0 369036 460005

36-90-36-46
(161.37)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников 11 класс „Ломоносов"
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Лобова Михаила Дмитриевича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Сдал работу 14[16].

Дата

«13» ~~04~~ ~~04~~ апреля 2025 года

Подпись участника

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
36-90-36-46 (16 1.39)		+	+	+	–	+	~~7~~	–	–
							0		

6. Изначально принимали луч по прямой

36-90-36-46 (161.37)

Шу

Чистовик

N 1

~~60 (шестьдесят)~~ 65 (шестьдесят пять)

Исправлено по апелляции.

$$\sqrt{4x^2-12x+9}+\sqrt{x^2-6x+9}+\left(\sqrt{-(x-2)}\right)^2=\sqrt{3+\sqrt{8}}-\sqrt{3-\sqrt{8}}$$

$$\sqrt{(2x-3)^2}+\sqrt{(x-3)^2}+\left(\sqrt{2-x}\right)^2=\sqrt{(1+\sqrt{2})^2}-\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$$

При $x \leq 2$: $|2x-3|+|x-3|+2-x=1+\sqrt{2}-(\sqrt{2}-1)$

$$|2x-3|+|x-3|+2-x=2$$

$$|2x-3|+|x-3|-x=0$$

т.к. $x \leq 2$: $x-3<0 \Rightarrow |2x-3|+3-2x=0$

При $x \in [1,5;2]$: $2x-3+3-2x=0$

$0=0$

$\forall x \in [1,5;2]$

При $x<1,5$: $3-2x+3-2x=0$

$6=4x$

$x=1,5$

$\varnothing$

При $x>2$: решений нет, т.к. это противоречит ~~ОД~~ ОДЗ

Ответ: $x \in [1,5;2]$

Чистовик

N2

(*) $3^{5-\frac{1}{x}} \geq a + \sin 4^x$

~~Итак~~ $\forall x > 0: \; 3^{5-\frac{1}{x}} > 3^5 = 243$

$\forall x > : \sin 4^x \geq -1$

Выберем x такой, что: $\sin 4^x = 1, \; \frac{1}{x} \approx 0$

тогда $3^5 \geq a - 1$, не будет выполнятся

только при условии $a \geq 244$

Пусть $a = 243 + \Delta$, $0 < \Delta < 1$, тогда

при x, таких что $\sin 4^x = -1$: ~~будет выполнено~~

~~это~~ следующее: (*) можно представить в виде: $\frac{3^5}{3^{\frac{1}{x}}} \geq 243 + \Delta - 1$

$\forall x \; 3^{\frac{1}{x}} > 1$

$3^5 \geq 3^{\frac{1}{x}}(242 + \Delta)$

$243 \geq 3^{\frac{1}{x}}(242 + \Delta)$,

Очевидно, что для $\forall \Delta$ можно подобрать

x, такой что $3^{\frac{1}{x}}(242 + \Delta) \leq 243 \Rightarrow$ минимальное $a = 244$

Ответ: 244

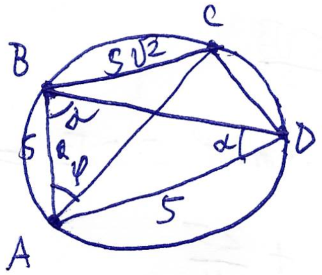
36-90-36-46 (161.37)

Чистовик

№3

Возможны две конфигурации сторон многоугольника:

I



① $\triangle ABD$ – равнобедренный $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ABD = \angle BDA \overset{=\alpha}{}$ – острый

② Из теоремы синусов:

$$\frac{\sin\alpha}{5} = \frac{1}{2\cdot R} = \frac{1}{10} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow$ ~~...~~

$\Rightarrow \alpha = 30^\circ$ (т.к. α – острый) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BAD = 180 - 60 = 120^\circ$

③ В $\triangle BCA$: $\frac{\sin\varphi}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{10}$ (теорема синусов) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi = 45^\circ$ (т.к. $\varphi + CAD = 120^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi \neq 135^\circ$)

④ Аналогично ② $\angle BCD = 30^\circ$ (если $\angle BCD = 150^\circ$, то $\varphi + \angle BCD > 180^\circ - \varnothing$)

⑤ Из ③ и ④ $\Rightarrow \angle ABC = 105^\circ \Rightarrow$

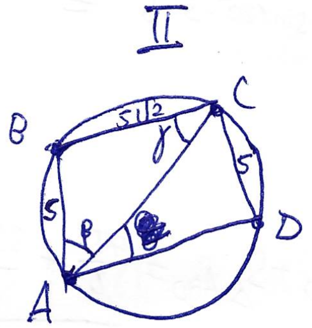
$\Rightarrow \angle CBD = 75^\circ$ (т.к. $\alpha + \angle CBD = \angle ABC$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow CD = 10 \cdot \sin 75^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ (из теоремы синусов)

⑥ ABCD – вписан в окружность $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BCD = 180^\circ - \angle BAD = 60^\circ$

II



Из теоремы синусов:

$\beta = 45^\circ$ или $\beta = 135^\circ$

$\gamma = 30^\circ$ или $\gamma = 150^\circ$

Заметим, что возможны только два сочетания β и γ: $\left[\begin{array}{l}\beta = 45^\circ;\ \gamma = 30^\circ \ (*) \\ \beta = 135^\circ;\ \gamma = 30^\circ \ (**)\end{array}\right.$

в остальных случаях $\beta + \gamma > 180^\circ$ $\varnothing$

При (**): $\angle ABC = 15^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ADC = 165^\circ$, однако, $\angle CAD$ т.к. $\angle CAD$ может принимать только значения 30° и 150°, такое невозможно. (значения ~~При (*)~~ $\angle CAD$ – из теоремы синусов).

При (*): $\angle ABC = 105^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ADC = 75^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CAD = 30^\circ$ (иначе $\angle CAD + \angle ADC > 180^\circ$) $\Rightarrow$

7. Чистовик

$S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2} \cdot \sin 60^0 \cdot 5\sqrt{2} \cdot \frac{10(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}} =$

$= \frac{150}{8} + \frac{50\sqrt{3}}{8} = \frac{75}{4} + \frac{25\sqrt{3}}{4}$

$S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} \cdot \sin 120^0 \cdot 5 \cdot 5 =$

$= \frac{25\sqrt{3}}{4}$

$S_{ABCD} = S_{\Delta BCD} + S_{\Delta ABD} = \frac{75}{4} + \frac{25\sqrt{3}}{2}$

~~$\angle ADC = 75^0$~~

$\Rightarrow \angle ACD = 75^0 \Rightarrow$

$\Rightarrow AD = \frac{10(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}}$ (из теоремы синусов)

$S_{\Delta ADC} = \frac{1}{2} \sin 75^0 \cdot 5 \cdot \frac{10(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}} =$

$= \frac{25}{2} + \frac{25\sqrt{3}}{4}$

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sin 105^0 \cdot 5 \cdot 5\sqrt{2} =$

$= \frac{25\sqrt{3}}{4} + \frac{25}{4}$

$S_{ABCD} = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ADC} = \frac{75}{4} + \frac{25\sqrt{3}}{2}$

Как видно площадь ~~бы~~ ABCD не зависит от конфигурации сторон и равна $\frac{75}{4} + \frac{25\sqrt{3}}{2}$

Ответ: $\frac{75}{4} + \frac{25\sqrt{3}}{2}$

N5

При $x=0$: $f_1(0) = 6a_1$; $f_2(0) = 8a_2$; $f_3(0) = 12a_3$

$f_1(0) = f_2(0) = f_3(0) \Rightarrow 6a_1 = 8a_2 = 12a_3$

$3a_1 = 4a_2 = 6a_3 \Rightarrow$ ~~$a_1 = 2a_3$~~

$\Rightarrow a_1 = 2a_3$; $a_2 = \frac{3}{2}a_3$

Заметим что при $a_3=0$: $a_1=a_2=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f_1(x) = x^3 + b_1x^2 + 6x$; $f_2(x) = x^3 + b_2x^2 + 8x$

$f_1(x) = f_2(x) \Rightarrow b_1x^2 = b_2x^2 + 2x$, ~~при $x \neq 0$~~

при $x \neq 0$: $x(b_1 - b_2) = 2$ - ~~что~~

- очевидно выполняется не

чистовик

для любого x => $a_3 \neq 0$ => $a_2 \neq 0;\ a_1 \neq 0$

~~При $x = -2a_3$~~ $f_3(x - a_3) = 0$ => $f_1(-a_3) = f_2(-a_3) = 0$ =>

$$\Rightarrow \begin{cases} a_3(a_3^2 - b_1 a_3 + 6) = 0 \Rightarrow b_1 = \frac{a_3^2+6}{a_3} \\ \frac{a_3}{2}(a_3^2 - b_2 a_3 + 8) = 0 \Rightarrow b_2 = \frac{a_3^2+8}{a_3} \end{cases}$$

$$f_1(-a_1) = 0 \Rightarrow f_3(-a_1) = 0 \Rightarrow \left(-\frac{a_1}{2}\right)(a_1^2 - a_1 b_3 + 12) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_3 = \frac{a_1^2+12}{a_1} = \frac{2a_3^2+6}{a_3}$$

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_2 + b_3 = \frac{4a_3^2+20}{a_3} + a_3 + 2a_3 + 1{,}5a_3 =$$

$$= \frac{8{,}5a_3^2+20}{a_3}$$

$3a_1 = 4a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{3}{4}a_1$

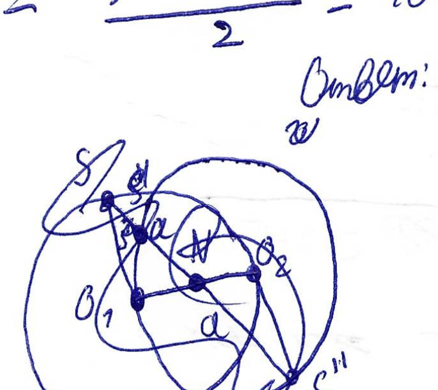
$$f_1(-a_1) = 0 \Rightarrow f_2(-a_1) = 0 \Rightarrow \left(-\frac{a_1}{4}\right)(a_1^2 - a_1 b_2 + 8) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow b_2 = \frac{a_1^2+8}{a_1} = \frac{4a_3^2+8}{2a_3} = \frac{2a_3^2+4}{a_3}$, с другой стороны $b_2 = \frac{a_3^2+8}{a_3}$ $\Rightarrow \frac{2a_3^2+4}{a_3} = \frac{a_3^2+8}{a_3} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_3^2 = 4 \Rightarrow a_3 = 2$ (т.к. по условию $a_3 > 0$)

$$S = \frac{8{,}5 \cdot 4 + 20}{2} = 10 + \cancel{10}\,17 = 27$$

Ответ: 27



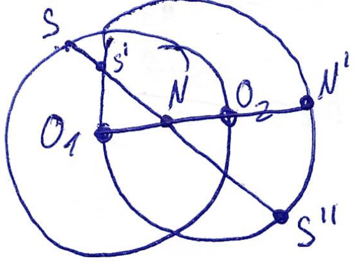
N6

Мышь очевидно будет бежать по прямой, ~~...~~

Тогда пусть за 1 пройденного расстояния мышь наляжет на t

Обозначим начало пути мыши за S, её нору за N, ~~пересечения~~ SN с окружностью O_2 за S' и S''

~~Графика~~



Примем SN за a, тогда из симметрии относительно прямой O_1O_2 $NS'' = a$

~~O_1N:~~ ~~Для~~ Обозначим пересечение прямой O_1N с окр. O_2 за N'',

тогда $O_1N \cdot NN' = S'N \cdot NS'' \Rightarrow S'N = \frac{O_1N \cdot NN''}{NS''}$

$$S'N = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(2+\sqrt{2})^2}}{a} = \frac{3}{4a(2+\sqrt{2})^2}$$

Запишем ~~уравнение~~ функцию для общей влаги, которую собрала мышь:

$$\cancel{\text{общая влага}}\ F(a) = t \cdot (SN - S'N) + 2t \cdot S'N$$

$$\cancel{\text{общая влага}}\ f(a) = at - \frac{3t}{4a(2+\sqrt{2})^2} + \frac{6t}{4a(2+\sqrt{2})^2} = at$$

$$= at + \frac{3t}{4a(2+\sqrt{2})^2}$$, Найдём ~~значение~~ экстремумы функции

$$f'(a) = t - \frac{3t}{4(2+\sqrt{2})^2 a^2} = 0$$

$$1 = \frac{3}{4(2+\sqrt{2})^2 a^2}$$

$$a^2 = \frac{3}{4(2+\sqrt{2})^2}$$

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2(2+\sqrt{2})}$$

$-$ $+$

$\frac{\sqrt{3}}{2(2+\sqrt{2})}$

$\Rightarrow$ ~~при~~ a

Чистовик

$\Rightarrow$ а при $a = \dfrac{\sqrt{3}}{2(2+\sqrt{2})}$ достигается минимум влажности

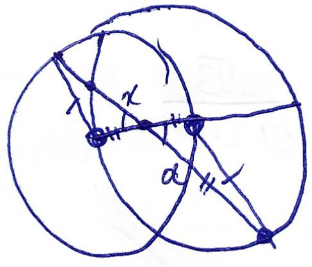
Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{2(2+\sqrt{2})}$

N4

$(\sin(\pi x) - \sin(2\pi x) + \sin(4\pi x))^3 = (\sin(\pi x) - \sin(2\pi x) + \sin(4\pi x)) \cdot$
$\cdot (\sin(\pi x) - \sin(2\pi x) + \sin(4\pi x))(\sin(\pi x) - \sin(2\pi x) + \sin(4\pi x)) =$
$= (\sin^2(\pi x) - 2\sin(2\pi x)\cdot\sin(\pi x) - 2\sin(2\pi x)\cdot\sin(4\pi x) +$
$+ 2\sin(\pi x)\sin(4\pi x) + \sin^2(2\pi x) + \sin^2(4\pi x)) \cdot$
$\cdot (\sin(\pi x) - \sin(2\pi x) + \sin(4\pi x)) = (\sin^3(\pi x) - \sin^3(2\pi x) +$
$+ \sin^3(4\pi x)$

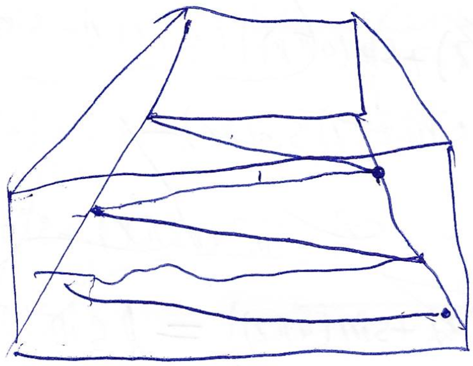
Черновик

$a\cdot 2t \quad +$



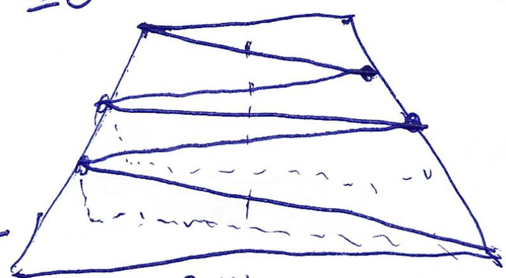
$t - \frac{mt}{a^2}$

$t\left(1-\frac{m}{a^2}\right)$



$1 = \frac{3}{(4-2\sqrt{2})^2 a^2}$

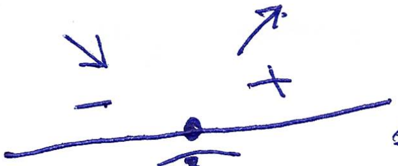
$t - \frac{3t}{(4-2\sqrt{2})^2 a^2} = 0$



6144

$a^2 = \frac{3}{(4-2\sqrt{2})^2}$

$a = \frac{\sqrt{3}}{(4-2\sqrt{2})}$



$\frac{\sqrt{3}}{(4-2\sqrt{2})}$

$\frac{6144}{1458}$

$a\cdot x = \frac{1}{4+2\sqrt{2}}\cdot\frac{3}{4+2\sqrt{2}}$

$x = \frac{3}{a(16+16\sqrt{2}+8)}$

$t\left(a-\frac{3}{a(4+2\sqrt{2})^2}\right)+2t\frac{3}{a(4+2\sqrt{2})}$

$at+\frac{3t}{a(4-2\sqrt{2})^2} =$

Черновик

$a_2 = \frac{3}{2}a_3$; $a_1 = 2a_3$; $b_1 = \frac{a_3^2+6}{a_3}$; $b_2 = \frac{a_3^2+8}{a_3}$

$a_3 = \frac{a_1}{2}$

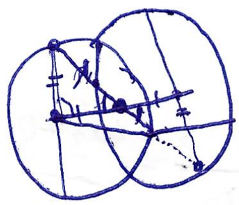
$a_2 =$

$$\left(-\frac{a_1}{2}\right)\left(a_1^2 - a_1 b_3 + 12\right) = 0$$

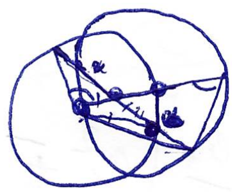
$$\cancel{-\frac{a_1^3}{2} + \frac{a_1 b}{2}}$$

$$-a_1^3 + a_1^2 b_3 - 12a_1 = 0$$

$$a_1^2 b_3 = a_1^3 + 12a_1$$



$$b_3 = \frac{a_1^2+12}{a_1}$$



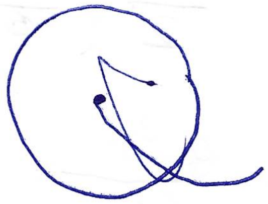
$$b_3 = \frac{4a_3^2+12}{2a_3}$$

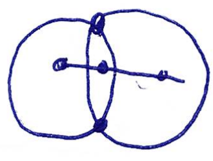
$$b_3 = \frac{2a_3^2+6}{a_3}$$

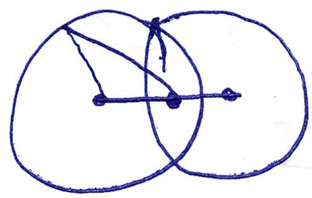
$$a_1+a_2+\ldots = \frac{4a_3^2+20}{a_3} + a_3 + 2a_3 + 1{,}5a_3 =$$

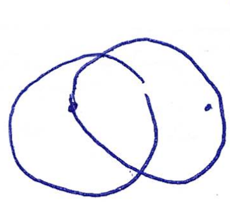
$$= \frac{8{,}5a_3^2+20}{a_3}$$

$$D = b_3^2 - 48$$









Черновик

$6a_1 = 8a_2 = 12a_3$

$a_2 = \frac{3}{4}a_1$

$3a_1 = 4a_2 = 6a_3$

$a_2 = \frac{3a_3}{2}$

$a_1 = 2a_3$

$b_1x + 6 = b_2x + 8$

$x(b_1 - b_2) = 2$

$x = -a_3$

$a_1 = \vdots 2$

$a_3(a_3^2 - b_1a_3 + 6) = 0$

$a_3^3 - b_1a_3^2 + 6a_3 = 0$

$b_1 = \frac{a_3^3 + 6a_3}{a_3^2}$

$\frac{a_3^2 + 8}{a_3} = \frac{4a_3^2 + 8}{2a_3}$

$\frac{a_1}{4}(a_1^2 - b_2a_1 + 8)$

$b_1 = \frac{a_3^2 + 6}{a_3}$

$\frac{a_1^3}{} - b_2a_1^2 + 8 = 0$

$2a_3^2 + 16 = 4a_3^2 + 8$

$b_2 = \frac{a_1^2 + 8a_1}{a_1}$ $6 \vdots a_3$

$a_3 = 6;\ 2;\ 1;\ 6$

$2a_3^2 = 12$

$a_3 = \sqrt{12}$

$(-\frac{a_3}{2})(\frac{a_3^2}{4} + b_2a)$

$(-a_3 + \frac{3}{2}a_3)$

$\frac{a_3}{2}\left(\frac{a_3^2}{4} - b_2a_3 + 8\right) = 0$

$\frac{a_3^3}{8}$

$a_3^3 - b_2a_3^2 + 8a_3 = 0$

$b_2 = \frac{a_3^2 + 8a}{a_3}$

Черновик

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 5\sqrt{2}\cdot\frac{10(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}} = \frac{150}{8} + \frac{50\sqrt{3}}{8}$$

$$\frac{\sin 75^\circ}{CD} = \frac{1}{10}$$

$$CD = 10\cdot\sin 75^\circ$$

$$\frac{1}{8}\cdot\underbrace{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\cdot 5\cdot\frac{\overset{5}{\cancel{10}}(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}}}_{8} = \frac{25(3+2\sqrt{3}+1)}{8} =$$

$$= \frac{100}{8} + \frac{\overset{25}{\cancel{50}}\sqrt{3}}{\cancel{8}\,4} = \frac{25}{2} + \frac{25\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{1}{2}\cdot 25\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{25\sqrt{3}}{4} + \frac{25}{4}$$

N4

$$\sin(\pi x) + \sin(2\pi x) = 2\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right.$$

$$\cancel{\sin(\pi x + 2\pi)}$$

$$\cos(\pi x + 2\pi x) = \cos\pi x$$

$$\cancel{\sin^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = t}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$2\sqrt{\frac{(1-\cos(\alpha+\beta))\cdot(1+\cos(\alpha-\beta))}{2\cdot 2}} =$$

$$= 4\sqrt{1-\cos(\alpha+\beta)\ \cancel{\sin}\ \cos(\alpha-\beta)}$$

Черновик

$3^{5-\frac{1}{x}} \geq a + \sin 4^x$ $\quad$ $\sin 75^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

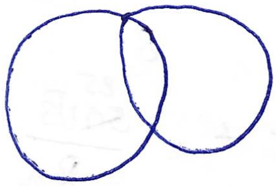
$\forall x>0:\ 3^{5-\frac{1}{x}} < 3^5$

$\forall x>0:\ \sin 4^x > -1$

$a + \sin 4^x > a - 1 > 3^5$

$3^5 = 3^3 \cdot 3^2 = 27 \cdot 9$ $\quad$ $27 \cdot 9$

$$\times\begin{array}{r} 27 \\ 9 \\ \hline 243 \end{array} \qquad \times\begin{array}{r} 27 \\ 9 \\ \hline 243 \end{array}$$



$3 \cdot 3 = 9$

~~244 - Δ~~

$9 \cdot 3 = 27$

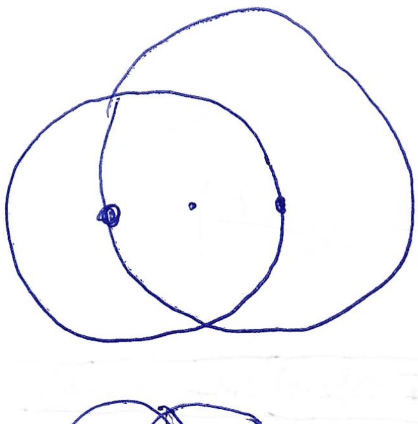
$27 \cdot 3 = 81$

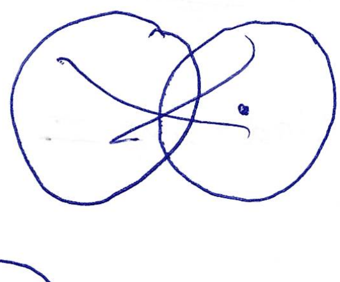
$3^{5-\frac{1}{x}} \geq 244 - \Delta + \sin 4^x$

$\frac{243}{3^{\frac{1}{x}}} \geq 243 - \Delta$

$\frac{\sin 75^\circ}{CD} = \frac{1}{2R}$

$243 \geq 243 \cdot 3^{\frac{1}{x}} - \Delta \cdot 3^{\frac{1}{x}}$ $\quad$ $CD = \sin 75^\circ$





Повысить оценку на 5 баллов
(старая оценка – 60 б,
новая оценка – 65 б.)

Председателю апелляционной комиссии
олимпиады школьников «Ломоносов»
Ректору МГУ имени М.В. Ломоносова
академику В.А. Садовничему
от участника заключительного этапа
по профилю «Математика»
Лобова Михаила Дмитриевича

Апелляция

Прошу пересмотреть мой индивидуальный предварительный результат заключительного этапа, а именно 60 баллов, поскольку считаю, что в задаче №6 мною изложен верный ход решения при выбранном изначально мною условии.

Подтверждаю, что я ознакомлен с Положением об апелляциях на результаты олимпиады школьников «Ломоносов» и осознаю, что мой индивидуальный предварительный результат может быть изменён, в том числе в сторону уменьшения количества баллов.

30.04.2025