0 212570 810006

21-25-70-81
(161.12)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников „Ломоносов" по математике
наменование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Миронюк Екатерины Станиславовны
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

+1 лист

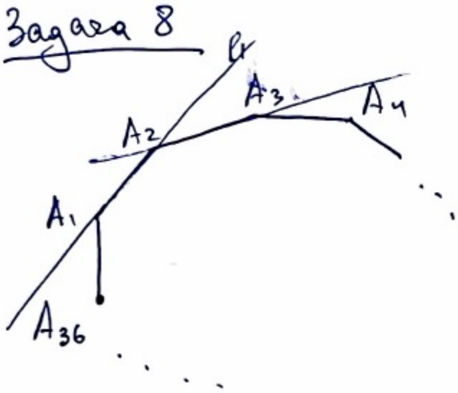
Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
21-25-70-81 (161.12)	80	+	+	+	±	+	±	−	∅

21-25-70-81
(161.12)

80
восемьдесят

Задача 8

ЧИСТОВИК



пусть многоугольник — $A_1A_2 \ldots A_{36}$, l_1 — прямая, проходящая через A_1A_2. найдём кол-во способов провести l_2 и l_3, чтобы получались разные тр-ки.

1. пусть $l_2 \supset A_2A_3$, тогда способов выбрать l_3 —

21-25-70-81
(161.12)

ЧИСТОВИК

Задача 1

$$\sqrt{4x^2+12x+9}+\sqrt{x^2+6x+9}+\left(\sqrt{x+2}\right)^2=\sqrt{4+\sqrt{12}}-\sqrt{4-\sqrt{12}}$$

$$\begin{cases} |2x+3|+|x+3|+x+2=\sqrt{3+2\sqrt{3}+1}-\sqrt{3-2\sqrt{3}+1} \\ x\geq -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq -2 \\ |2x+3|+2x+5=\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}-\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} \end{cases} \qquad \sqrt{3}>1$$

$$\begin{cases} x\geq -2 \\ |2x+3|+2x+5=\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq -2 \\ |2x+3|+2x+5=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq -2 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geq -\frac{3}{2} \\ 4x=-6 \end{cases} \\ \begin{cases} x<-\frac{3}{2} \\ 2=2 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \iff \begin{cases} x\geq -2 \\ \left[\begin{array}{l} x=-\frac{3}{2} \\ x<-\frac{3}{2} \end{array}\right. \end{cases} \iff x\in\left[-2;-\frac{3}{2}\right]$$

Ответ: $\left[-2;-\frac{3}{2}\right]$

Задача 2

$$\underbrace{2^{5-\frac{1}{x}}}_{f(x)}\geq\underbrace{a+\sin 2^x}_{g(x)}$$ нет реш. при $x>0$

$a>0$

$\min(a)=?$

при $x>0$:

$\left(\frac{1}{x}\right)\downarrow\downarrow \quad \left(5-\frac{1}{x}\right)\uparrow\uparrow \quad \left(2^{5-\frac{1}{x}}\right)\uparrow\uparrow$

$0<2^{5-\frac{1}{x}}<2^5=32$

при $x\to 0$ $\left(\frac{1}{x}\right)\to\infty$, значит $\left(5-\frac{1}{x}\right)\to-\infty$

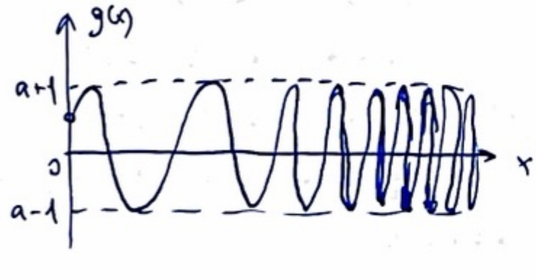
а значит, $\left(2^{5-\frac{1}{x}}\right)\to 0$

при $x\to\infty$ $\left(2^{5-\frac{1}{x}}\right)\to 32$

$-1\leq\sin 2^x\leq 1$

$a-1\leq\sin 2^x+a\leq 1+a$

граф. ф-ий выглядят примерно так:



чистовик (Задача 2 продолж.)

если нерав-во не выполн., то график $g(x)$ находится выше $f(x)$, что выполняется при:

$a-1 \geq 32$

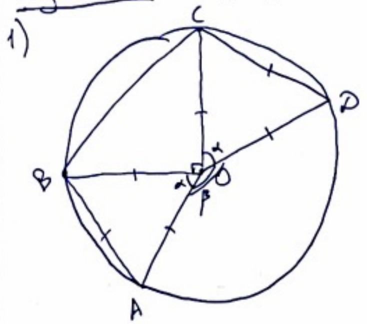
$a \geq 33$

$\min(a) = 33$

Ответ: 33

Задача 3. $R=6$

1)



пусть O - центр окр-ти, $AB=CD=6$, $BC=6\sqrt{2}$,

тогда $BO=OC=AO=OD=R=6$

и $OB^2+OC^2=BC^2$

$6^2+6^2=6^2\cdot 2$

$\Rightarrow \angle BOC = 90^\circ$

и т.к. $BO=AO=AB$ и $CO=DO=CD$ то $\triangle BOA$ и $\triangle COD$ – р/с $\Rightarrow \angle BOA = \angle COD = \alpha = 60^\circ$

тогда больший из углов AOD равен $90^\circ + 2\cdot 60^\circ = 210^\circ$

$\Rightarrow$ ~~меньш~~ $\angle(AO, OD) = \beta =$

$= 360^\circ - 210^\circ = 150^\circ$

$\Rightarrow S_1 = \frac{1}{2}(AO\cdot BO\cdot \sin\alpha + BO\cdot CO\cdot \sin 90^\circ +$

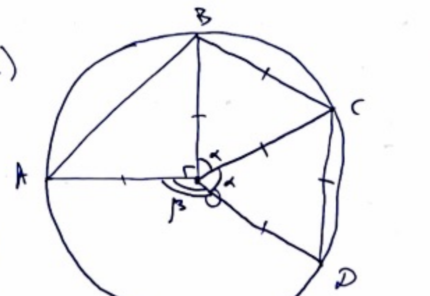
$+ CO\cdot DO\cdot \sin\alpha + AO\cdot DO\cdot \sin\beta) =$

$= \frac{1}{2}(\cdot 36(2\cdot \sin 60^\circ + \sin 90^\circ + \sin 150^\circ) =$

$= 18\cdot(2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{1}{2}) = 18(\sqrt{3}+\frac{3}{2}) =$

$= 27 + 18\sqrt{3}$

2)



пусть $AB = 6\sqrt{2}$, $BC = CD = 6$,

тогда $AO=BO=CO=DO=BC=CD=R=6$

$\Rightarrow AO^2+BO^2=AB^2$

$6^2+6^2=6^2\cdot 2$

$\Rightarrow \angle AOB = 90^\circ$

и $\triangle BOC$, $\triangle COD$ – р/с

$\Rightarrow \angle BOC = \angle COD = \alpha = 60^\circ$

$\Rightarrow$ больший из углов AOD равен $90^\circ + 2\cdot 60^\circ = 210^\circ$

$\Rightarrow \angle(AO, OD) = \beta = 360^\circ - 210^\circ = 150^\circ$

$\Rightarrow S_2 = \frac{1}{2}(AO\cdot OB\cdot \sin 90^\circ + BO\cdot CO\cdot \sin\alpha + CO\cdot DO\cdot \sin\alpha + AO\cdot DO\cdot \sin\beta) =$

$= S_1$

Ответ: $27 + 18\sqrt{3}$

21-25-70-81 (161.12)

Задача 4

чистовик

$\cos^3(\pi x) - \cos^3(2\pi x) + \cos^3(4\pi x) = (\cos(\pi x) - \cos(2\pi x) + \cos(4\pi x))^3$

реш. $\in [0,3; 1,8]$ – ?

пусть $\pi x = t$, тогда:

$\cos^3 t - \cos^3 2t + \cos^3 4t = (\cos t - \cos 2t + \cos 4t)^3$

$\cos^3 4t - \cos^3 2t = (\cos t - \cos 2t + \cos 4t)^3 - \cos^3 t$

$(\cos 4t - \cos 2t)(\cos^2 4t + \cos 2t \cos 4t + \cos^2 4t) =$

$= (\cos 4t - \cos 2t)((\cos t - \cos 2t + \cos 4t)^2 + (\cos t - \cos 2t + \cos 4t)\cos t + \cos^2 t)$

~~$\cos 4t = \cos 2t$~~

~~$\cos^2 4t + \cos 2t \cos 4t$~~

$$\left[\begin{array}{l} \cos 4t = \cos 2t \\ 3\cos 2t \cos 4t = 3\cos^2 t - 3\cos t \cos 2t + 3\cos t \cos 4t \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos 4t = \cos 2t \\ \cos 2t(\cos t + \cos 4t) = \cos t(\cos t + \cos 4t) \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos 4t = \cos 2t \\ \cos 4t = \cos t \\ \cos 2t = \cos t \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos 4t = \cos 2t \\ \cos 4t = \cos(\pi - t) \\ \cos 2t = \cos t \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 4t = 2t + 2\pi n, \ n\in\mathbb{Z} \\ 4t = -2t + 2\pi k, \ k\in\mathbb{Z} \\ 4t = \pi - t + 2\pi l, \ l\in\mathbb{Z} \\ 4t = t - \pi + 2\pi p, \ p\in\mathbb{Z} \\ 2t = t + 2\pi q, \ q\in\mathbb{Z} \\ 2t = -t + 2\pi s, \ s\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} t = \pi n, \ n\in\mathbb{Z} \\ t = \frac{\pi k}{3}, \ k\in\mathbb{Z} \\ t = \frac{\pi + 2\pi l}{5}, \ l\in\mathbb{Z} \\ t = \frac{-\pi + 2\pi p}{3}, \ p\in\mathbb{Z} \\ t = 2\pi q, \ q\in\mathbb{Z} \\ t = \frac{2\pi s}{3}, \ s\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

вернёмся к x:

$$\left[\begin{array}{l} \pi x = \pi n, \ n\in\mathbb{Z} \\ \pi x = \frac{\pi k}{3}, \ k\in\mathbb{Z} \\ \pi x = \frac{\pi + 2\pi l}{5}, \ l\in\mathbb{Z} \\ \pi x = \frac{-\pi + 2\pi p}{3}, \ p\in\mathbb{Z} \\ \pi x = 2\pi q, \ q\in\mathbb{Z} \\ \pi x = \frac{2\pi s}{3}, \ s\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = n, \ n\in\mathbb{Z} \\ x = \frac{k}{3}, \ k\in\mathbb{Z} \\ x = \frac{2l+1}{5}, \ l\in\mathbb{Z} \\ x = \frac{2p-1}{3}, \ p\in\mathbb{Z} \\ x = 2q, \ q\in\mathbb{Z} \\ x = \frac{2s}{3}, \ s\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$1,8 \vee \frac{7}{3}$ $\left[\frac{3}{10}; \frac{18}{10}\right]$

$18\cdot 3 \vee 7\cdot 10$

$1,8 \vee \frac{5}{3}$

$18\cdot 3 \vee 50$

$30+24 > 50$

$\frac{1}{3} \vee 0,3$

$10 \vee 9$

$\frac{7}{5} < \frac{18}{10}$

найдём $x\in[0,3; 1,8]$: $1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{3}{5}, \frac{7}{5}$

Ответ: $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{3}{5}, \frac{7}{5}, 1$

чистовик

Задача 5

$f_1(x) = (x+a_1)(x^2+b_1x+6)$ $\quad a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 > 0$

$f_2(x) = (x+a_2)(x^2+b_2x+14)$

$f_3(x) = (x+a_3)(x^2+b_3x+21)$

$f_1(x) = f_2(x) = f_3(x)$ верно для $\forall x \in \mathbb{R}$

$(a_1+a_2+a_3+b_1+b_2+b_3) = ?$

$\underline{x=0}$: $f_1(0) = a_1 \cdot 6$, $f_2(0) = a_2 \cdot 14$, $f_3(0) = a_3 \cdot 21$ $\Leftrightarrow 6a_1 = 14a_2 = 21a_3$

$\Rightarrow \begin{cases} a_1 \neq a_2 \\ a_2 \neq a_3 \\ a_1 \neq a_3 \end{cases}$ т.к. $a_1, a_2, a_3 > 0$ по усл.

~~если $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, то подставим~~

$\underline{x=-a_1}$: $f_1(x) = 0$

$f_2(x) = (a_2-a_1)(a_1^2 - a_1b_2 + 14) = 0$

$f_3(x) = (a_3-a_1)(a_1^2 - a_1b_3 + 21) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} a_1^2 - a_1b_2 + 14 = 0 \\ a_1^2 - a_1b_3 + 21 = 0 \end{cases} \Rightarrow a_1(b_3-b_2) = 7 \Rightarrow \frac{7}{3}a_2(b_3-b_2) = 7$

$\Rightarrow a_2(b_3-b_2) = 3$

$\underline{x=-a_2}$: $f_1(x) = (a_1-a_2)(a_2^2 - a_2b_1 + 6) = 0$

$f_2(x) = 0$

$f_3(x) = (a_3-a_2)(a_2^2 - a_2b_3 + 21) = 0$

$\Rightarrow a_2^2 - a_2b_1 + 6 = a_2^2 - a_2b_3 + 21 = 0$

$a_2(b_3-b_1) = 15$

$\underline{x=-a_3}$: $f_1(x) = (a_1-a_3)(a_3^2 - a_3b_1 + 6) = 0$

$f_2(x) = (a_2-a_3)(a_3^2 - a_3b_2 + 14) = 0$

$f_3(x) = 0$

$\Rightarrow a_3^2 - a_3b_1 + 6 = a_3^2 - a_3b_2 + 14 = 0$

$a_3(b_2-b_1) = 8 = \frac{2}{3}a_2(b_2-b_1) \Rightarrow a_2(b_2-b_1) = 12$

$\underline{x=1}$: $f_1(x) = (a_1+1)(b_1+7)$

$f_2(x) = (a_2+1)(b_2+15)$

$f_3(x) = (a_3+1)(b_3+22) = f_2(x) = f_1(x)$

используя полученные уравн. найдём то, что нужно:

$(a_2+1)(b_2+15) = (\frac{7}{3}a_2+1)(b_1+7) \Leftrightarrow a_2b_2 + b_2 + 15a_2 = \frac{7}{3}a_2b_1 + \frac{49}{3}a_2 + b_1 + 7$

но также $b_2 = \frac{12}{a_2} + b_1 \Rightarrow 4a_2b_1 = 60 + \frac{36}{a_2} - 4a_2$

$\Rightarrow b_1 = \frac{15}{a_2} + \frac{9}{a_2^2} - \cancel{1} = \frac{-a_2^2+15a_2+9}{a_2^2} \Rightarrow b_2 = \frac{-a_2^2+27a_2+9}{a_2^2}$

21-25-70-81 (161.12)

чистовик

Задача 5. продолж.

~~$x=-1$: $f_1(x) = (a_1-1)(7-b_1)$~~

~~$f_2(x) = (a_2-1)(15-b_2)$~~

~~$f_3(x) = (a_3-1)(22-b_3) = f_2(x) = f_1(x)$~~

~~значит $(a_2-1)(15-b_2) = (\frac{7}{3}a_2-1)(7-b_1)$~~

~~$15a_2 - a_2b_2 - 15 + b_2 = \frac{49}{3}a_2 - \frac{7}{3}a_2b_1 - 7 + b_1$~~

~~$15a_2 - 3a_2(\frac{12}{a_2} + b_1) - 45 + 3(\frac{12}{a_2} + b_1) = 49a_2 - 7a_2b_1 - 21$~~

~~$-36 - 3a_2b_1 + \frac{36}{a_2} + 3b_1 = 4a_2 - 7a_2b_1 + 24 + 3b_1$~~

нам известно, что $a_2^2 - a_2b_1 + 6 = 0$.

подставим b_1: $a_2^2 - a_2 \cdot \frac{-a_2^2+15a_2+9}{a_2^2} + 6 =$

$= a_2^2 - \frac{-a_2^2+15a_2+9}{a_2} + 6 = 0$

$\frac{a_2^3 + a_2^2 - 15a_2 - 9 + 6a_2}{a_2} = 0$

~~$\frac{a_2^3 + 7a_2^2 - 15a_2 - 9}{a_2} = 0$~~

$\frac{a_2^3 + a_2^2 - 9a_2 - 9}{a_2} = 0$

$\frac{a_2^2(a_2+1) - 9(a_2+1)}{a_2} = 0$

$\left[\begin{array}{l} a_2+1 = 0 \\ a_2 = \pm 3 \end{array}\right.$ но $a_2 > 0$, значит, $a_2 = 3$

найдём остальные: $a_1 = \frac{7}{3}a_2 = 7$

$a_3 = \frac{2}{3}a_2 = 2$

$b_1 = \frac{-9+15 \cdot 3+9}{9} = \frac{15 \cdot 3}{9} = 5$

$\Rightarrow b_2 = \frac{12}{a_2} + b_1 = \frac{12}{3} + 5 = 9$

$\Rightarrow b_3 = \frac{15}{a_2} + b_1 = \frac{15}{3} + 5 = 10$

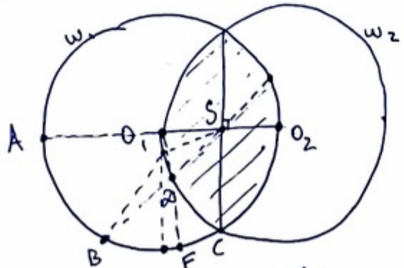
$\Rightarrow a_1+a_2+a_3+b_1+b_2+b_3 = 7+3+2+5+9+10 = 10+7+9+10 =$

$= 20 + 16 = 36$

Ответ: 36

Задача 6 — чистовик

$R = 4 - 2\sqrt{2}$



пусть V - скорость разбрызгивания воды $\left(\frac{л}{с}\right)$,

v - скорость мыши $\left(\frac{м}{с}\right)$

W - кол-во воды на мыши (в л)

газонные поливалки O_1 и O_2 разбрызгивают воду в кругах ω_1 и ω_2 с радиусами $R = 4-2\sqrt{2}$

S - середина O_1O_2

по заштрихованной области мыши придётся пройти не менее $\frac{O_1O_2}{2} = \frac{R}{2}$, а значит на ней будет минимум

$$W = V \cdot \frac{R \cdot 2}{2 \cdot v} \text{ воды}$$

$$W = \frac{VR}{v}, \text{ где } \frac{V}{v} = const$$

в общем случае меньше всего воды будет на мыши $\Leftrightarrow$ она двигается по прямой внутри каждой обл. (т.к. иначе путь в этой обл. увел. $\Rightarrow$ время ее прохождения t увелич. $\Rightarrow W = Vt \uparrow$)

для удобства будем считать, что мышь идёт <u>из</u> норы. тогда она начала в т. S. пусть она дошла до т. D на границе заштрих. области. Далее кратчайший путь в сухое место — ~~наход~~ по радиусу в т. F:

$F = \omega_1 \cap O_1D \Rightarrow$ маршрут задаётся однозначно в завис. от положения точки F.

$FD = R - O_1D \Rightarrow W_{FD} = \frac{V}{v}(R - O_1D)$

$W_{DS} = \frac{V}{v} \cdot DS \cdot 2 \Rightarrow W_0 = W_{FD} + W_{DS} = \frac{V}{v}(R - O_1D + 2DS)$

причём ~~...~~ $SC \geq DS \geq \frac{R}{2}$

$SC = \sqrt{O_1C^2 - O_1S^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{R\sqrt{3}}{2} \geq DS \geq \frac{R}{2}$

$\Rightarrow R\sqrt{3} \geq 2DS \geq R \Rightarrow \frac{V}{v}(R - O_1D + R\sqrt{3}) \geq W_0 \geq \frac{V}{v}(2R - O_1D)$

$W_0 \to \min \Leftrightarrow O_1D \to \max$ но при $\uparrow O_1D$ $\uparrow DS$

нужно найти $\min(2DS - O_1D)$

задача 6. продолж. — чистовик

DS - медиана в $\triangle O_1DO_2$

$\Rightarrow DS = \sqrt{\frac{O_1D^2}{2} + \frac{O_2D^2}{2} - \frac{O_1O_2^2}{4}}$, но $O_2D = O_1O_2 = R$

$\Rightarrow DS = \sqrt{\frac{O_1D^2}{2} + \frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{4}} = \sqrt{\frac{O_1D^2}{2} + \frac{R^2}{4}} = \frac{\sqrt{2O_1D^2 + R^2}}{2}$

$\Rightarrow (2DS - O_1D) = \sqrt{2O_1D^2 + R^2} - O_1D$

введём $f(x) = \sqrt{2x^2 + R^2} - x$

найдём x, при которых $f(x) \to \min$

$f'(x) = -1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2x^2+R^2}} \cdot (2 \cdot 2x) = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+R^2}} - 1 = 0$ $\quad x > 0$

$2x = \sqrt{2x^2+R^2}$

$4x^2 = 2x^2 + R^2$

$2x^2 = R^2$

$x = \frac{R}{\sqrt{2}}$ ~~значит $O_1D = \frac{R}{\sqrt{2}}$~~

$f'(x)$: $-$ на $(0; \frac{R}{\sqrt{2}})$, $+$ после $\frac{R}{\sqrt{2}}$; $f(x)$ убывает, затем возрастает.

но при $x = O_1D$ $\quad x \leq R$

т.к. $\max(O_1D) = O_1C = R$

$\Rightarrow f(O_1D) \to \min \Leftrightarrow O_1D = R$, $D = C$

тогда маршрут мыши - SC,

и его длина:

$SC = \sqrt{O_1C^2 - O_1S^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{(4-2\sqrt{2})\sqrt{3}}{2} = (2-\sqrt{2})\sqrt{3} = 2\sqrt{3} - \sqrt{6}$

Ответ: $2\sqrt{3} - \sqrt{6}$

черновик

$$\begin{cases} a_1 = \frac{7}{3}a_2 \\ a_3 = \frac{2}{3}a_2 \\ a_2(b_3-b_1)=15 \\ a_2(b_2-b_1)=12 \\ a_2(b_3-b_2)=3 \\ (\frac{7}{3}a_2+1)(b_1+7)=(a_2+1)(b_2+15) \end{cases}$$

$a_2(b_2-b_1)=12 \longrightarrow b_2 = \frac{12}{a_2}+b_1$

$\frac{7}{3}a_2b_1 + \frac{49}{3}a_2 + b_1 + 7 = a_2b_2 + 15a_2 + b_2 + 15$

$7a_2b_1 + 49a_2 + 3b_1 + 21 = 3a_2b_2 + 45a_2 + 3b_2 + 45$

$7a_2b_1 + 4a_2 + 3b_1 = 3a_2b_2 + 3b_2 + 24$

$7a_2b_1 + 4a_2 + 3b_1 = 3a_2\left(\frac{12}{a_2}+b_1\right) + 3\left(\frac{12}{a_2}+b_1\right) + 24$

$7a_2b_1 + 4a_2 + \cancel{3b_1} = 36 + 3a_2b_1 + \frac{36}{a_2} + \cancel{3b_1} + 24$

$4a_2b_1 = 60 + \frac{36}{a_2} - 4a_2$

$a_2b_1 = 15 + \frac{9}{a_2} - a_2$

$b_1 = \frac{15}{a_2} + \frac{9}{a_2^2} - 1 = \frac{-a_2^2+15a_2+9}{a_2^2}$

$DS = \sqrt{\frac{a_1 D^2}{2} + \frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{4}}$

$(\sqrt{2x^2+c})' =$

$= ((2x^2+c)^{\frac{1}{2}})' =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2x^2+c}}$

$a_2^2 - a_2b_1 + 6 = 0$

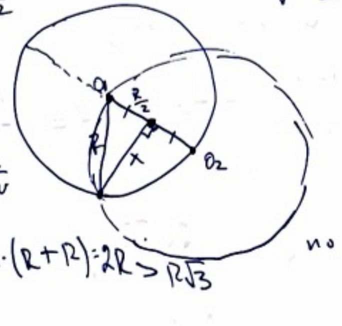
$b_1 = \frac{a_2^2+6}{a_2} = \frac{-a_2^2+15a_2+9}{a_2^2}$

$a_2^3 + 6a_2 = -a_2^2 + 15a_2 + 9$

$a_2^3 + a_2^2 - 9a_2 + 9$

6.

$R = 4 - 2\sqrt{2}$



$\frac{R}{2v} = t$

$W = \sqrt{\frac{2R}{2v}}$

$W = \frac{V}{v}\cdot(R+R) = 2R > R\sqrt{3}$

V - скорость намокания / v - мыши

$x = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = R\cdot\sqrt{\frac{3}{4}} =$

$= R\frac{\sqrt{3}}{2} = (2-\sqrt{2})\sqrt{3}$ | $W_1 = \frac{V}{v}R\sqrt{3}$

$t = \frac{x}{v}$

$S = Vt = 2\frac{Vx}{v}$

$S = \frac{Vx\cdot 2}{v} = \frac{V}{v}\cdot R\sqrt{3}$

по двойной зоне min. $-\frac{R}{2}$

=> вымокнет на $(R + ..)$

черновик

5. $f_1(x) = (x+a_1)(x^2+b_1x+6)$ $\quad a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 > 0$

$f_2(x) = (x+a_2)(x^2+b_2x+14)$

$f_3(x) = (x+a_3)(x^2+b_3x+21)$

$f_1(x) = f_2(x) = f_3(x)$ для $\forall x \in \mathbb{R}$

$a_1+a_2+a_3+b_1+b_2+b_3 = ?$

$x=-a_1$: $f_1(x)=0$

$f_2(x) = (a_2-a_1)(a_1^2-a_1b_2+14)=0$

$f_3(x) = (a_3-a_1)(a_1^2-a_1b_3+21)=0$

$x=-a_2$: $f_1(x) = (a_1-a_2)(a_2^2-a_2b_1+6)=0$

$f_2(x)=0$

$f_3(x) = (a_3-a_2)(a_2^2-a_2b_3+21)=0$

$x=-a_3$: $f_1(x) = (a_1-a_3)(a_3^2-a_3b_1+6)=0$

$f_2(x) = (a_2-a_3)(a_3^2-a_3b_2+14)=0$

$f_3(x)=0$

$x=-b_1$:

$f_1(x) = 6(a_1-b_1)$

$f_2(x) = \ldots$

$x=1$:

$(a_1+1)(b_1+7) =$

$= (a_2+1)(b_2+15) =$

$= (a_3+1)(b_3+22)$

получаем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a_2=a_1 \\ a_1^2-a_1b_2+14=0 \end{cases} \text{ v} \\ \begin{cases} a_3=a_1 \\ a_1^2-a_1b_3+21=0 \end{cases} \text{ v} \\ \begin{cases} a_1=a_2 \\ a_2^2-a_2b_1+6=0 \end{cases} \text{ v} \\ \begin{cases} a_3=a_2 \\ a_2^2-a_2b_3+21=0 \end{cases} \text{ v} \\ \begin{cases} a_1=a_3 \\ a_3^2-a_3b_1+6=0 \end{cases} \text{ v} \\ \begin{cases} a_2=a_3 \\ a_3^2-a_3b_2+14=0 \end{cases} \text{ v} \end{array}\right.$$

$x=0$:

$$\begin{cases} f_1(0)=a_1\cdot 6 \\ f_2(0)=a_2\cdot 14 \\ f_3(0)=a_3\cdot 21 \end{cases}$$

$6a_1 = 14a_2 = 21a_3$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 \neq a_2 \\ a_2 \neq a_3 \\ a_1 \neq a_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a_1 = 7a_2 \\ 2a_2 = 3a_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{7}{3}a_2 \\ a_3 = \frac{2}{3}a_2 \end{cases}$$

$\cancel{a_1^2 - a_1b_2 + 14 = 0}$

$\cancel{a_1^2 - a_1b_3 + 21 = 0}$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{49}{4}a_2^2 - \frac{7}{2}a_2b_2 + 14 = 0 \\ \frac{49}{4}a_2^2 - \frac{7}{2}a_2b_3 + 21 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \cancel{\frac{7}{3}a_2(b_3-b_2)}$$

$\frac{7}{3}a_2(b_3-b_2) = 7$

$a_2(b_3-b_2) = 3$

$$\left.\begin{array}{l} a_2^2 - a_2b_1 + 6 = 0 \\ a_2^2 - a_2b_3 + 21 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a_2(b_3-b_1) = 15$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{4}{9}a_2^2 - \frac{2}{3}a_2b_1 + 6 = 0 \\ \frac{4}{9}a_2^2 - \frac{2}{3}a_2b_2 + 14 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2}{3}(a_2)(b_2-b_1) = 8$$

$a_2(b_2-b_1) = 12$

$\cancel{(b_3-b_1)-(b_3-b_2)-(b_2-b_1) = \frac{15}{a_2} - \frac{3}{a_2} - \frac{12}{a_2} = 0}$

$\cancel{\frac{15-3-12}{a_2} = 0}$

черновик

4. $\underbrace{\cos^3(\pi x)}_{t}-\cos^3(2\pi x)+\cos^3(4\pi x)=(\cos(\pi x)-\cos(2\pi x)+\cos(4\pi x))^3$

$x\in[9^3;1,8]$

$x-?$

$\cos^3 4t-\cos^3 2t=(\cos t-\cos 2t+\cos 4t)^3-\cos^3 t$

$(\cos 4t-\cos 2t)(\cos^2 4t+\cos 4t\cdot\cos 2t+\cos^2 2t)=$

$=\boxed{(\cos 4t-\cos 2t)}((\cos t-\cos 2t+\cos 4t)^2+(\cos t-\cos 2t+\cos 4t)\cdot\cos t+\cos^2 t)$

$\left[\begin{array}{l}\cos 4t=\cos 2t\\ \cancel{\cos^2 4t}+\cos 4t\cdot\cos 2t+\cancel{\cos^2 2t}=\cos^2 t+\cancel{\cos^2 2t}+\cancel{\cos^2 4t}-\\ -2\cos t\cdot\cos 2t+2\cos t\cdot\cos 4t-2\cos 2t\cdot\cos 4t\\ +\cos^2 t-\cos t\cdot\cos 2t+\cos t\cdot\cos 4t+\cos^2 t\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}\cos 4t=\cos 2t\\ 3\cos 2t\cdot\cos 4t=3\cos^2 t-3\cos t\cdot\cos 2t+3\cos t\cdot\cos 4t\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}\cos 4t=\cos 2t\\ \cos 2t\cdot\cos 4t=\cos^2 t-\cos t\cos 2t+\cos t\cdot\cos 4t\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}\cos 4t=\cos 2t\\ \cos 2t(\cos 4t+\cos t)=\cos t(\cos t+\cos 4t)\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}\cos 4t=\cos 2t\\ \cos 4t=-\cos t\\ \cos 2t=\cos t\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}4t=2t+2\pi n\\ 4t=-2t+2\pi n\\ 4t=\pi-t+2\pi n\\ 4t=t-\pi+2\pi n\\ 2t=t+2\pi n\\ 2t=-t+2\pi n\end{array}\right.$

$t=\pi n$, $t=\frac{\pi n}{3}$, $t=\frac{\pi+2\pi n}{5}$, $t=\frac{-\pi+2\pi n}{3}$, $t=2\pi n$, $t=\frac{2\pi n}{3}$

$\left[\begin{array}{l}2\cos^2 2t-1=\cos 2t\\ 2\cos^2 2t-1+\cos t=0\\ 2\cos^2 t-1=\cos t\end{array}\right.$

$2p^2-p-1=0$

$D=1+8=9$

$p_{1,2}=\frac{1\pm3}{4}=-\frac{1}{2};1$

$\cos 2t=-\frac{1}{2}$

$\cos 2t=1$

$\cos t=-\frac{1}{2}$

$\cos t=1$

$\cancel{2(2\cos^2 t-1)^2-1+\cos t=}$

$\cancel{=2(4\cos^4 t+1-4\cos^2 t)}$

$\cancel{=8\cos^4 t}$

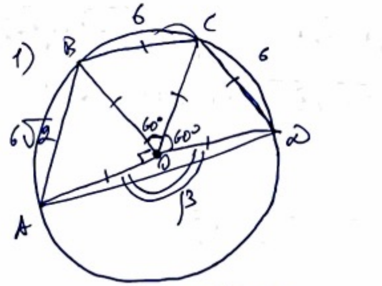
$\cos 4t=\cos(\pi-t)$

$\left[\begin{array}{l}4t=\pi-t+2\pi n\\ 4t=t-\pi+2\pi k\end{array}\right.$

черновик

3.

1)

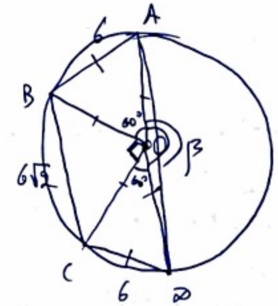


$R=6$

$S\to max$

$S=?$

2)

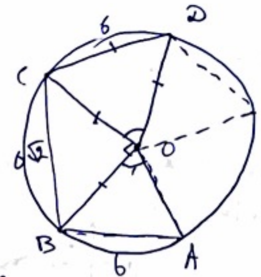


$S=d_1 d_2\sin\alpha$

$\angle AOD=90°+2\cdot60°=$

$=90°+120°=210°$

$\beta=360°-210°=150°$



разницы между случаями нет.

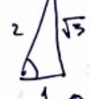
$S=\frac{1}{2}(OC\cdot OD\cdot\sin60°+$

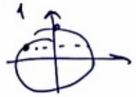
$+OC\cdot OB\cdot\sin90°+OB\cdot OA\cdot\sin60°+$

$+OA\cdot OD\cdot\sin150°)=$

$=\frac{1}{2}\cdot36\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+1+\frac{1}{2}\right)=$

$=18\cdot\left(\sqrt{3}+\frac{3}{2}\right)=18\sqrt{3}+9\cdot3=27+18\sqrt{3}$





	1	7	-15	-9
-1	1	6	-21	≠0
1	1	8	-7	-16
3	1	10	15	≠0
-3	1	4	-24	≠0

Черновик

1. $\sqrt{4x^2+12x+9}+\sqrt{x^2+6x+9}+\left(\sqrt{(x+2)}\right)^2=\sqrt{4+\sqrt{12}}-\sqrt{4-\sqrt{12}}$

$$\begin{cases}|2x+3|+|x+3|+x+2=\sqrt{3+2\sqrt{3}+1}-\sqrt{3-2\sqrt{3}+1}\\ x+2\geqslant 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\geqslant -2\\ |2x+3|+x+3+x+2=\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}-\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\geqslant -2\\ |2x+3|+2x+5=\cancel{\sqrt{3}}+1-\cancel{\sqrt{3}}+1\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\geqslant -2\\ |2x+3|+2x+5=2\end{cases}$$

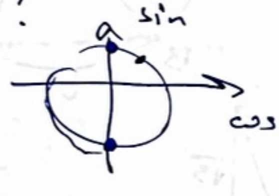
$$\left[\begin{cases}x\geqslant -2\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geqslant -\frac{3}{2}\\ 4x+8=2\end{cases}\\ \begin{cases}x<-\frac{3}{2}\\ 2=2\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}\right.\qquad \begin{cases}x\geqslant -2\\ \left[\begin{array}{l}x<-\frac{3}{2}\\ \begin{cases}x\geqslant -\frac{3}{2}\\ x=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}\Rightarrow x=-\frac{3}{2}$$

$$x\in\left[-2;-\frac{3}{2}\right]$$

2. $2^{5-\frac{1}{x}}\geqslant a+\sin 2^x$ нет реш.: $x>0$ $a>0$

$\min(a)=?$

при $x>0$ $\left(2^{5-\frac{1}{x}}\right)\uparrow\uparrow$



$(2^x)\uparrow\uparrow$

$2^x>1 \Rightarrow \sin 2^x$ ~~сна~~ $\uparrow\uparrow$ ~~на~~ затем $\downarrow\downarrow$

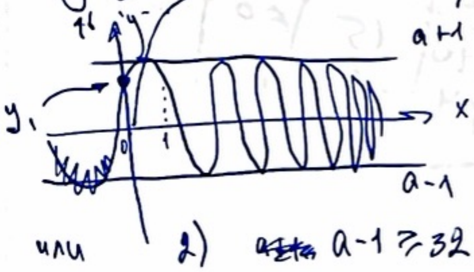
коз

при $x>0$

$0<2^{5-\frac{1}{x}}\leqslant 2^5=32$

$a-1\leqslant \sin 2^x+a\leqslant 1+a$

~~идея~~ ~~иначе когда~~ ~~32~~



при $x\to 0$ $\left(2^{5-\frac{1}{x}}\right)\to 0$

при $x\to\infty$ $\left(2^{5-\frac{1}{x}}\right)\to 32$

$y_1>0$

$\Rightarrow$ нет пер-ий $\Leftrightarrow$ 1) $a+1\leqslant 0$

$a\leqslant -1$

или 2) ~~a-1~~ $a-1\geqslant 32$

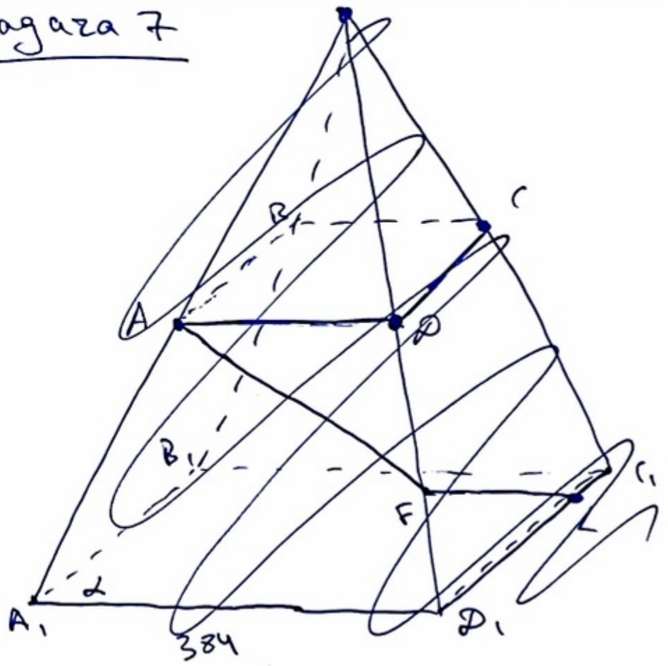
$a\geqslant 33$

$a=33$

Задача 7

~~черновик~~

чистовик



$\angle(AE, \alpha) = \angle(FL, \alpha) = 60^\circ$

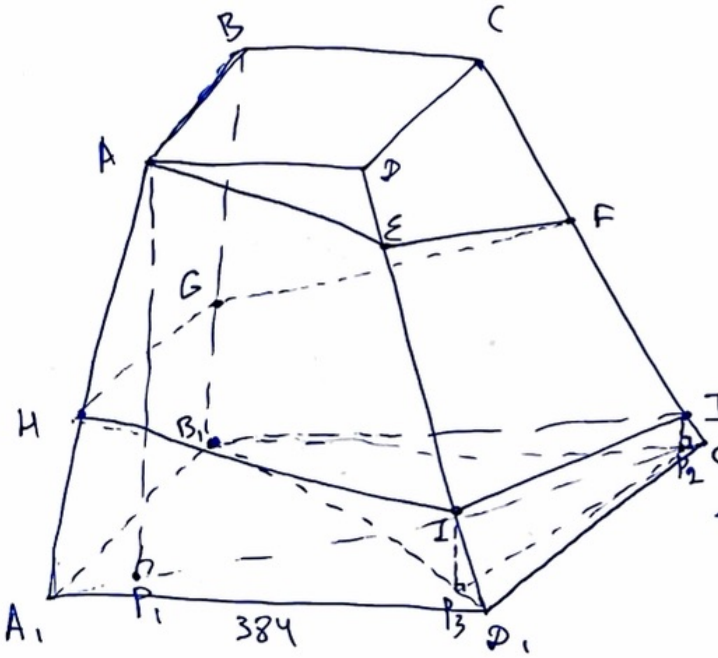
$h = ?$

пусть $AP_1 \perp (A_1B_1C_1)$,
тогда $AP_1 = h$

$AE \parallel HI$

$EF \parallel IJ$

$GF \parallel B_1J$



пусть $JP_2 \perp (A_1B_1C_1)$
тогда $\angle JB_1P_2 = 60^\circ$
$\Rightarrow B_1J = 2B_1P_2$

пусть $IP_3 \perp (A_1B_1C_1)$,
тогда $\angle(IJ, P_2P_3) = 60^\circ$
$\Rightarrow IJ = 2 \cdot P_2P_3$,

$$\frac{IP_3 - JP_2}{IJ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$