0 564624 450004

56-46-24-45
(162.2)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

вышла: 13:33, 14:22
вернулась: 13:37, 14:24

Вариант 11-2 класс

Место проведения Краснодар
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Мищенко Елизаветы Андреевны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«13» апреля 2025 года

Подпись участника

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
56-46-24-45	75	+	±	+	+	+	−	⌀	∓

Лев Зеленов

56-46-24-45
(162.2)

чистовик:

75 (семьдесят пять)

Задача 2.

$$\sqrt{4x^2+12x+9}+\sqrt{9x^2+12x+4}-\left(\sqrt{-(x+1)}\right)^2=\sqrt{7+\sqrt{24}}-\sqrt{7-\sqrt{24}}$$

ОДЗ:

$-(x+1)\geq 0 \Rightarrow x\leq -1$

$$|2x+3|+|3x+2|-(-(x+1))=\sqrt{(\sqrt{6}+1)^2}-\sqrt{(\sqrt{6}-1)^2}$$

$$|2x+3|+|3x+2|+x+1=\sqrt{6}+1-\sqrt{6}+1$$

$$|2x+3|+|3x+2|+x=1$$

$x\leq -1 \Rightarrow 3x+2\leq 0$

$$|2x+3|-3x-2+x=1.$$

$$|2x+3|-2x-2=1.$$

$$|2x+3|-2x=3$$

$$|2x+3|=3+2x.$$

При $x<-\frac{3}{2}$ – решений нет.

При $x\geq -\frac{3}{2}$ – равенство верно.

С учётом ОДЗ $\Rightarrow x\in\left[-\frac{3}{2};-1\right]$

Ответ: $x\in\left[-\frac{3}{2};-1\right]$

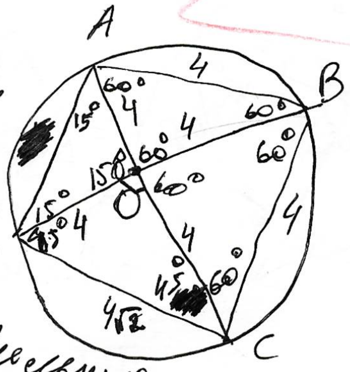
Задача 3

Случай 1:

стороны 4-смежные

$AB=BC=4$

$CD=4\sqrt{2}$



O – центр $\Rightarrow \triangle AOB$, $\triangle BOC$ – правильные треугольники

чистовик:

$\triangle DOC$ – прямоугольн, т.к $DC^2 = OD^2 + OC^2$,

тогда дуги: $\overset{\smile}{AB} = 60°$, $\overset{\smile}{BC} = 60°$, $\overset{\smile}{DC} = 90°$ =>

=> $\overset{\smile}{AD} = 150° \Rightarrow \angle AOD = 150°$

По теореме косинусов в $\triangle AOD$:

$$AD^2 = 4^2 + 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt3}{2} = 32 + 16\sqrt3$$

$$AD = 4\sqrt{2+\sqrt3} = \frac{4(\sqrt3+1)}{\sqrt2}$$

$$S_{ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADC} = \frac12 \cdot 4^2 \cdot \sin\angle ABC +$$

$$+ \frac12 AD \cdot DC \cdot \sin\angle ADC = \frac{16}{2} \cdot \sin 120° + \frac12 \cdot \frac{4(\sqrt3+1)}{\sqrt2} \cdot 4\sqrt2 \cdot \sin 60°$$

$$S_{ABCD} = \frac{16}{2} \cdot \frac{\sqrt3}{2} + \frac{16}{2} \cdot \frac{(\sqrt3+1)\cdot\sqrt3}{2} =$$

$$= \frac{16\sqrt3}{4} + \frac{16\sqrt3}{4} + \frac{16 \cdot 3}{4} =$$

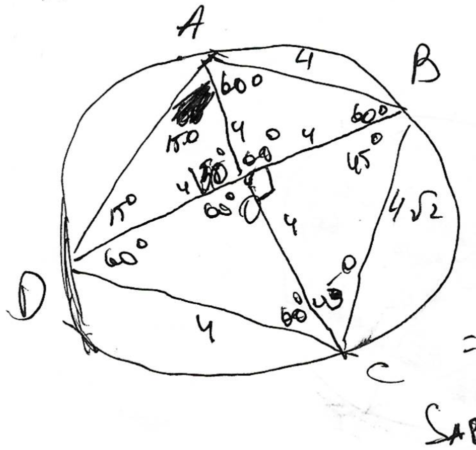
$$= 8\sqrt3 + 12$$

Ответ: $8\sqrt3 + 12$

Случай 2:

стороны 4 и 4 – противоположные

тогда, $AB = 4$, $CD = 4$, $BC = 4\sqrt2$



Аналогично дуги:

$\overset{\smile}{AB} = 60$; $\overset{\smile}{BC} = 90°$; $\overset{\smile}{CD} = 60°$ =>

$\Rightarrow \angle AOD = 150° \Rightarrow AD = \frac{4(\sqrt3+1)}{\sqrt2} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADC} =$

$= \frac12 \cdot 4 \cdot 4\sqrt2 \cdot \sin 105° + \frac12 \cdot 4 \cdot \frac{4(\sqrt3+1)}{\sqrt2} \cdot \sin 75°$

$S_{ABCD} = 8\sqrt2 \cdot \sin 105° + 8 \cdot \frac{(\sqrt3+1)}{\sqrt2} \cdot \sin 75° =$

$= 8 \sin 105° \left(\sqrt2 + \left(\frac{\sqrt3+1}{\sqrt2}\right)\right) = 8 \cdot \frac{(\sqrt3+1)}{2\sqrt2} \left(\frac{3+\sqrt3}{\sqrt2}\right) =$

чистовик:

$= 2\cdot\sqrt{3}\,(\sqrt{3}+1)^2 = 2\sqrt{3}\cdot(4+2\sqrt{3}) = 12+8\sqrt{3}$

Ответ: $12+8\sqrt{3}$

Задача 2

$\cancel{5^{3-\frac{1}{x}} \geq a+\sin 3^x}$

a – min. $a>0$

$5^{3-\frac{1}{x}} \geq a+\sin 3^x$

при $x>0$ не имеет ни одного решения

$-\frac{1}{x}<0$.

$3-\frac{1}{x}<3$

$5^{3-\frac{1}{x}}<125$

$\sin 3^x \in [-1;1] \Rightarrow$

$\sin 3^x \geq -1$

$\Rightarrow$ чтобы не было положительных решений необходимо, чтобы при $x>0$ $a+\sin 3^x \geq 125 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ При $a=126$ – это будет верно для всех $x>0$ и неравенство не выполнится, если $a<126$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow a+\sin 3^x<126+\sin 3^x \Rightarrow$ Найдутся такие x, что $\sin 3^x=-1 \Rightarrow a+\sin 3^x<125$

При этих x, $\Rightarrow$ в силу периодичности и того, что $5^{3-\frac{1}{x}}$ стремится к 125 как угодно близко $\Rightarrow$ будут решения для положительных $x \Rightarrow$

чистовик:

$\min a = 125$

Ответ: 125

Задача 4.

$\cos^3(\pi x) + \cos^3(2\pi x) - \cos^3(4\pi x) = (\cos(\pi x) + \cos(2\pi x) - \cos(4\pi x))^3$

$a = \cos(\pi x)$, $b = \cos(2\pi x)$, $c = -\cos(4\pi x)$

$a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)^3$

т.к. $a^3 + b^3 + c^3 - (a+b+c)^3 = -3(a+b)(b+c)(c+a) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ уравнение выполняется только, когда:

$-3(a+b)(b+c)(c+a) = 0$.

1) $a + b = 0$.

$\cos(\pi x) + \cos(2\pi x) = 0$.

$2\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{3} + \frac{2k}{3}, k \in Z \\ x = 1 + 2k, k \in Z. \end{array}\right.$ Объединим: $x = \frac{1}{3} + \frac{2k}{3}, k \in Z$

2) $b + c = 0$

$\cos(2\pi x) - \cos(4\pi x) = 0$.

$-2\sin(3\pi x)\cdot\sin(-\pi x) = 0$.

$\sin(3\pi x)\sin(\pi x) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \sin(3\pi x) = 0 \\ \sin(\pi x) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = k, k \in Z \\ x = \frac{k}{3}, k \in Z. \end{array}\right.$ Объединим: $x = \frac{k}{3}, k \in Z$

3) $c + a = 0$.

$\cos(\pi x) - \cos(4\pi x) = 0$

$-2\sin\left(\frac{5\pi x}{2}\right)\sin\left(-\frac{3\pi x}{2}\right) = 0$.

чистовик:

$$\sin\left(\frac{5\pi x}{2}\right)\sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right)=0.$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin\frac{5\pi x}{2}=0 \\ \sin\frac{3\pi x}{2}=0\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{2k}{5},\ k\in Z \\ x=\frac{2k}{3},\ k\in Z\end{array}\right.$$

Все решения:

1) $x=\frac{(1+2k)}{3}$, $k\in Z$

2) $x=1+2k$, $k\in Z$

3) $x=\frac{k}{3}$, $k\in Z$

4) $x=\frac{2k}{3}$, $k\in Z$

5) $x=\frac{2k}{5}$, $k\in Z$.

Объединяя все получаем общее множество – объединение:

$x=\frac{k}{3}$, $k\in Z$

$x=\frac{2k}{5}$, $k\in Z$

$x=\frac{k}{3}$: $0,3\le\frac{k}{3}\le 1,6$.

$0,9\le k\le 4,8$.

$k=0$ – не подходит, $<0,3$

$k=1$ = $\frac{1}{3}\approx 0,33$

$k=2$ = $\frac{2}{3}\approx 0,667$.

$k=3$ = 1

$k=4$ = $\frac{4}{3}\approx 1,33$

$k=5$ – не подходит, $>1,6$.

плетовик:
$x=\frac{2k}{5},\ k\in Z$.

$0{,}3\le\frac{2k}{5}\le 1{,}6$.

$k=0$ - не подходит, $<0{,}3$
$k=1=\frac{2}{5}=0{,}4$
$k=2=\frac{4}{5}=0{,}8$
$k=3=\frac{6}{5}=1{,}2$
$k=4=\frac{8}{5}=1{,}6$
$k=5=2$ - не подходит, $>1{,}6$

Ответ: $\frac{1}{3};\ \frac{2}{5};\ \frac{2}{3};\ \frac{4}{5};\ 1;\ \frac{6}{5};\ \frac{4}{3};\ \frac{8}{5}$

Задача 5.

Раскроем скобки:

$$f_1(x)=x^3+(a_1+b_1)x^2+(12+a_1b_1)x+12a_1$$

$$f_2(x)=x^3+(a_2+b_2)x^2+(15+a_2b_2)x+15a_2$$

$$f_3(x)=x^3+(a_3+b_3)x^2+(20+a_3b_3)x+20a_3$$

Заметим, что условие $f_1(x)=f_2(x)=f_3(x)$ - для любых $x\in R$, означает, что каждая из разностей: $f_1(x)-f_2(x)$, $f_1(x)-f_3(x)$, $f_2(x)-f_3(x)$ - тождественна, что может только при равенстве коэффициентов при соответственных степенях x:

$$\begin{cases} a_1+b_1=a_2+b_2=a_3+b_3 \\ 12+a_1b_1=15+a_2b_2=20+a_3b_3 \\ 12a_1=15a_2=20a_3=60k \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a_1=5k;\ a_2=4k; \\ a_3=3k,\ (k\in R); \\ k>0 \end{matrix}$$

системы:

Подставим в первую строку системы:

$5k+b_1=4k+b_2=3k+b_3 \Rightarrow b_2=b_1+k;\ b_3=b_1+2k;$

Подставим во вторую строку системы:

$\cancel{12+5kb_1=15+4kb_1+20+3kb_1}$

$12+5kb_1=15+4kb_1+4k^2=20+3kb_1+6k^2$

$12+5kb_1=15+4b_1k+4k^2 \Rightarrow kb_1-4k^2=3 \quad (1)$

$15+4kb_1+4k^2=20+3kb_1+6k^2 \Rightarrow \cancel{kb_1}$

$\Rightarrow kb_1-2k^2=5 \quad (2)$

$(2)-(1)$:

$kb_1-4k^2-kb_1+2k^2=3-5$

$2k^2=2;\ k^2=1 \Rightarrow k=1\ (k>0)$

Подставим во второе (2):

$b_1-2=5; \Rightarrow b_1=7.$

$a_1=5k=5;\ a_2=4k=4;\ a_3=3k=3$

$b_2=b_1+k=7+1=8$

$b_3=b_1+2k=7+2=9$

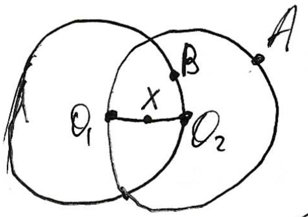
$a_1+b_1+b_2+a_2+a_3+b_3=$

$=5+7+4+8+3+9=36$

Ответ: 36

Черновик:

Задача 6.



R - радиус

Мышь входит в одну зону, где одна ловушка в т. A, так же две ловушки в т. B, X - нора $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ минимизируем $AB + 2BX$

$R = O_1O_2$ O_1, O_2 - центры окружностей $\Rightarrow O_1B = R$,

Пусть, $O_2B = t \Rightarrow BX = \frac{1}{2}\sqrt{2t^2+2R^2-R^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2t^2+R^2}$,

$AB = R - t$

$\min(AB + 2BX) = \cancel{\sqrt{2t^2+R^2}+R} \sqrt{2t^2+R^2} + R - t$

Найдём производную по t:

$$\left(\left(\sqrt{2t^2+R^2}\right) + (R-t)\right)' = \frac{2t}{\sqrt{2t^2+R^2}} - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2t^2 = R^2 \Rightarrow t^2 = \frac{R^2}{2} \Rightarrow t = \frac{R}{\sqrt{2}}$$ - точка минимума функции

чистовик:

$\Rightarrow$ min путь $= \sqrt{2}R - \frac{R}{\sqrt{2}} + R = R\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right) =$

$= \frac{2-\sqrt{2}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}(2-1)}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{5}$

Ответ: $\frac{1}{5}$

Задача 8

Посчитаем углы правильного 30-ти угольника, $30x = 28 \cdot 180$

$x = 168^\circ$ НОД$(180^\circ; 168^\circ) = 12$

то есть в результате процесса в условии мы будем получать треугольники с углами, кратными 12 и получим все такие треугольники.

Посчитаем, сколько их всего:

Пусть, x, y, z – углы треугольника

$x+y+z = 180^\circ$, но $\frac{x}{12}, \frac{y}{12}, \frac{z}{12} \Rightarrow x \vdots 12, y \vdots 12, z \vdots 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 12k;\ y = 12m;\ z = 12n \Rightarrow k+m+n = 15$

Надо подсчитать число способов разложить 15 в три неупорядоченных ~~слагаем~~ слагаемых. Переберём минимальное слагаемое.

Щетовеик:

[redacted]

k = 1 : 13+1, 12+2, 11+3, 10+4, 9+5, 8+6, 7+7

7 способов

k = 2 : 11+2, 10+3, 9+4, 8+5, 7+6

5 способов

[redacted] k = 3 : 9+3, 8+4, 7+5, 6+6,

4 способа.

k = 4 : 7+4, 6+5

2 способа

Всего 19 способов, 19 треугольников.

k = 5 : 5+5

1 способ

~~Всего 19 способов.~~ ~~Тип 19~~ способов,

Одинаковые наборы углов определяют равные треугольники, так все они являются подобными с одной вписанной окружностью

ответ: 19

черновик:

$\cos^3(\pi x) + \cos^3(2\pi x) - \cos^3(4\pi x) = \left((\cos \pi x) + \cos(2\pi x) - \cos(4\pi x)\right)^3$

$\cos^3(\pi x) + \cos^3(2\pi x) - \cos^3(4\pi x) =$

черновик:

$24 = 6 \cdot 4 = 3 \cdot 2^3$

$\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

$-\frac{3}{2}+1 = -\frac{1}{2}$

$x = -1$

$\sqrt{7+2\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{6}+1)^2} = \sqrt{6}+1-\sqrt{6}+1$

$\frac{81}{4} - 18+14 = \frac{81}{4} - 14 = \frac{81-56}{4} = \frac{25}{4} = \frac{5}{4} + 0 + \sqrt{\frac{1}{2}} = 2.$

$4 \cdot \frac{4}{9} + 9 - 8 = \frac{16}{9} + 9 = \frac{81+16}{9} = \frac{95}{9}.$

$9 \cdot \frac{4}{9} + 4 - 8.$

$x = -1. \quad |2x+3| + |3x+2| - (-(x+1)) = 2.$

$x \in [-\frac{3}{2}; -1]$ $|2x+3| + |3x+2| + x + 1 = 2.$

$|2x+3| + |3x+2| + x = 1$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ x < -\frac{2}{3} \\ 2x+3-3x-2+x=1 \quad x \in \mathbb{R} \end{cases} \\ \begin{cases} x < -\frac{3}{2} \\ -2x-3-3x-2+x=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x > -\frac{2}{3} \\ 5x+5+x=1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in (-\frac{3}{2}; -\frac{2}{3}) \\ \begin{cases} x \leq -\frac{3}{2} \\ x = -\frac{5}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq -\frac{2}{3} \\ 6x = -4 \end{cases} \end{array}\right.$$

$-5x + x - 4 = 1.$

$-4x = 5.$

$x = -\frac{5}{4}.$

$x = -\frac{2}{3}.$

$x \in [-\frac{3}{2}; -\frac{2}{3}]$