



22-93-26-79
(161.22)



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Матвеева Елена Дмитриевна
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

+1 лист ИлСол
всего: 12.47 ИлС
12.52 ИлС

Дата

«13» 04 2025 года

Подпись участника

[Signature]

$$\sqrt{4x^2+12x+9} + \sqrt{9x^2+12x+4} - \left(\sqrt{-(x+1)}\right)^2 = \sqrt{7+12x} -$$

$$-\sqrt{7-12x}$$

85 (вспомогательная линия) чертёжник

$$\sqrt{(2x+3)^2} + \sqrt{(3x+2)^2} - \left(-(x+1)\right) = \sqrt{(1+\sqrt{6})^2} - \sqrt{(\sqrt{6}-1)^2}$$

$$(x+1) \leq 0$$

$$2\sqrt{6}$$

$$x \leq -1$$

$$|2x+3| + |3x+2| + (x+1) = \sqrt{6}+1 - \sqrt{6}+1$$

$$|2x+3| + |3x+2| + (x+1) = 2$$

$$\text{При } 2x+3 \geq 0 \quad x \geq -\frac{3}{2} \quad 2x+3 \leq 0 \quad 2x+3 \geq 0$$

$$3x+2 \geq 0 \quad x \geq -\frac{2}{3} \quad 3x+2 \leq 0 \quad 3x+2 \leq 0$$

①

$$5x+6=2$$

$$x = \frac{-4}{5} = \left(-\frac{4}{5}\right)$$

②

$$-4x-4=2$$

$$x = \left(-\frac{3}{2}\right)$$

③

$$2=2$$

$$\text{при } x \in \left[-\frac{3}{2}; -\frac{4}{5}\right]$$

$$x \in \left[-\frac{3}{2}; -1\right]$$

$$9+18+9$$

$$\frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

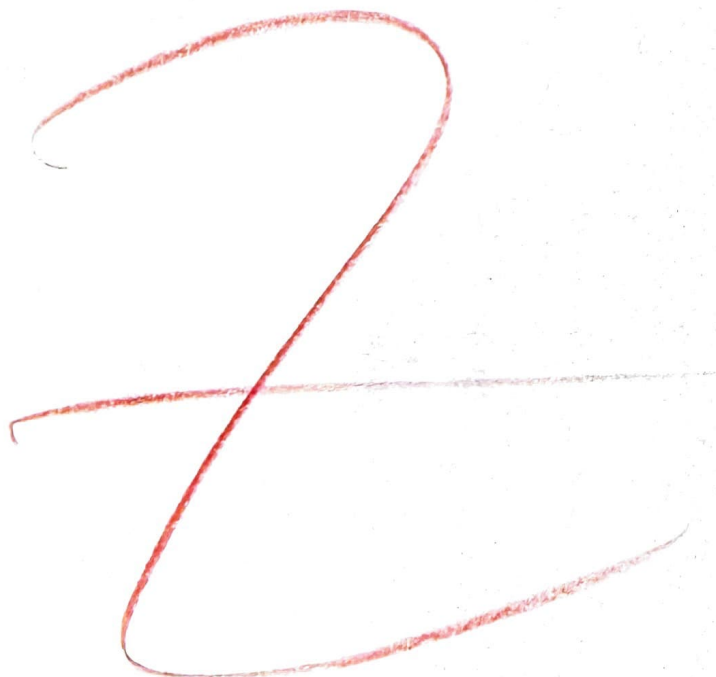
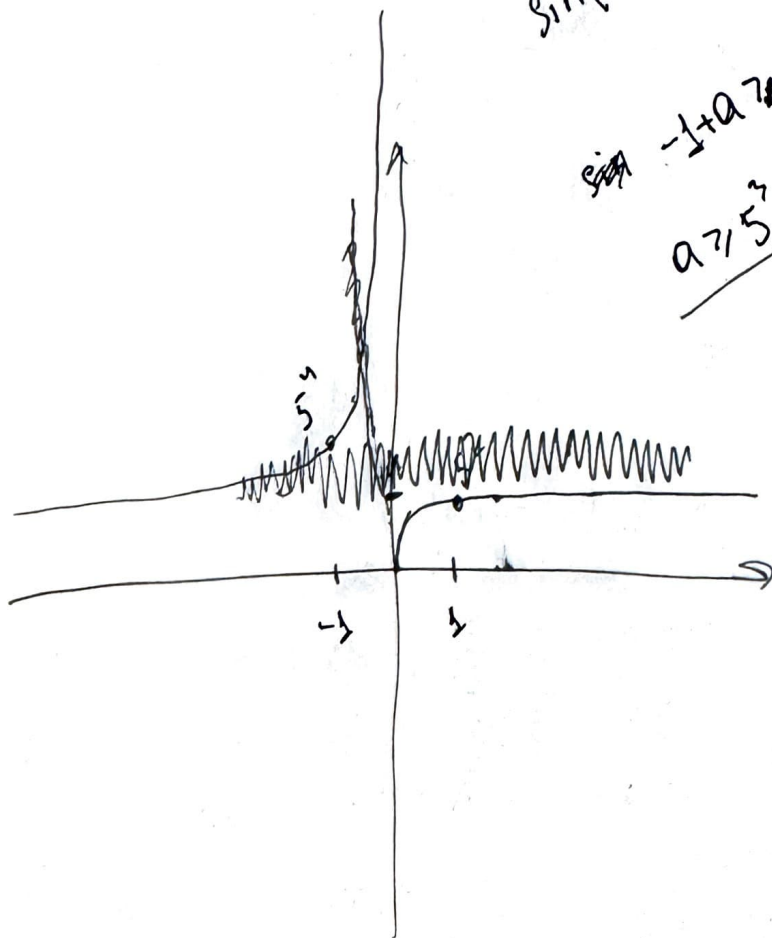
ЧЕРНО БУК

$$5^{3-\frac{1}{x}} \approx a + \sin(3^x)$$

$$\sin(3^x) \in [-1, 1]$$

$$\sin -1 + a \cdot 5^3$$

$$\frac{a \cdot 5^3 + 1}{5^3}$$



22-93-26-79
(161.22)

w1

Цисловик

$$\sqrt{4x^2+12x+9} + \sqrt{9x^2+12x+4} - (\sqrt{-(x+1)})^2 = \sqrt{7+\sqrt{24}} - \sqrt{7-\sqrt{24}}$$

$$4x^2+12x+9 = (2x+3)^2$$

$$-(x+1) \geq 0$$

$$9x^2+12x+4 = (3x+2)^2$$

$$(x+1) \leq 0$$

$$7+\sqrt{24} = (\sqrt{6}+1)^2$$

$$x \leq -1$$

$$7-\sqrt{24} = (\sqrt{6}-1)^2$$

Тогда

$$|2x+3| + |3x+2| - (-(x+1)) = \sqrt{6}+1 - (\sqrt{6}-1)$$

$$|2x+3| + |3x+2| + (x+1) = \sqrt{6} - \sqrt{6} + 1 + 1$$

Рассмотрим промежутки, раскроем модуль.

$$1. \begin{cases} 2x+3 \geq 0 \\ 3x+2 \geq 0 \end{cases} \quad x \geq -\frac{2}{3} \quad 2. \begin{cases} 2x+3 \geq 0 \\ 3x+2 < 0 \end{cases} \quad x \in \left[-\frac{3}{2}; -\frac{2}{3}\right)$$

$$5x+5+x+1=2$$

$$-x+1+x+1=2$$

$$x = -\frac{2}{3} \quad \checkmark$$

$$2=2$$

$$x \in \left[-\frac{3}{2}; -\frac{2}{3}\right) \quad \checkmark$$

$$3. \begin{cases} 2x+3 < 0 \\ 3x+2 < 0 \end{cases} \quad x < -\frac{2}{3}$$

Получим, что при

$$-4x-4=2$$

 $x \in \left[-\frac{3}{2}; -\frac{2}{3}\right]$ это уравнение

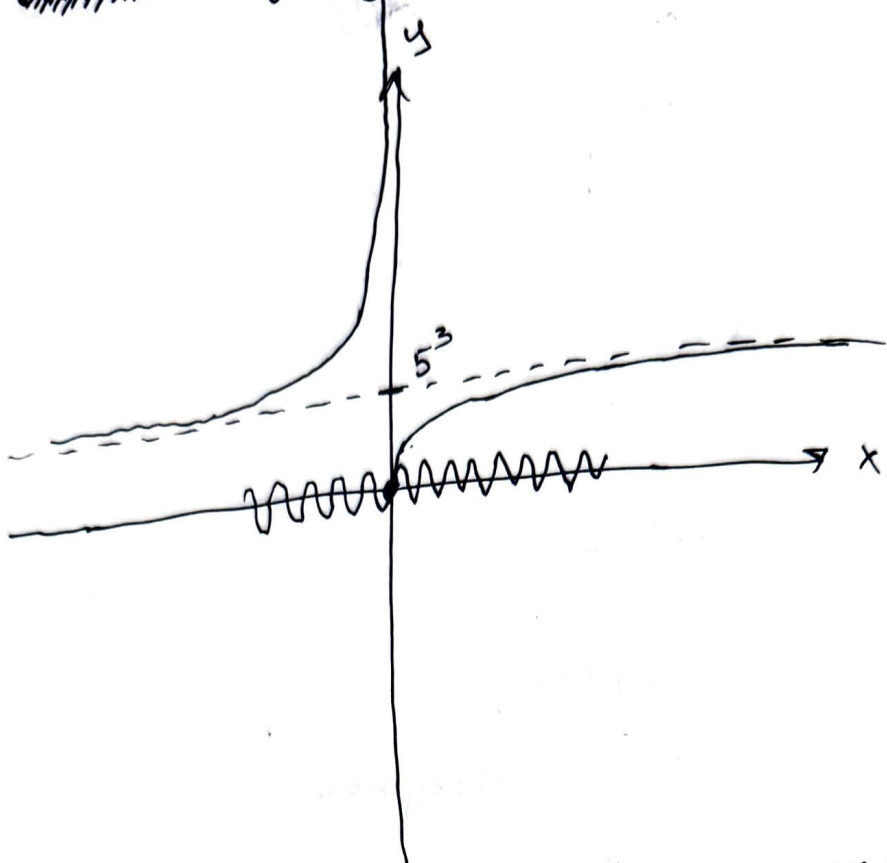
$$x = -\frac{3}{2} \quad x$$

верно, но $x \leq -1$, тогда

$$x \in \left[-\frac{3}{2}; -1\right]$$

$$\text{Ответ: } \left[-\frac{3}{2}; -1\right]$$

цисловик
 л2. ~~напишем~~ нарисуем этот график $(5^{3-\frac{1}{x}})$



Этот график имеет асимптоту по x ,
 которая равна 5^3 , действительно

$$5^3 = 5^{3-\frac{1}{x}} \quad 5^3 = 5^3 \cdot 5^{(-\frac{1}{x})} \quad 5^3 (1 - 5^{(-\frac{1}{x})}) = 0$$

$$5^{(-\frac{1}{x})} = 1 \quad (-\frac{1}{x}) = 0, \text{ что невозможно.}$$

2) график $\sin(3^x) \in [-1; 1]$

(область значений), тогда нулено, чтобы

любая точка $a + \sin(3^x) \geq 5^3$, в ином

случае найдется такая точка, что

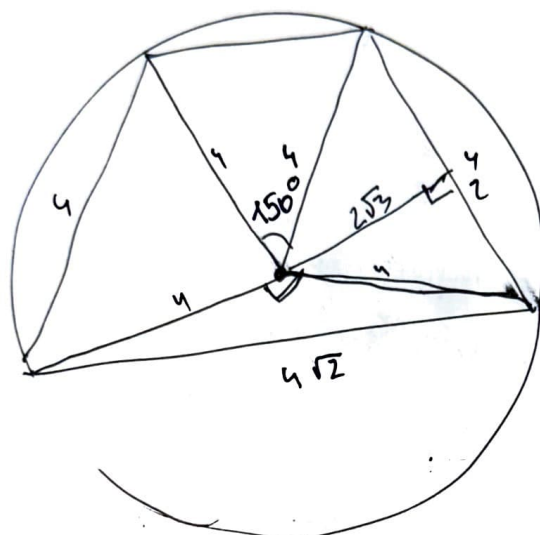
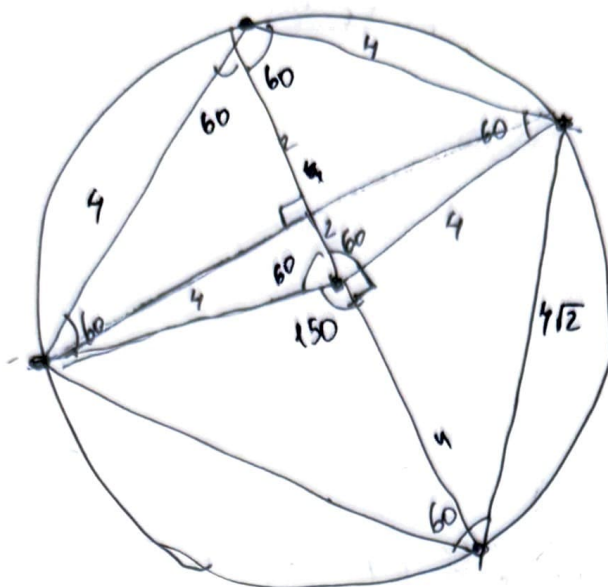
$a + \sin(3^{x_0}) = 5^{3-\frac{1}{x_0}}$, ведь график $5^{3-\frac{1}{x}}$ бесконечно
 приближается к 5^3 и тогда x_0 найдется.

Тогда $a - \underset{\min(\sin(3^x))}{1} \geq 5^3 \quad a \geq 5^3 + 1$

Ответ: $5^3 + 1$

22-93-26-79
(161.22)

ЧЕРНОВИК



$$16 + 16 - 2 \cdot 16 \cos d = 32$$

$$1 - \cos d = 1$$

$$\cos d = 0$$

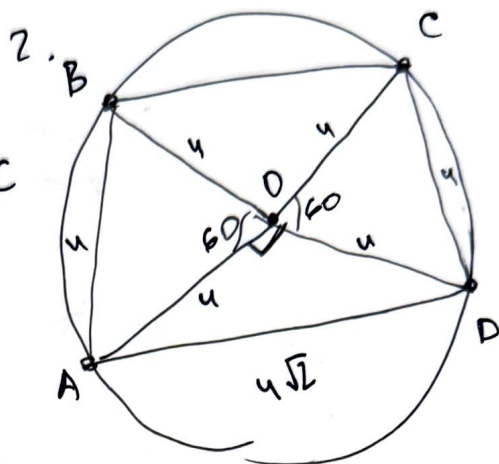
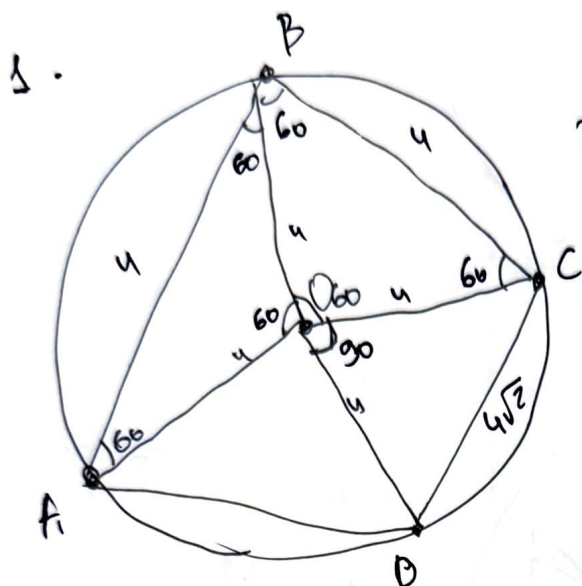
$$d = \frac{\pi}{2}$$

$$8 + 2\sqrt{3} \cdot 2 + 4 = 4(1 + \sqrt{3})$$

и 3

ЧИСТОВИК

Рассмотрим 2 возможных расположения этих четырехугольников



Рассмотрим 1. 2 треугольника с одинаковыми сторонами $\Rightarrow$ оба равнобедренные.

В $\triangle OCD$ $4^2 + 4^2 = (4\sqrt{2})^2 \Rightarrow \angle COD = 90^\circ$, тогда

$\angle AOD = 360 - 210 = 150^\circ$. Найдем площадь 4 треугольников.



В равнобедренном $S_1 = \frac{2\sqrt{3} \cdot 4}{2} =$

В прам. $S_2 = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8 = 4\sqrt{3}$

В равнобед. $S_3 = \frac{4 \cdot 4 \cdot \sin(150^\circ)}{2} = 4$

Тогда $S_{ABCD} = 2 \cdot S_1 + S_2 + S_3 = 8\sqrt{3} + 8 + 4 = 4(\sqrt{3} + 3)$

22-93-26-79
(161.22)

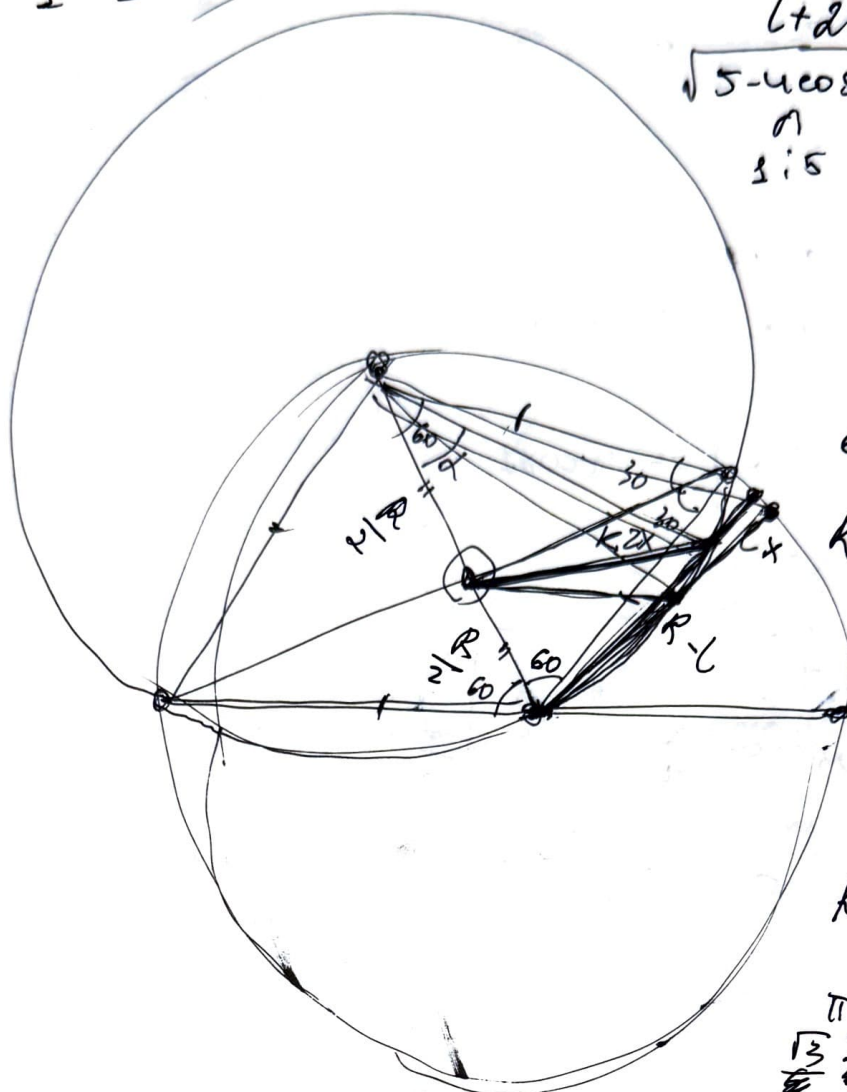
ЧЕРНОВИК

$$1 - \sqrt{2-2\cos\alpha} + \sqrt{5-4\cos\alpha} \quad \alpha \in [0; 60]$$

$$1 - 1 + \sqrt{3} = R \cdot \sqrt{3}$$

$$\sqrt{5-4\cos\alpha} - \sqrt{2-2\cos\alpha}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 $1:5$ $\sqrt{2}:1$



$$\frac{1}{6} 2\pi R \cdot \frac{\pi R}{3}$$

$$R^2 - R^2$$

$$\frac{R^2}{4}$$

$$\frac{R\sqrt{3}}{2}$$

$$R \left(\frac{\pi}{3} + 1 \right)$$

$$R \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\pi}{3} > \frac{\pi}{3} + 1$$

$$\frac{R\sqrt{3}}{2}$$



$$2R^2 + 2R^2 \cos\alpha$$

$$R - (R\sqrt{2} \sqrt{1-\cos\alpha})$$

$$R (1 - \sqrt{2-2\cos\alpha}) +$$

$$\frac{R^2 + R^2}{4} - R^2 \cos\alpha$$

$$+ R \sqrt{5-4\cos\alpha}$$

$$R^2 \left(\frac{5}{4} - \cos\alpha \right)$$

$$R (1 - \sqrt{2-2\cos\alpha} + \sqrt{5-4\cos\alpha})$$

$$\sqrt{5-4\cos\alpha} - \sqrt{2-2\cos\alpha}$$

$$\frac{4\sin\alpha}{2\sqrt{5-4\cos\alpha}} - \frac{2\sin\alpha}{2\sqrt{2-2\cos\alpha}}$$

$$\sin\alpha = 0$$

$$\alpha = \pi k$$

$$2\sqrt{2-2\cos\alpha} - \sqrt{5-4\cos\alpha} = 0$$

$$8(1-\cos\alpha) = 5-4\cos\alpha$$

$$4\cos\alpha = 3$$

$$\cos\alpha = \frac{3}{4}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{3}{4}\right)$$



ЧЕРНОВИК

$$-\frac{1}{2}$$

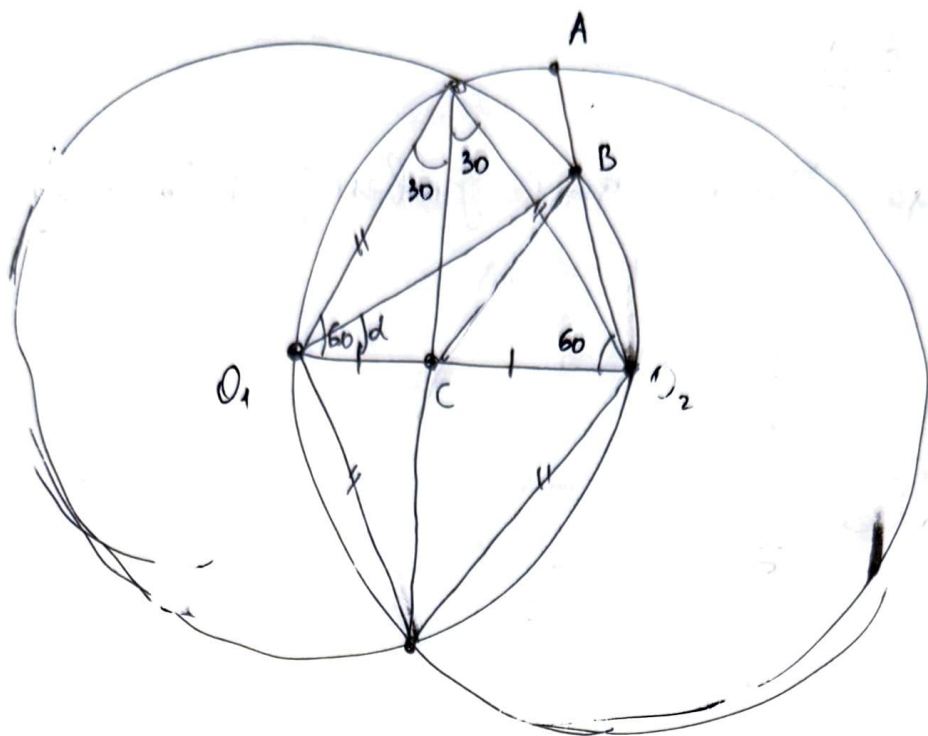
$$\alpha^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 1$$

$$\sqrt{3} - \sqrt{2}$$





Пусть C — это кора, тогда неизбежно мышь должна будет пойти по зоне где 2 пошивалки. Пусть она начинает из точки B , тогда путь BA , где A точка старта — будет на O_2B ведь тогда BA — радиусе окр. с центром B и она касается основной. Тогда по т. косинусов

~~$$BC = 2R^2 + 2R^2 \cos \alpha$$~~

$$AB = R - R \sqrt{2 - 2 \cos \alpha}$$

$$BC^2 = R^2 + \frac{R^2}{4} - A^2 \cos \alpha$$

$$BC = R \sqrt{\frac{5}{4} - \cos \alpha} = \frac{R}{2} \sqrt{5 - 4 \cos \alpha}$$

$$\min f(x) = \sqrt{5 - 4 \cos x} - \sqrt{2 - 2 \cos x}$$

$$f'(x) = \frac{4 \sin x}{2 \sqrt{5 - 4 \cos x}} - \frac{2 \sin x}{2 \sqrt{2 - 2 \cos x}}$$

$$\min f(x) \rightarrow R \left(1 - \sqrt{2 - 2 \cos x} + \frac{\sqrt{5 - 4 \cos x}}{2} \cdot 2 \right)$$

потому что единица.

$$(\sin x = 0) \cos x = \frac{3}{4}$$

$$x_{12} = \pi k; \arccos\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$x \in [0; 60] \Rightarrow x = \arccos\left(\frac{3}{4}\right)$$

цисловик

Тогда $f(x) = R(1 + \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}) = R(1 + \frac{\sqrt{2}}{2})$

$$R = \frac{2 - \sqrt{2}}{5}$$

Тогда Всео путь равен $\frac{(2 - \sqrt{2}) \cdot (2 + \sqrt{2})}{10}$

$$= \frac{1}{5}$$

Ответ: $\frac{1}{5}$

Циcловик
 Рассмотри картинку 2. Тут также присутствуют 2 равносcторонних и 1 прямоугольный треугольники. Тогда $\angle BOC = 150^\circ$. Тогда

S_{ABCO} также равна $2S_1 + S_2 + S_3$, где

S_1 - площадь равносcтороннего

S_2 - площадь прямоугольного

S_3 - площадь равнобед. с $\angle 150^\circ$

$$S = 4(2\sqrt{3} + 3)$$

Все остальные конфигурации повторяют эти 2 с точностью до поворота

Ответ: $8\sqrt{3} + 12$



ЧЕРНОВЫЙ

$$\cos^3(\pi x) + \cos^3(2\pi x) - \cos^3(4\pi x) = (\cos(\pi x) + \cos(2\pi x) - \cos(4\pi x))^3$$

$$2\cos^2(\pi x) - 1$$

$$2\cos^2(2\pi x) - 1$$

$$2(\cos^2(\pi x) - 1)^2 - 1$$

$$2\cos^4(\pi x) - 4\cos^2(\pi x) + 2 - 1$$

$$a^3 + (2a^2 - 1)^3 - 1$$

$$a^3 < 2 \quad [0, 3/1.6]$$

$$f(x) = \cos^3 x$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 \quad a, b, c \in [-1; 1]$$

$$a^3 + b^3 = (a + b + c)^3 + c^3$$

$$(a+b)(a+b+c)^2 - (a+b+c) \cdot c + c^2$$

$$(a+b)(a+b+c)^2 - (a+b+c) \cdot c + c^2 = a^2 + ab + b^2 + 2abc + ac + bc + c^2 - ac - bc - c^2 = a^2 + ab + b^2 + 2abc$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc - ac - bc - c^2 = a^2 + ab + b^2 + 2abc$$

$$c(3c + a + b) = ab$$

$$1 + z^2 - 1 = 0$$

$$z + \bar{z} = 3$$

$$\frac{-2 \pm 3}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\cos(\pi x) = \frac{1}{2}$$

$$\pi x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

$$x = \frac{1}{3} + 2k$$

$$k =$$

W4

ЦИСЛОЗУК

$$\cos^3(\pi x) + \cos^3(2\pi x) + \cos^3(4\pi x) = (\cos(\pi x) + \cos(2\pi x) - \cos(4\pi x))^3$$

Пусть $\cos(\pi x) = a$, $\cos(2\pi x) = b$, $\cos(4\pi x) = c$

$$a^3 + b^3 - c^3 = (a + b - c)^3$$

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)((a+b-c)^2 - (a+b-c)c + c^2)$$

$$(a+b)(a^2 + b^2 + c^2 - 2ac - 2bc + 2ab - ac - bc + c^2 + c^2 - a^2 - b^2 + ab) = 0$$

$$\begin{cases} 3c^2 - 3ac - 3bc + 3ab = 0 & (1) \\ a + b = 0 & (2) \end{cases}$$

(1) $\cos(\pi x) + \cos(2\pi x) = 0$

$$\cos(2\pi x) = 2\cos^2(\pi x) - 1$$

Введём замену $\cos \pi x = t$

$$2t^2 - 1 + t = 0$$

$$D = 1 + 8 = 9$$

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{4} = -1, \frac{1}{2}$$

$$\cos \pi x = -1$$

$$\pi x = \pi + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = 1 + k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos \pi x = \frac{1}{2}$$

$$\pi x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \frac{1}{3} + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta =$$

$$= -2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$0.3 \leq 1+k \leq 0.3$$

$$0.2 \leq k \leq -0.7$$

$$k=0 \quad x=1$$

(2) Не имеет.

$$[0.3; 1.6]$$

(1)

$$c^2 + ab = ac + bc \quad c(c-b) + a(b-c) = 0$$

$$(c-a)(c-b) = 0$$

$$\cos^2(4\pi x) + \cos 2\pi x \cdot \cos 2\pi x = \cos 4\pi x (\cos 2\pi x + \cos 2\pi x)$$

$$\cos 4\pi x = \cos 2\pi x$$

$$\cos 4\pi x = \cos \pi x$$

$$\begin{cases} \sqrt{4\pi x} = \sqrt{2\pi x} \\ \sqrt{4\pi x} = -\sqrt{2\pi x} \end{cases}$$

$$\sin 3\pi x = 0$$

$$\sin \pi x = 0$$

$$\sin \frac{3}{2}\pi x = 0$$

$$\sin \frac{5}{2}\pi x = 0$$

$$x = \frac{k}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{k \cdot 2}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{2}{5}k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, 0.4, 0.8, 1.2, 1.6$$

Ответ: $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, 0.4, 0.8, 1.2, 1.6$.

ЦЕРНОВИК

$$f_1(x) = (x + a_1)(x^2 + b_1x + 12) = x^3 + x^2(b_1 + a_1) + x(12 + a_1b_1) + 12a_1$$

$$f_2(x) = (x + a_2)(x^2 + b_2x + 15) = x^3 + x^2(a_2 + b_2) + x(15 + a_2b_2) + 15a_2$$

$$f_3(x) = (x + a_3)(x^2 + b_3x + 20) = x^3 + x^2(a_3 + b_3) + x(20 + a_3b_3) + 20a_3$$

$$f_1(x) - f_2(x) = x^2(a_1 + b_1 - a_2 - b_2) + x(a_1b_1 - a_2b_2 - 3) + 12a_1 - 15a_2 = 0$$

$$a_1 + b_1 = a_2 + b_2 \quad \frac{a_3}{3} = b_2 - b_1$$

$$a_1b_1 = a_2b_2 + 3 \quad a_3 \left(\frac{5}{3}b_1 - \frac{4}{3}b_2 \right) = 3$$

$$12a_1 = 15a_2$$

$$\frac{a_3}{3} = (b_2 - b_1) / (5b_1 - 4b_2) = 3$$

$$\begin{cases} 4a_1 = 5a_2 \\ 3a_1 = 5a_3 \\ 2a_2 = 4a_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 1.25a_2 \\ \frac{15}{4}a_1 = 5a_3 \\ \frac{3}{4}a_1 = a_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{5}{4}a_2 = \frac{4}{3}a_3 \\ 3a_2 = 4a_3 \end{cases}$$

$$\frac{15}{4}a_2 = \frac{20}{3}a_3$$

$$a_1 = \frac{5}{4}a_2$$

$$a_2 = \frac{4}{3}a_3$$

$$a_1 = \frac{5}{3}a_3$$

$$5 + a_2b_3 = a_2b_2$$

$$5 = a_3 \left(\frac{4}{3}b_2 - b_3 \right)$$

$$\frac{a_3}{3} = b_2 - b_1$$

$$20 + a_3b_3 = 15 + a_2b_1$$

$$\frac{a_3}{3} (4b_2 - 3b_3) = 5$$

$$\frac{a_3}{3} (5b_1 - 3b_3) = 8$$

$$\frac{4b_2 - 3b_3}{5b_1 - 3b_3} = \frac{5}{8}$$

$$32b_2 - 24b_3 = 5(5b_1 - 3b_3)$$

$$32b_2 - 9b_3 = 25b_1 - 15b_3$$

$$\frac{5b_1 - 4b_2}{4b_1 - 3b_3} = \frac{3}{8}$$

$$42b_2 - 9b_3 = 25b_1 - 20b_1$$

$$32b_2 =$$

$$a_1^2 - a_1 b_2 + 15 = 0 \quad b_2 = \frac{a_1^2 + 15}{a_1} = a_1 + \frac{15}{a_1} = \frac{5}{3} a_3 + \frac{a_3}{a_3} \quad \text{ЦЕРНОВИК}$$

$$a_2^2 - a_2 b_1 + 12 = 0$$

$$b_1 = \frac{4}{3} a_3 + \frac{a_3}{a_3} \quad b_2 - b_1 = \frac{a_3}{3}$$

$$b_3 =$$

$$(x + a_2)(x + a_3) = x^2 + b_3 x + 20$$

$$a_2 \cdot a_1 = 20$$

$$(x + a_3)(x + a_2) = x^2 + b_1 x + 12$$

$$a_2 + a_1 = b_3$$

$$a_2 a_3 = 12$$

$$a_3 = \frac{12}{a_2}$$

$$a_1 a_3 = 15$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$$

Г.т

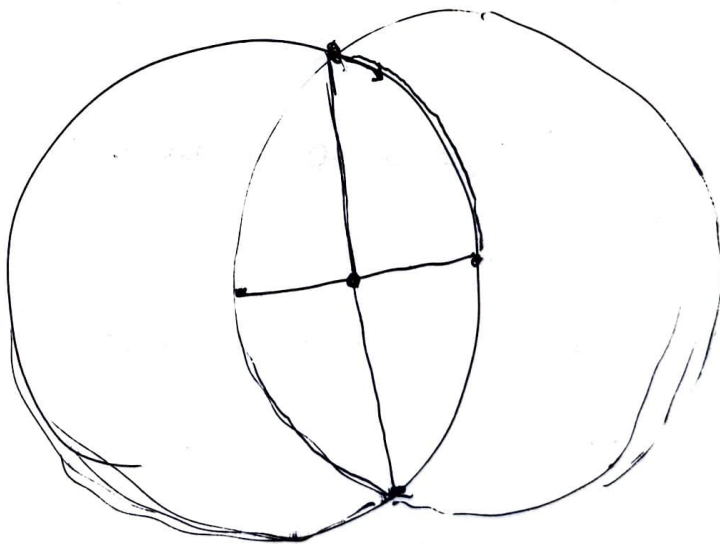
$$b_1 =$$

$$a_1 = \frac{5}{4} a_2$$

$$\frac{5}{4} a_2^2 = 20$$

$$a_2 = 4 \quad a_1 = 5$$

$$a_3 = 3$$



N5

ЦИСЛОВИК

Свободным членом f_1 является $12a_1, f_2 - 15a_1, f_3 - 20a_3$.

$$f_1(0) = f_2(0) = f_3(0) \Rightarrow a_1 \neq a_2, a_3 \neq a_2, a_1 \neq a_3.$$

$$f_1(-a_1) = 0 \quad f_3(-a_3) = 0 \Rightarrow a_3^2 - a_3 a_2 + 15 = 0$$

$$f_2(-a_1) = 0 \Rightarrow a_1^2 - a_1 a_2 + 15 = 0 \quad \text{Получим, что}$$

$$(-a_3) \text{ и } (-a_1) \text{ это корни } x^2 - a_2 x + 15 = 0. (*)$$

$$(x + a_3)(x + a_1) = x^2 + a_2 x + 15 \Rightarrow a_3 a_1 = 15$$

$$\text{Аналогично, } a_3 a_2 = 12 \text{ и } a_2 a_1 = 20$$

$$\begin{cases} a_3 a_1 = 15 \\ a_3 a_2 = 12 \\ a_1 a_2 = 20 \end{cases} \quad a_3 = \frac{15}{a_1} \quad \frac{a_2}{a_1} = \frac{12}{15} \quad a_2 = \frac{12}{15} a_1$$

$$a_1^2 = \frac{15 \cdot 20}{12} = 25 \Rightarrow a_1 = 5 \quad \text{но } a_i > 0$$

$$a_2 = 4 \quad a_3 = 3$$

$$\text{Из } (*) \quad a_2 = a_3 + a_1 \quad \text{аналогично } a_1 = a_2 + a_3,$$

$$a_3 = a_1 + a_2$$

$$\text{Тогда } a_1 + a_2 + a_3 + a_1 + a_2 + a_3 = 3a_1 + 3a_2 + 3a_3 =$$

$$3 \cdot 12 = 36$$

Ответ: 36

2

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
22-93-26-76		+	+	+	+	+	+	0	0
	68	$\frac{f}{12}$	$\frac{+}{12}$	$\frac{+}{9}$	$\frac{+}{12}$	$\frac{+}{12}$	$\frac{+}{9}$	0	0