0 675104 060009

67-51-04-06
(162.2)

1755

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11

Место проведения Санкт-Петербург
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Мельничук Екатерины Эдуардовны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

«13» апреля 2025 года

Подпись участника

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
67-51-07-06	70	+	±	+	∅	+	–	+	∅

Лиев Зелинов
70 (семьдесят)

черновик

$4x^2+12x+9>0$ $\qquad x+1<0$

~~$4x^2+2\cdot 2x\cdot 3$~~

$7+2\sqrt6=1+2\sqrt6+6=(1+\sqrt6)^2$

$(2x+3)^2>0$ $\qquad 7-2\sqrt6=(1-\sqrt6)^2$

$x=-1,5$ $\qquad x=-\frac{2}{3}$

$|2x+3|+|3x+2|-|x+1|=1+\sqrt6-(1-\sqrt6)=2\sqrt6$

$x+1<0 \to x<-1 \to$ $\qquad -1,5 \quad -1 \quad x$

$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=$

$x<-1,5$

$-2x-3-3x-2+x+1=2\sqrt6$ $\qquad =$ ~~$x^3-x^2y+xy^2+yx^2-xy^2$~~

$-4x-4=2\sqrt6 \to x=\frac{2\sqrt6+4}{2}$ $\qquad x^3-x^2y+xy^2+yx^2-xy^2+y^3=$

наим. полож.

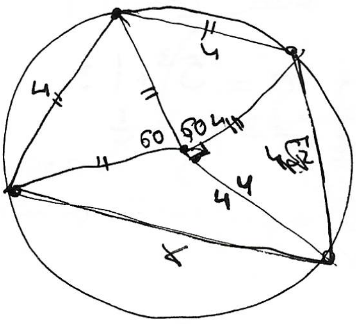
2. a – ? $\qquad 5^{3-\frac{1}{x}} \geq a+\sin 3^x \geq$ ачи одного реш. на $x>0$

$x>0 \to 3^x>1$ $\qquad -1\leq \sin 3^x \leq 1$

при $x\in(-1;1)$ $\qquad$ при $x>0 \to 5^3>5^{3-\frac{1}{x}}$

т.е. при $a=5^3$

3.



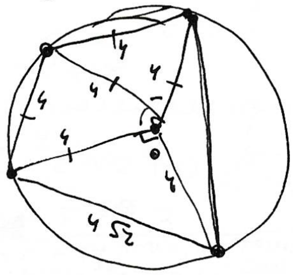
$R=4$

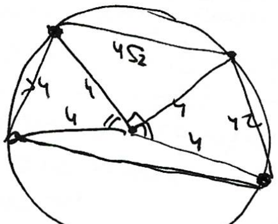
$2\cdot 60+90=90+120=210$

$360-210=150$

$\cos 150^\circ=-\cos 30^\circ=-\frac{\sqrt3}{2}$

$x=$





4. $\cos^3(\pi x)+\cos^3(2\pi x)-\cos^3(4\pi x)=$

~~$\cos^3\pi x+\cos^3(2\pi x)-\cos^3(4\pi x)$~~ $=$ $\qquad a^3+b^3-c^3=(a+b-c)^3$

$=$

$a^3+b^3=(a+b-c)^3+c^3=(a+b-c+c)((a+b-c)^2-(a+b-c)c+c^2)=$

$=(a+b)((a^2+ab-c)^2-(a+b-c)\cdot c+c^2)=$

$=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$\to \left[\begin{array}{l} a+b=0 \\ (a+b-c)^2-ac-bc+c^2+c^2=a^2-ab+b^2 \\ a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ac-ac-bc+2c^2=a^2-ab+b^2 \\ 3c^2+3ab-3bc-3ac=0 \end{array}\right.$

$c^2+ab-bc-ac=0$

$\cos^2 4\pi x+\cos\pi x\cdot\cos 2\pi x-\cos 2\pi x\cdot\cos 4\pi x-$

1. $\sqrt{4x^2+12x+9} + \sqrt{9x^2+12x+4} - \left(\sqrt{-(x+1)}\right)^2 = \sqrt{7+\sqrt{24}} - \sqrt{7-\sqrt{24}}$

$\sqrt{(2x+3)^2} + \sqrt{(3x+2)^2} - \left(\sqrt{-(x+1)}\right)^2 = 1+\sqrt{6} - \sqrt{(1-\sqrt{6})^2}$

$-(x+1) \geq 0 \rightarrow x+1 \leq 0 \rightarrow \boxed{x \leq -1}$

$|2x+3| + |3x+2| - |x+1| = 1+\sqrt{6} - (\sqrt{6}-1) = 2$

при $x \leq -1{,}5$:

$-2x-3-3x-2+x+1 = 2 \rightarrow -4x-4=2 \rightarrow x = \frac{6}{4} = 1{,}5$

$\varnothing$ т.к. $x \leq -1{,}5$

при $-1{,}5 < x \leq -1$: $2x+3-3x-2+x+1 = 2$

$2=2 \rightarrow$ тождество.

след. $x \in [-1{,}5;-1]$

Ответ: $[-1{,}5;-1]$

---

2. при $x>0 \rightarrow \frac{1}{x}>0 \rightarrow 3-\frac{1}{x}<3 \rightarrow 5^{3-\frac{1}{x}} < 5^3$

заметим, что при $x \longrightarrow +\infty$ $3-\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 3$ и

$5^{3-\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 5.$ приэтом при $3^x>0$; $\sin 3^x$ может принимать любое значение от $[-1;1]$

$a+1 \geq a+\sin 3^x \geq a-1$ соотв. при $a=5^3+1$:

$5^{3-\frac{1}{x}} < 5^3$

заметим, что при $a<126$ найдется такой x: $a+\sin 3^x < 126-1$; $a+\sin 3^x<125$ и т.к. $\sin$ - это периодич. ф-ция найдется x такой что $a+\sin 3^x < 5^{3-\frac{1}{x}}$ и $x>0$!

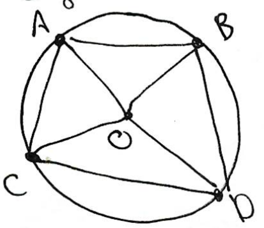
$a+\sin 3^x \geq 5^3$ | $5^{3-\frac{1}{x}} \geq a+\sin 3^x$

$5^{3-\frac{1}{x}} < 5^3$ | невозможно.

$\rightarrow$ Ответ: $5^3+1=126$

---

3. $\exists$ середина окр-ти в кот. вписан четырёхуг. будет т. O, вершины 4-ка A, B, C, D. Тогда [illegible] $CD = x$ сторона, кот. не знаем.



Возможны 2 сл.:

1сл.: $AB = 4\sqrt{2}$, $AD = BC = 4$ | ΔABO и ΔOBC р/с, т.к. $R=4$, а ΔAOB п/у по обр. т. Пифагора $\rightarrow$ сумма углов при т. O будет $60+60+90+\alpha = 360°$

(т.к. у нас 2 стороны по 4 то их расположение равносильно) $\rightarrow \alpha = 150°$

2сл.: $AB = AC = 4$, $BC = 4\sqrt{2}$ | ΔAOB и ΔAOC р/с, ΔOBC п/у

Σ углов при верш. O будет $60+60+90+\alpha = 360°$

$\alpha = 150°$

Тогда и в 1 и 2 сл. получ. р/б Δ с углом $150°$ м/у равн. сторонами $\rightarrow$ такие Δ равны

а в обоих сл. $S_{4\text{-ка}} = S_{AOB} + A_{BOD} + S_{OCD} + A_{AOB} =$

$= \frac{R^2 \cdot \sin 60° + R^2 \sin 60° + R^2 \cdot \sin 90° + R^2 \cdot \sin 150°}{2} = 8 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{1}{2}\right) =$

$= \boxed{8\sqrt{3}+12}$

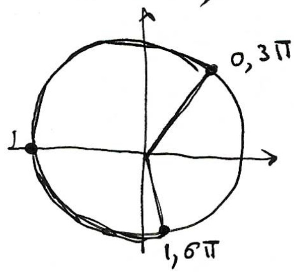
67-51-04-06
(162.2)

от [0,3; 1,6]

$\boxed{\text{[illegible]}}$ $0{,}3\pi = \frac{3}{10}\pi$

$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\beta-\alpha)+\cos(\alpha+\beta)\right]$



$\frac{10}{10}\pi$

$a^3+b^3-c^3=(a+b-c)^3$

$(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)((a+b-c)^2-(a+b-c)c+c^2)$

$a^2-ab+b^2 = a^2+b^2-c^2+2ab-2bc-2ac-abc-bc+c^2+c^2$

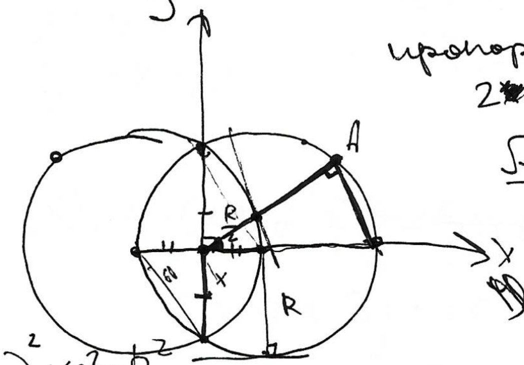
$0 = 3ab-3bc-3ac+3c^2$

$c^2 = bc+ac-ab$

$(\cos 4\pi x)^2 = \cos 2\pi x\cdot\cos 4\pi x+\cos\pi x\cdot\cos 4\pi x-\cos\pi x\cdot$

$(\cos 4\alpha)^2 = \cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha+\cos\alpha\cdot\cos 4\alpha-\cos\alpha\cos 2\alpha =$

$= \frac{1}{2}\cdot(\cos 2\alpha+\cos 3\alpha)+\frac{1}{2}(\cos 3\alpha+\cos 5\alpha)-\frac{1}{2}(\cos\alpha+\cos 3\alpha)$



пропорц. длин.

2 от $\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot R$ до $\frac{3}{2}R$

$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot R\cdot 2 \ \vee\ \frac{R}{2}2+R$

$\sqrt{3}R < 2R$

$x^2(k^2+1)$

0;0

$A\in\left(x-\frac{R}{2}\right)^2+y^2=R^2$ от $\frac{R}{2}$ до $\frac{\sqrt{3}}{2}R$

$x^2-Rx+\frac{R^2}{4}+k^2\cdot x^2=R^2$

$(x-0{,}5R)^2+y^2=R^2$

$y=k\cdot x \to (x-0{,}5R)^2+k^2\cdot x^2=R^2$

$k^2=\frac{R^2-(x-0{,}5R)^2}{x^2}$

$k\cdot x=(x+0{,}5)^2+y^2$

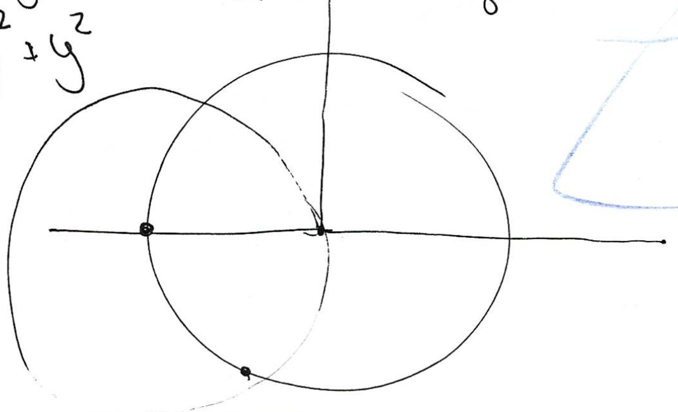
$k=\frac{\sqrt{R^2-(x-0{,}5R)^2}}{x}$

$\sqrt{R^2-(x-0{,}5R^2)}=(x+0{,}5R)^2+y^2$

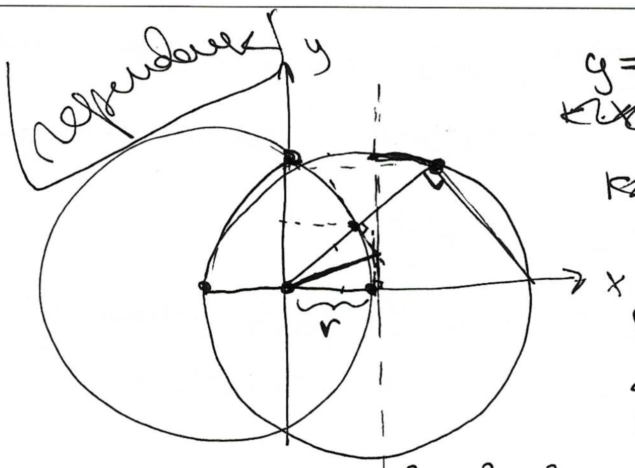
$y=k\cdot x$ она пересек. с ω_1 и ω_2

$$\begin{cases} k\cdot x=\left(x-\frac{R}{2}\right)^2+y^2 \\ k\cdot x=\left(x+\frac{R}{2}\right)^2+y^2 \end{cases}$$

~~с [illegible]~~



Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!



$y = k \cdot x$

$\cancel{k2x}\ (x-r)^2 + y^2 = (2r)^2$

$\cancel{kx}\ (x+r)^2 + y^2 = (2r)^2$

$y = k \cdot x$

$$\begin{cases}(x-r)^2 + k^2 \cdot x^2 = 4r^2 \\ (x+r)^2 + k^2 \cdot x^2 = 4r^2\end{cases}$$

$4r^2 +$

$$\begin{cases}x^2 - 2xr + r^2 + k^2 \cdot x^2 = 4r^2 \\ x^2 + 2xr + r^2 + k^2 \cdot x^2 = 4r^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2(k^2+1) - 2x \cdot r - 3r^2 = 0 \\ x^2(k^2+1) + 2x \cdot r - 3r^2 = 0\end{cases} \to x_{1,2} = 2r \pm \sqrt{}$$

$-a_1; a_2; a_3$ - корни всех трёх ур-ний

$$x_1 = \frac{2r \pm \sqrt{4r^2 + 12r^2(k^2+1)}}{2(k^2+1)}$$

$$\begin{cases}x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}\end{cases}$$

$x_2 =$

№5. $f_1(x) = \cancel{(x+a_1)}\ \cancel{(x^2 + b_1 x}\ f_2(x) = f_3(x)$

$x = 0 \to a_1 \cdot 12 = a_2 \cdot 15 = a_3 \cdot 20$

$a_1 = \frac{5}{3} a_3; \quad a_2 = \frac{4}{3} a_3$

$(x_1 + \frac{5}{3} a_3)(x^2 + b_1 x + 12)$

$(x_2 + \frac{4}{3} a_3)(\ldots$

$a_3^2 + b_2 \cdot a_3 + 15 = 0$

$b_2 = \frac{-15 - a_3^2}{a_3}$

$(x_3 + a_3) \quad \ldots$

$f(-a_3) = 0 = \frac{\cancel{a_3}}{\cancel{3}}(a_3^2 + b_2 \cdot a_3 + 15) = \frac{2}{\cancel{3}} \cancel{a_3} (a_3^2 + a_3 \cdot b_1 + 12)$

$a_3^2 + b_2 \cdot a_3 + 15 = 2a_3^2 + 2a_3 \cdot b_1 + 12$

a_3^2

$\to \quad -a_2 - a_3 = -b_1$

$a_2 \cdot a_3 = 12$

$$\begin{cases}a_2 + a_3 = b_1 \\ a_2 \cdot a_3 = 12 \\ a_1 + a_3 = b_2 \\ a_1 \cdot a_3 = 15 \\ a_2 + a_1 = b_3 \\ a_2 \cdot a_1 = 20\end{cases}$$

67-51-04-06 (162.2)

(5) для люб. x $f_1(x)=f_2(x)=f_3(x)$ чистовик

$x=0$: $a_1\cdot 12=a_2\cdot 15=a_3\cdot 20 \rightarrow a_1=\frac{5}{3}a_3$, $a_2=\frac{4}{3}a_3$

заметим, что $f_1(-a_1)=(-a_1+a_1)\cdot(x^2+b_1x+12)=0=$ $0=$

$=f_2(-a_1)=f_3(-a_1)$

аналогично

$f_1(-a_2)=f_2(-a_2)=f_3(-a_2)$

$f_1(-a_3)=f_2(-a_3)=f_3(-a_3)$

но $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ — ур-я 3 степени, т.е. у них корней макс. три корня. Тогда получается, что $-a_1$, $-a_2$, $-a_3$ — корни $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$.

По т. Виета для ~~каждой~~ ф-ции:

(для кажд. многочлены многочлен 2 степени. т.е. для $x^2+b_1\cdot x+12$ в $f_1(x)$, $x^2+b_2\cdot x+15$ в $f_2(x)$ и т.д.)

: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-a_2-a_3=-b_1\\ a_2\cdot a_3=12\end{cases}\\ \begin{cases}-a_1-a_3=-b_2\\ a_1\cdot a_3=15\end{cases}\\ \begin{cases}-a_2-a_3=-b_3\\ a_2\cdot a_3=20\end{cases}\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a_2+a_3=b_1\\ a_2\cdot a_3=12\end{cases}\\ \begin{cases}a_1+a_3=b_2\\ a_1\cdot a_3=15\end{cases}\\ \begin{cases}a_2+a_1=b_3\\ a_2\cdot a_1=20\end{cases}\end{array}\right.$

$a_1=\frac{5}{3}a_3$

$\downarrow$

$a_1 a_3=\frac{5}{3}\cdot a_3^2=15$

$a_3^2=9$

т.к. $a_3>0$

$a_3=3$

$\rightarrow a_1=5$

$\rightarrow a_2=\frac{4}{3}a_3=4$

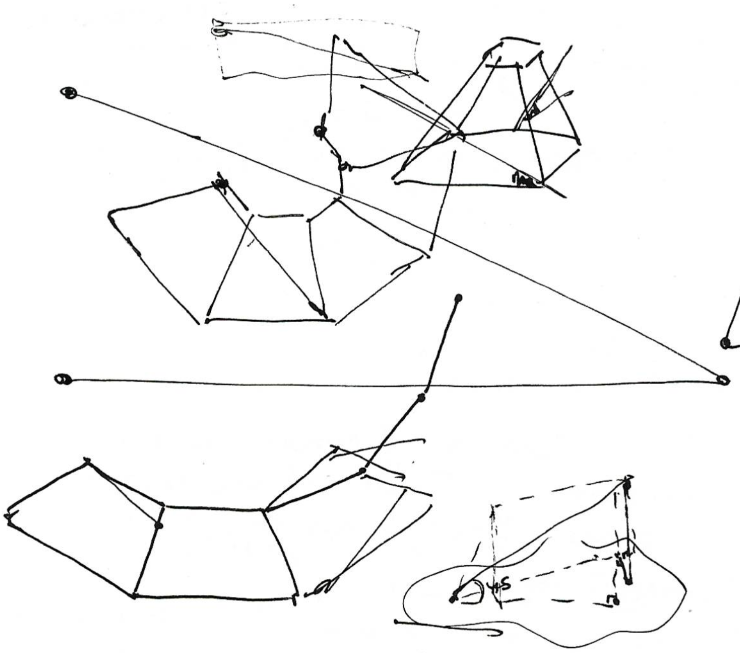
$b_1=a_2+a_3=7$

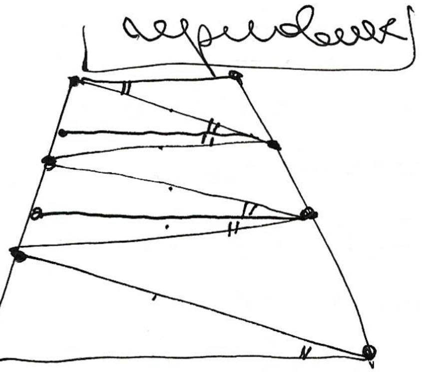
$b_2=a_1+a_3=8$

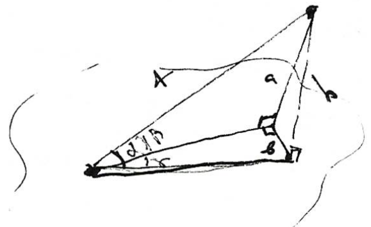
$b_3=a_2+a_1=9$

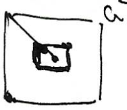
$\rightarrow a_1+a_2+a_3+b_1+b_2+b_3=5+4+3+7+8+9=$

$=9+10+17=10+26=\boxed{36}$ ← ответ





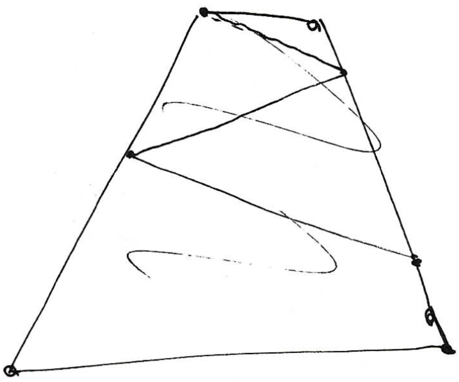




$a^2=8$

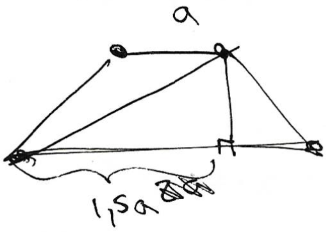
$\sin\alpha = \frac{h}{x}$

$\sin\beta = \frac{a}{x}$; $\sin\gamma = b$



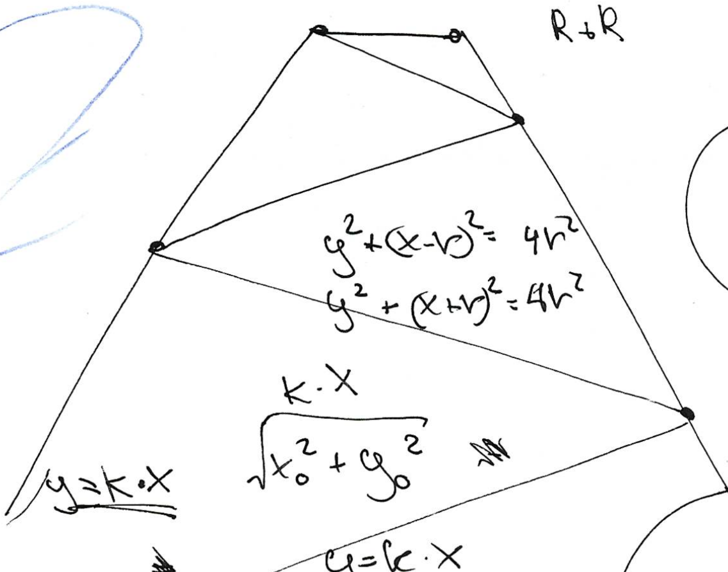
$1+2+4+8+16 = 31$

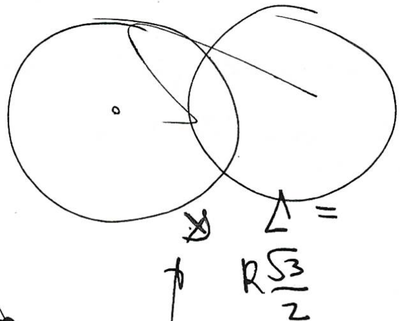
~~128~~ 124



$R\sqrt{3}$

$R+R$





$y^2+(x-r)^2=4r^2$

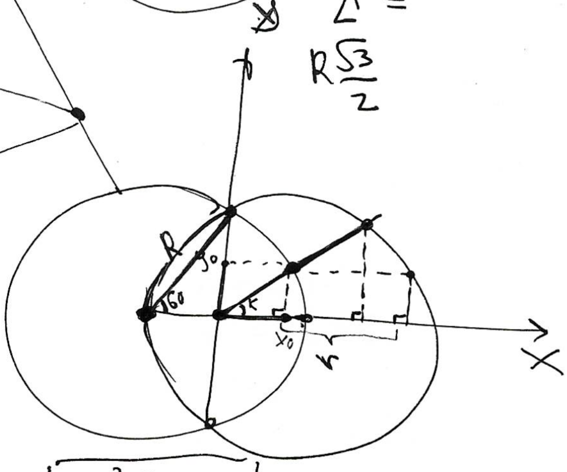
$y^2+(x+r)^2=4r^2$

$\Delta = R\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{k\cdot x}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$

$\underline{y=k\cdot x}$

$y=k\cdot x$



$y^2+x^2+2rx=3r^2$

$k^2\cdot x^2+x^2+2rx=3r^2$

$y_0^2+x_0^2=\sqrt{3r^2-2rx}$

$y_0^2+x_0^2=\sqrt{3r^2+2rx}$

$\frac{a}{a\cdot k^5} = \frac{2^3}{2^8} = \frac{1}{2^5}$

$2^4=16$ $2^6=64$ $2^8=256$
$2^5=32$ $2^7=128$

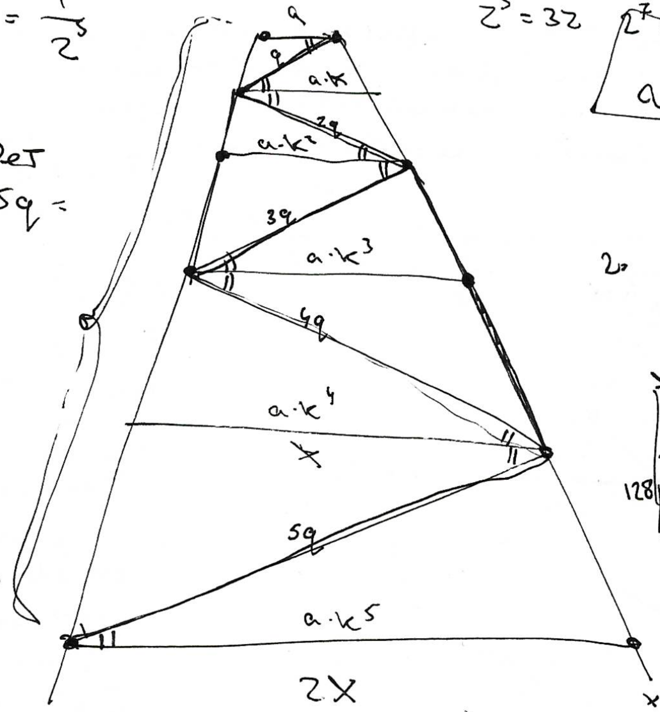
черновик

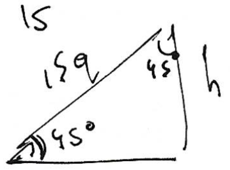
$k=2$

Единица будет

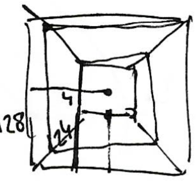
$q+2q+3q+4q+5q =$
$= 15q$

15



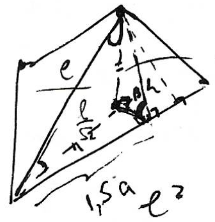


$h_x = \frac{\sqrt2}{2}\cdot 15q$



β; $h\cdot\cos\beta$

$$\begin{cases} l = h^2 + (1{,}5\cdot a)^2 \\ l\frac{\sqrt2}{2} = (h\cdot\cos\beta)^2 + (1{,}5\cdot a)^2 \end{cases}$$

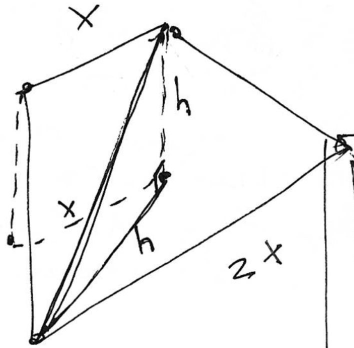


$$\begin{cases} h\cdot\sin\beta = l\cdot\frac{\sqrt2}{2} \\ l^2 = (1{,}5a)^2 + h^2 \\ (1{,}5a)^2 + (h\cdot\cos\beta)^2 = \left(\frac{l}{\sqrt2}\right)^2 \end{cases}$$

$$\frac{2}{\sqrt2} = \frac{h^2 + (1{,}5\cdot a)^2}{(h\cdot\cos\beta)^2 + (1{,}5\cdot a)^2}$$

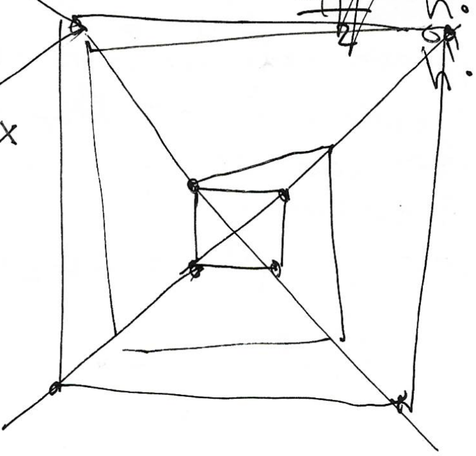
$$\underbrace{(1{,}5a)^2 + h^2}_{l^2} - h^2\cdot\sin^2\beta = \frac{l^2}{2}$$

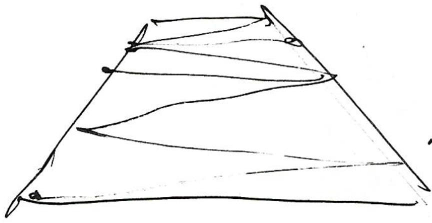
$$h^2\cdot\sin^2\beta = \frac{l^2}{2}$$



$h\cdot\cos\beta = 144$

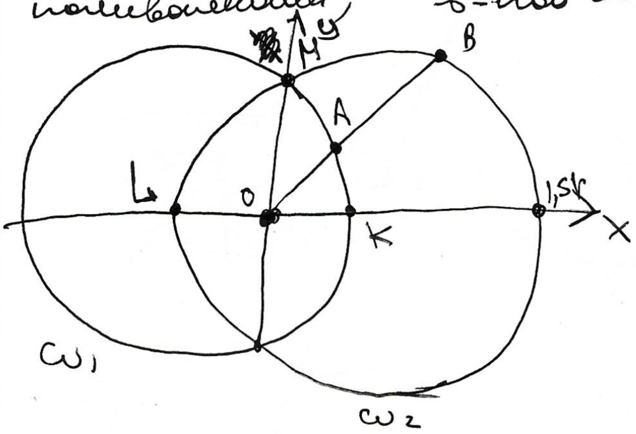
$h\cdot\sin\beta$ – ?





Задача №6. $\boxed{\text{чистовик}}$

Заметим, что т.к. скорость мыши постоянна, то расстояние, кот. она бежала под одной или двумя поливалками пропорц. скорости мыши. Тогда нам нужен минимум $2a+b$, где a — расст., кот. мышь бежала под двумя поливалками; b — под одной.



Введём оси как показано на рис. Мыши нет смысла бежать по ломаной, т.к. её длина всегда меньше прямой. Картинка симметрична отн. начала коорд. → считаем K только I четверть. $x\in[0;1{,}5r]$

$I\ R=2r$.

ур-я окр-тей:

$y=kx$ — прямая, на кот. лежит отрезок — путь мыши.

$$\begin{cases} y^2+(x-r)^2=4r^2 \\ y^2+(x+r)^2=4r^2 \end{cases}$$

отрезок OA будет иметь длину: $y^2+x^2=3r^2-2rx$

OB: $y^2+x^2=3r^2+2rx$

нужно минимизировать $2OA+|OB-OA|=$

$=2\sqrt{3r^2-2rx}+\sqrt{3r^2+2rx}-\sqrt{3r^2-2rx}=$

$=\sqrt{3r^2+2rx}+\sqrt{3r^2-2rx}=$

$=OA+OB$. Но тогда заметим, что $OA+OB$ будет минимальным тогда, когда т. B совпад. с т. M. (и с т. A) → мыши выгоднее всего бежать из т. M сразу в вверх.

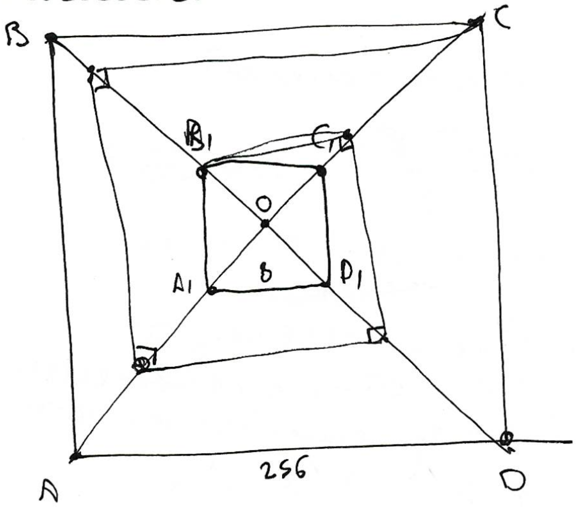
$LM=MK=LK=2r\to\Delta$ р/с $\to\angle KLM=60^\circ$. Тогда

$OM=\frac{\sqrt3}{2}\cdot LM=\frac{\sqrt3}{2}\cdot R=\underbrace{\frac{\sqrt3}{2}\cdot\frac{2-\sqrt2}{5}}_{\text{Ответ.}}=$

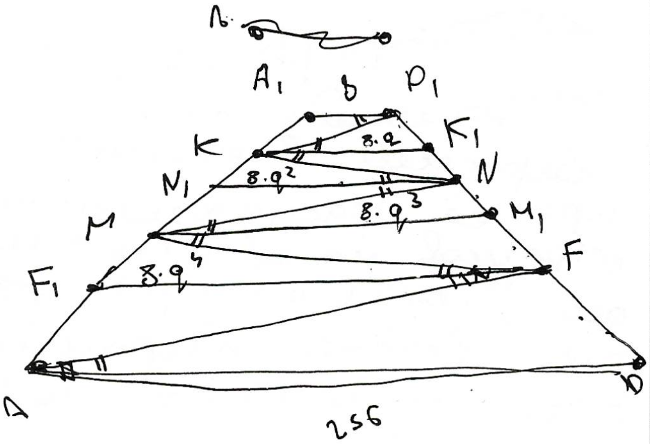
$=\frac{\sqrt3(2-\sqrt2)}{10}$

Задача №7 | чистовик

Х проекцию усечённой пирамиды на плоскость нижнего основания.



Тогда если нет "наложений" все трапеции друг на друга, то получим такую фигуру:



Заметим, что т.к. пружина по исходной пирамиде шла не прерываясь, причем угол м/у ней и плоск. осн. (минимальный) всегда был 45°, то и угол м/у ней и стороной осн. будет пост. Тогда для AA_1D_1D: $AF \parallel MN \parallel KD_1$ и $KN \parallel MF$. Проведём через т. K, N, M, F прямые, ∥-ые осн. и отметим равенства углов. Тогда заметим, что образ. трапеций подобны. ($A_1D_1K_1K$, KNK_1, K_1NN_1 и т.д.)

$KK_1 = A_1D_1 \cdot q \to N_1N = q^2 \cdot A_1D_1 \ldots \to AD = q^5 \cdot A_1D_1$

$256 = 2^8 = 2^3 \cdot q^5 \to q = 2$

$D_1D = OD - OD_1 = \frac{256}{\sqrt2} - \frac{8}{\sqrt2} = 128\sqrt2 - 4\sqrt2 = 124\sqrt2$

в кв. диагон. $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$

для бок. сторон трапец. аналог.: $K_1N = q \cdot D_1K_1 = 2 \cdot D_1K_1$

~~$NM_1 = q \cdot K_1N$~~ ~~$FD = q^4 \cdot D_1K_1 = 16 \cdot D_1K_1$~~

$NM_1 = 2 \cdot K_1N = 4 \cdot D_1K_1$

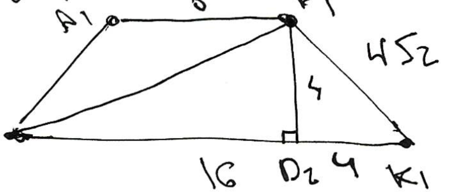
$M_1F = 8 \cdot D_1K_1$

$FD = 16 \cdot D_1K_1$

т.е. $DD_1 = D_1K_1(1+2+4+\ldots+16) = 31 DK_1$

$DK_1 = \frac{124\sqrt2}{31} = 4\sqrt2$

из трапец. $KA_1D_1K_1$: т.к. она р/б, то $D_2K_1 = \frac{KK_1 - A_1D_1}{2} = 4$ и $\angle D_1D_2K_1 = 90^\circ$ (D_1D_2 - высота).



т.е. $\angle D_1D_2K_1 = 45^\circ \to \triangle$ р/б и п/у

$\to D_1D_2 = 4$; $KD_2 = 12$

$KD_1^2 = 12^2 + 4^2 = 4^2 \cdot 10 \to KD_1 = 4\sqrt{10}$ по т. Пифагора

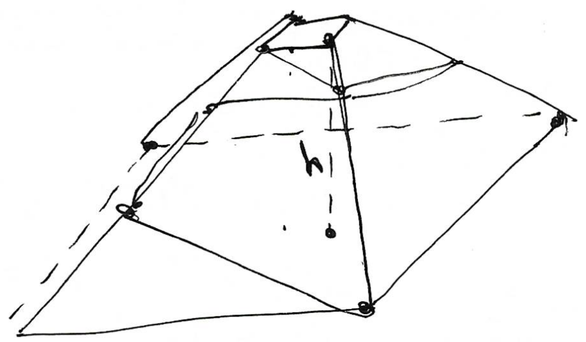
~~из-за всего того же подобия~~

но заметим, что KD_1 - это проекция на плоск. осн., а по усл. прямая в-путь путешественника находится под углом в 45° к пл-ти осн. ~~[illegible]~~ ‡ $\boxed{\text{чистовик}}$

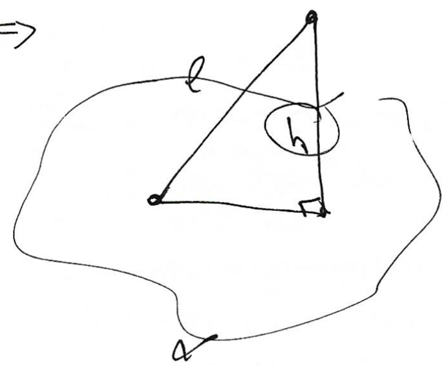
Из всё того же подобия трапеций получаем, что: $AF + FM + MN + NK + KD_1 = \cancel{16}KD_1(16+8+4+2+1) =$
$= 31\cdot KD_1 = 31\cdot 4\cdot\sqrt{10} = 124\sqrt{10}$

$\Rightarrow$ Длина ломаной l на самой пирамиде $\dfrac{124\sqrt{10}}{\cos 45^\circ} = \dfrac{124\sqrt{10}\cdot 2}{\sqrt{2}} = 124\cdot\sqrt{20}$ ‡

~~Теперь~~ Но т.к. ломаная на самой пирамиде дошла из ~~[illegible]~~ верхней вершины в нижнюю, то при её "распрямлении", т.е. откладывании отрезков на одн. прямой (с углом 45° к плоск. осн.) мы получим ~~р/с~~ р/б п/у Δ, т.е. высота пирамиды равна проекции этой ломаной на плоскость основания.



$\Leftrightarrow$



Ответ: $124\sqrt{10}$ $\sqrt{10}$