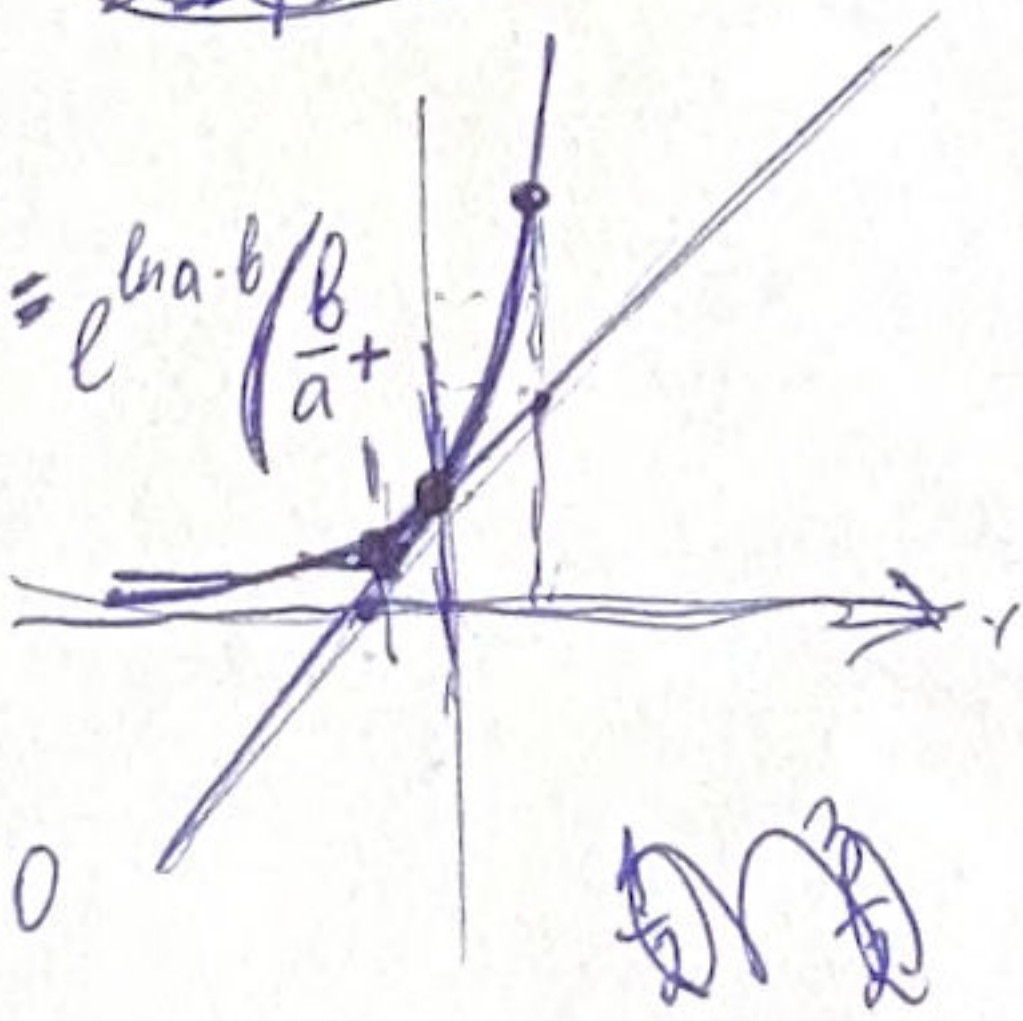
$$(a^b)' = (e^{\ln a \cdot b})' = e^{\ln a \cdot b} \left(\frac{b}{a} + \ln a \right)$$

$$(e^{\ln 4 \cdot x})' = 4^x \cdot \ln 4$$

$$4^x \cdot \ln 4 = 1$$

$$4^x = \frac{1}{\ln 4}$$

$$x = \log_4 \left(\frac{1}{\ln 4} \right)$$



$$4^x \cdot \ln 4 = 1$$

$$4^x = \frac{1}{\ln 4}$$

$$x = \log_4 \left(\frac{1}{\ln 4} \right)$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{4}} =$$



$$\frac{1}{4^6}$$

$$4^x \neq 11$$

$$t \geq -1$$

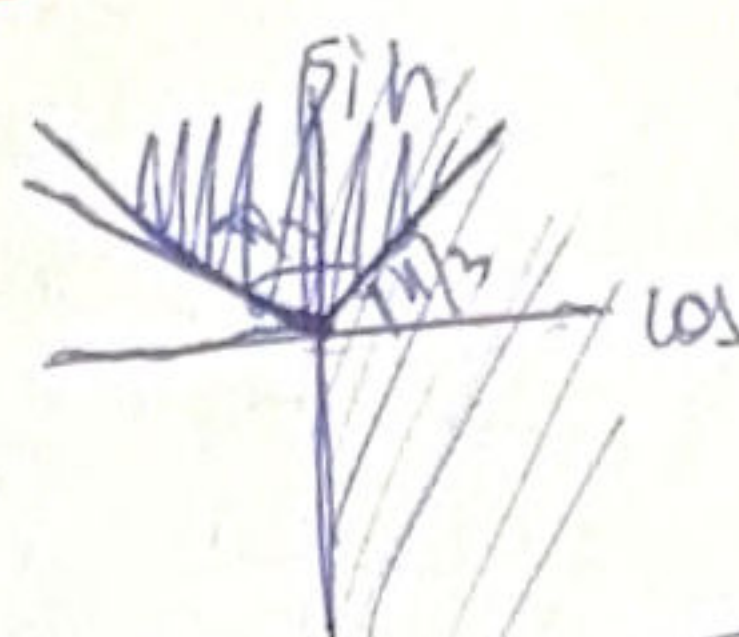
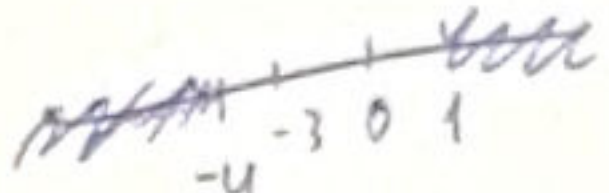
$$(t+4)(t-1) \geq 0 \Rightarrow t \geq 1$$

$$(t^2 + 3t) \geq \sqrt{t^2 + 3t - 4}$$

$$t(t+3)$$

$$a^2 \geq a - 4$$

$$a^2 - a + 4 \geq 0$$



$$x \in [\pi/3; \pi/2] + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt{\cos} + 2\sqrt{3} \geq 4\sqrt{\cos} - 2\sqrt{3} \sin$$

$$2\sqrt{\cos} < 4\sqrt{3} \sin$$

$$x = -1$$

$$|a| + |a - \frac{1}{4}| = \frac{1}{4}$$

$$a \in [0; \frac{1}{4}]$$

$$x = a - 1$$

$$x = a - 1$$

$$|4^{a-1} - a| = 4^{a-1} - a$$

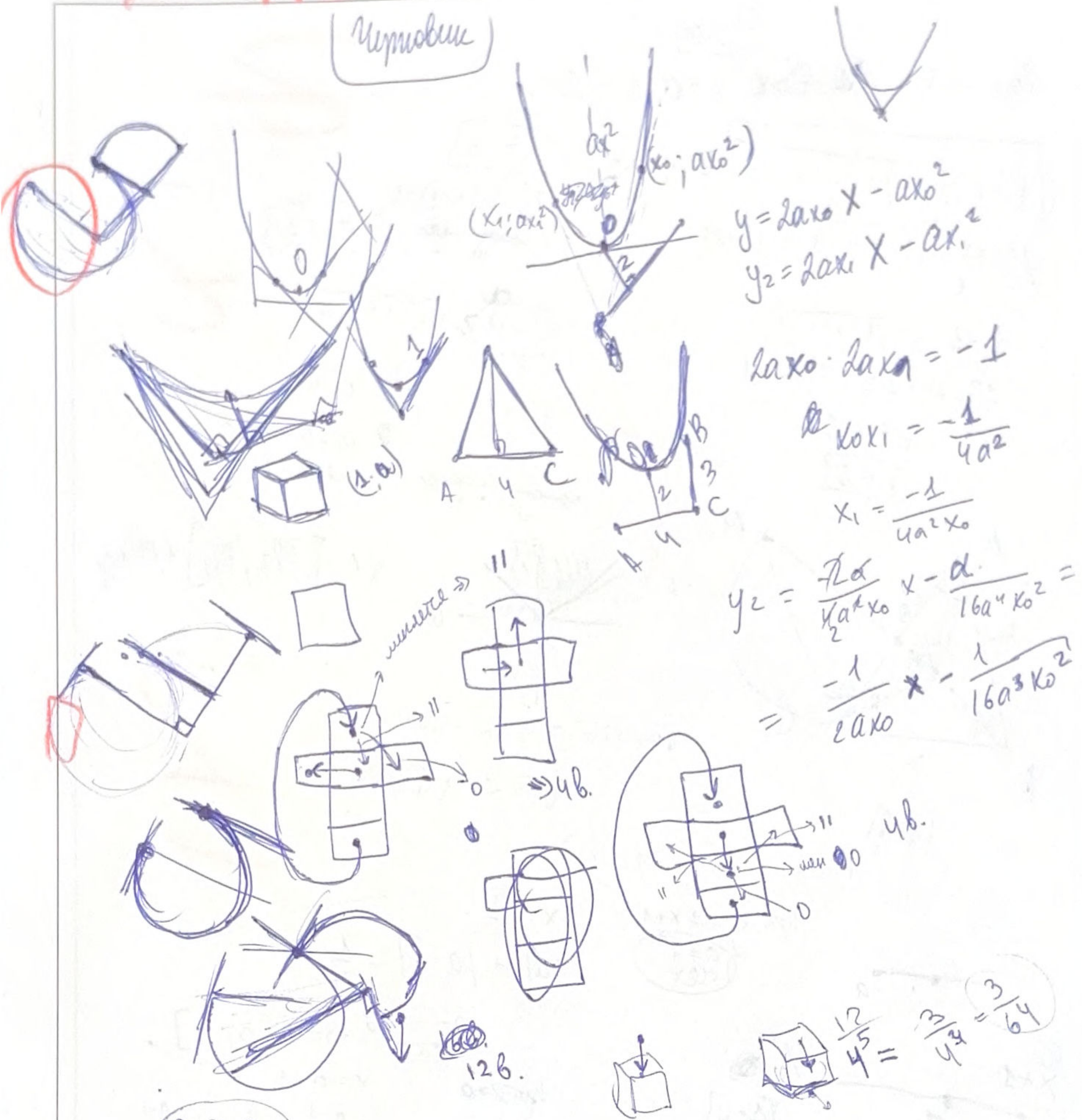
$$4^{a-1} - a > 0$$

$$\text{при } a \in [0; 2]$$

$$x+1 \geq 4^x + 2 \mid -4$$

$$a = 1 \text{ подходит}$$

Чертовик



222

4 22 | 3
13

4

