



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 11 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по „Математике“
профиль олимпиады

Митрофанова Данила Викторовича

фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

« 13 » 04 2025 года

Подпись участника

Дмит

Шифр	Сумма	1	2	3	4	5	6	7	8
48-37-55-07		+	+	+	-	+	-	0	-
48-37-55-07	60	15	15	15	0	15	0	0	0

6. Рассуждения неверны, ответ неверный
8. Приведен только ответ, причем неверный
4. Задача не доведена до ответа.

Черновик.

н/1.

~~60 (исходная)~~

$$\sqrt{4x^2 + 14x + 8} + \sqrt{x^2 + 6x + 8} + \sqrt{x+2} = \sqrt{4 + \sqrt{12}} - \sqrt{4 - \sqrt{12}}$$

$\frac{4}{2\sqrt{3}} \quad \frac{4}{2\sqrt{3}}$

65 (исходная)

Исходные по аналитическим.

~~$$2x+3(2x+3)^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3x+3^2$$~~

$$\sqrt{(2x+3)^2} + \sqrt{(x+3)^2} + (\sqrt{x+2})^2 = \sqrt{1+2 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3}^2} - \sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$$

$$\begin{cases} |2x+3| + |x+3| + x+2 = 1+\sqrt{3} + \sqrt{3} - 1 \\ x+2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |2x+3| + |x+3| + x+2 = 2\sqrt{3} \\ x \geq -2 \end{cases}$$

1) $x \geq -\frac{3}{2}$

$$2x+3+x+3+x+2=2\sqrt{3}$$

$$4x = 2\sqrt{3} - 8$$

$$x = \frac{\sqrt{3}-4}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}-4}{2} > -\frac{3}{2}$$

$$\sqrt{3} > 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}-4}{2} > -\frac{3}{2}$$

2) $-\frac{3}{2} > x \geq -2$

$$-2x-3+x+3+x+2=2\sqrt{3}$$

$$2=2\sqrt{3} \quad \phi$$

$$120+90=210$$

$$360-210=150$$



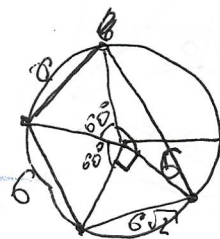
$$\cos^3(\pi x) = (\cos^2 \sin^2 \pi x) + (\cos^2 \sin^2 \pi x) + (\cos^2 \sin^2 \pi x)$$

$$x^3 + b_1 x^2 + 6x + a_1 x^2 + a_1 b_1 x + 6a_1 =$$

$$= x^3 + b_2 x^2 + 14x + a_2 x^2 + a_2 b_2 x + 14a_2$$

$$x^2(b_2 + a_2 - b_1 - a_1) + x(a_1 b_2 - a_1 b_1 + 8) + (14a_2 - 6a_1) = 0$$

$$14a_2 = 14a_2 = 6a_1 \quad a_1 = \frac{7}{3}a_2 \quad a_1 + b_2 - a_1 - a_1 + a_1 b_1 + a_2 b_2 - 6a_1 + 14a_2$$



числовая.

$$\sqrt{4x^2 + 12x + 9} + \sqrt{x^2 + 6x + 9} + (\sqrt{x+2})^2 = \sqrt{4+\sqrt{12}} - \sqrt{4-\sqrt{12}}$$

$$\begin{cases} \sqrt{(2x+3)^2} + \sqrt{(x+3)^2} + x+2 = \sqrt{(1+\sqrt{3})^2} - \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} \\ x+2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |2x+3| + |x+3| + x+2 = 1+\sqrt{3} - (\sqrt{3}-1) \\ x \geq -2 \end{cases}$$

1) $x \geq -\frac{3}{2}$.

$$2x+3 + x+3 + x+2 = 2.$$

$$4x = -6$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

2) $-\frac{3}{2} > x \geq -2$

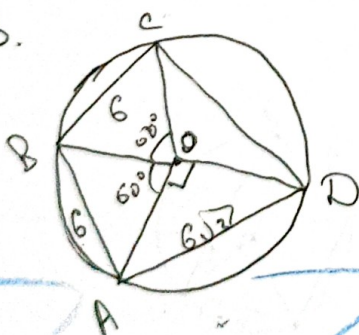
$$-2x-3 + x+3 + x+2 = 2.$$

$2=2$ - верно для всех x

$$x \in [-2; -\frac{3}{2})$$

Ответ: $[-2; -\frac{3}{2}]$.

3.



O - центр о.к.

~~Решение~~ 1) $AB=6, BC=6, AD=6\sqrt{2}$

$$S(ABCD) = S(BOC) + S(AOB) + S(AOD) + S(COD) =$$

$$AO = OB = OC = 6 = BC = AB \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle AOB \text{ и } \triangle BOC - \text{р/к } \triangle AOB$$

$$AO^2 + OD^2 = 36 + 36 = (6\sqrt{2})^2 = AD^2 \Rightarrow$$

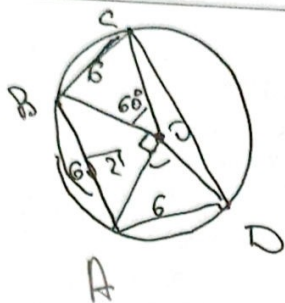
$$\Rightarrow \angle AOD = 90^\circ$$

$$\angle BOC = 60^\circ = \angle AOB \text{ т.д. } \triangle AOB \text{ и } \triangle BOC - \text{р/к}$$

$$\angle COD = 360^\circ - 60^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 360^\circ - 210^\circ = 150^\circ.$$

$$S(ABCD) = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} + \frac{6^2\sqrt{3}}{4} + \frac{6 \cdot 6}{2} + \frac{6 \cdot 6 \cdot \sin 150^\circ}{2}$$

$$= 18\sqrt{3} + 18 + 9 = 18\sqrt{3} + 27.$$



исстовик.

$$AB = 6\sqrt{2}, BC = AD = 6.$$

Аналогично ~~AB~~ ~~BC~~ $\angle AOB = 90^\circ$,

$$\angle AOD = 60^\circ = \angle BOE$$

$$S(ABCO) = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} + \frac{6^2\sqrt{3}}{4} + \frac{6 \cdot 6}{2} + \frac{6 \cdot 6 \cdot \sin 150^\circ}{2} = 18\sqrt{3} + 27$$

~~Значит, макс $S(ABCO)$~~

При смене длин сторон S не меняется
Значит, $\max S = 18\sqrt{3} + 27$.

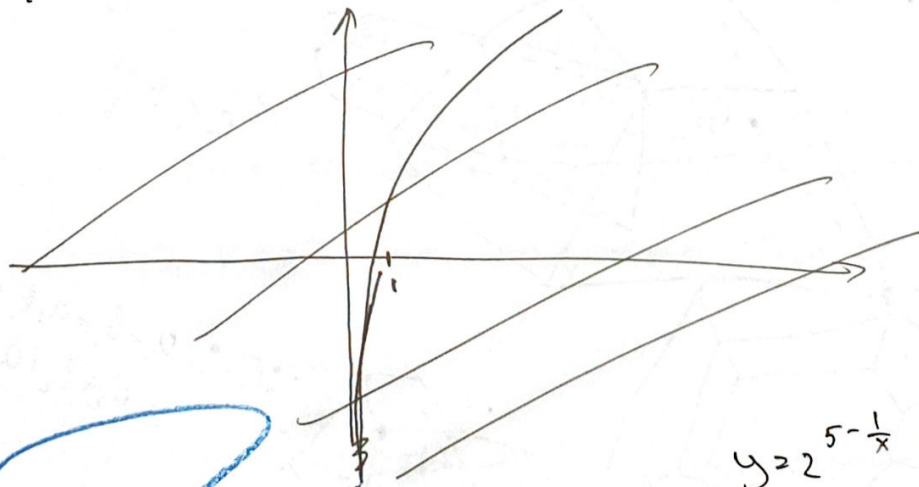
$$\text{Ответ: } 18\sqrt{3} + 27.$$

12.

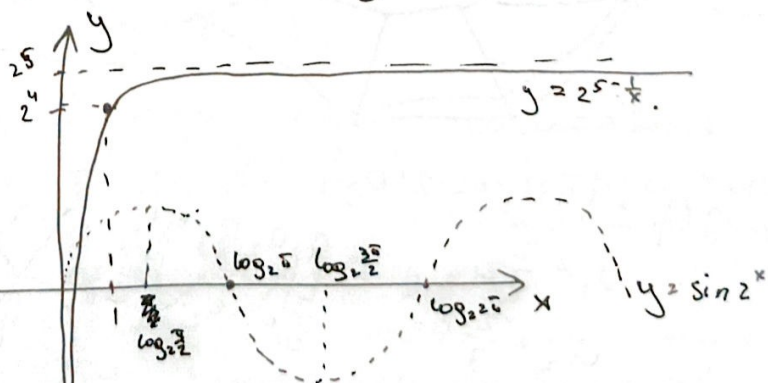
$$2^{5-\frac{1}{x}} \geq a + \sin 2^x.$$

a - ? : нет реш на $x > 0$

$$x > 0$$



$$y = 2^{5-\frac{1}{x}}$$



$\sin 2^x$ - периодическая функция

Значит чтобы не было реш
на $x > 0$, $a + \sin 2^x$ должно быть
 $> 2^{5-\frac{1}{x}}$ на $x > 0$

черновик.

$$25 - \frac{1}{4} \geq a + \sin^2 x$$

$$x > 0: \quad 8$$

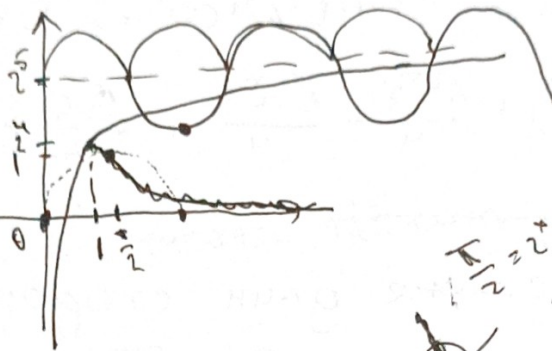
$$\frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$(0; 1): \quad 25 - \frac{1}{4} \rightarrow 24.$$

$$2 \cdot 4 = 8$$

$$16$$

$$32$$



$$\frac{\pi}{2} = 2^+$$

$$2^+ = \sqrt{u}$$

$$+ \log_2 \sqrt{u}$$

$$\frac{35}{2} = 2^+ \cdot (1+a_1)(1+b_1+16)$$

$$x+b_1+16+$$

$$+a_1+a_2b_1+16$$

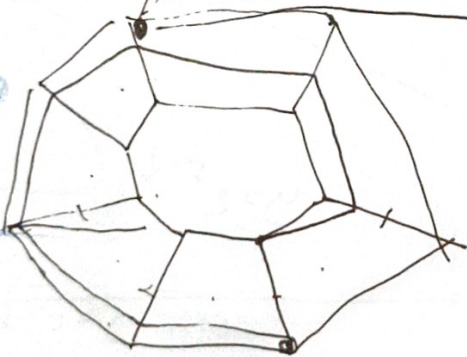
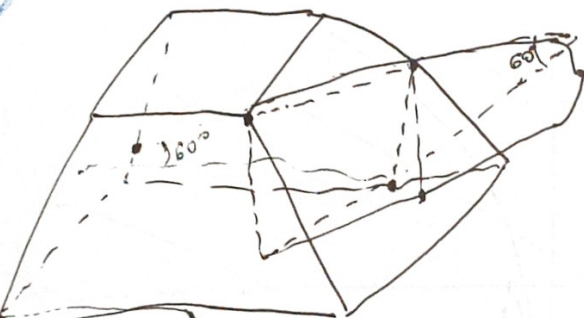
$$+b_2+16+$$

$$+a_2+a_2b_2+16$$

$$\frac{a}{c}$$

$$c \leq \frac{a+b}{2}$$

$$n^4 \cdot \infty$$



$$a_1+b_1+a_1b_1+16$$

$$= a_2+b_2+a_2b_2+16$$

$$6a_1 = 14a_2 = 21a_3$$

$$a_1 = \frac{7}{3}a_2$$

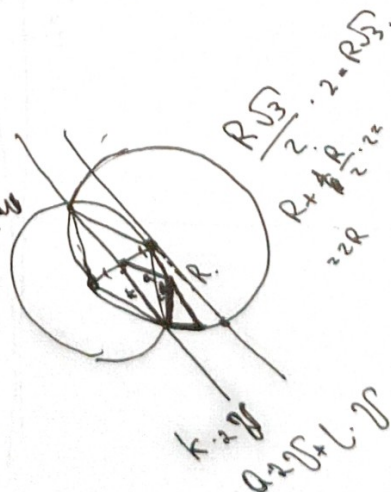
$$a_3 = \frac{2}{3}a_2$$

$$a_2 = \frac{3}{2}a_3$$

$$a_3 = \frac{2}{3}a_1$$

$$a_1 = \frac{3}{2}a_3$$

$$a_1 a_2 a_3 = 1$$



$$\frac{R\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = R\sqrt{3}$$

$$R\sqrt{3} = L \cdot \sqrt{3}$$

Истовые.

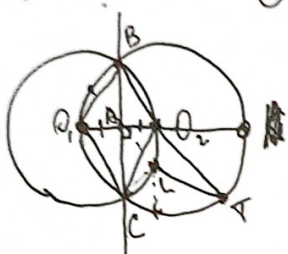
Значит и т.к. $\sin 2^\circ$ - периодическая, Значит,
 $\min a$ при $\min(a + \sin 2^\circ) = 2^5$ т.е. $a - 1 = 2^5$.

$$a = 33$$

Ответ: 33.

№6.

$$\text{Ответ: } 2\sqrt{3} - \sqrt{6}.$$



$$L = (4 - 2\sqrt{2})\sqrt{3}$$

на расст на котором она
 наименее меньше всего:

$$O_1 O_2 = O_2 C = O_1 C = R = 4 - 2\sqrt{2} \Rightarrow O_1 O_2 \perp AC.$$

$AC \perp O_1 O_2$ т.к. А - сев $O_1 O_2 \Rightarrow AC$ - высота

$$AC = \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{(4 - 2\sqrt{2})\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} - \sqrt{6}.$$

Докажем, что AC - min.

Пусть на AC она имеет проекцию $\frac{R\sqrt{3}}{2}$.

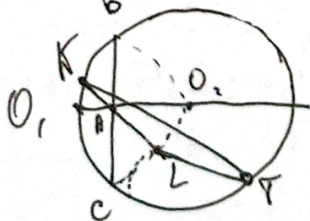
т.е. расст которое она имеет - 2 т.к. 2 полнвалки

$$AK \geq KO_2 A \text{ она промкнет } R + AO_2 \cdot 2 \geq R + R = 2R$$

$$AK \geq KO_2 A \geq AC.$$

Пусть она идет по какому-то
 маршруту $ATLA$.

$AL \geq AO_2$ Тогда она наименее
 как $2AL + LT$ если бы работала только
 1 полнвалка



$$\text{т.е. } KL + LT \geq KT$$

если бы она шла по AC
 то наименее бы как на

$$BC = 2AC \text{ если бы работала 1 полнвалка}$$

$$2KL + LT \geq KT > BC = 2AC$$

Черновик.

$$a_2 = \frac{1}{10} \quad a_3 = \frac{1}{21} \quad a_1 = 1$$

$$6a_1 = 14a_2 = 21a_3$$

$$a_1 = 7 \rightarrow a_2 = 3$$

$$a_3 = 2.$$

$$(1+a_1)(1+b_1+6)(1+a_2)(1+b_2+14)$$

$$x+b_1+6+a_1+a_1b_1+6a_1 = x+b_2+14+a_2+a_2b_2+14a_2$$

$$(a_1-1)(1-b_1+6) = (a_2-1)(1-b_2+14)$$

$$a_1 - a_1b_1 + 6a_1 - 1 + b_1 - 6 = a_2 - a_2b_2 + 14a_2 - 1 + b_2 - 14$$

$$2a_1 + 2b_1 = 2a_2 + 2b_2$$

$$a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = a_3 + b_3$$

$$3(a_1 + b_1)$$

$$6 + a_1b_1 = 14 + a_2b_2$$

$$a_2b_2 - a_1b_1 = 8$$

$$a_1b_1 = a_2b_2 + 8$$

$$\begin{array}{r} x^2 + b_2x + 14 \mid x + a_1 \\ x^2 + a_1x \\ \hline x(b_2 - a_1) + 14 \end{array}$$

$$(a_1 - b_2) \cdot a_1 + 14 = 0$$

$$a_1^2 - a_1b_2 + 14 = 0$$

$$a_1 = \frac{b_2 + \sqrt{b_2^2 + 14 \cdot 4}}{2}$$

$$b_2^2 + 14 \cdot 4$$

4.

$$(\cos^2 x - \cos^2 2x) (\cos^2 2x - \cos^2 4x)$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$= 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$$

$$\begin{array}{r} x^2 + b_2x + 14 \mid x + 7 \\ x^2 + 7x \\ \hline (b_2 - 7)x + 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (b_2 - 7)x + 6 \\ (b_2 - 7)x + 7(b_2 - 7) \\ \hline 7(7 - b_2) + 6 \end{array}$$

$$49 - 7b_2 + 6 = 0$$

$$49 - 7b_2 + 6 = 0$$

$$7b_2 = 55$$

$$b_2 = \frac{55}{7}$$

$$\left(x + \frac{6}{7}\right) (x + 7) (x + 3)$$

$$(x + 2) (x + 7) (x + 3)$$

$$b_1 = 5$$

$$b_2 = 9$$

$$b_3 = 10$$

Черновик

н ч. $\frac{\cos(2\pi x) - 1}{2} \cdot \cos 2\pi x$ $3 \cos \pi x \cdot \cos^2 2\pi x \stackrel{A}{=} 3 \cos^2 \pi x \cos(2\pi x)$
 $\stackrel{A}{=} \cos(2\pi x) \cos^2 4\pi x$

$$\cos^3(\pi x) - \cos^3(2\pi x) + \cos^3(4\pi x) = (\cos(\pi x) - \cos(2\pi x) + \cos(4\pi x))^3$$

$$(\cos^2(2\pi x) - \sin^2(2\pi x))^3 \cdot [\cos^6(2\pi x) - 1 + 2 \cdot 3 \cdot \cos^2 \pi x$$

$$3 \cos(\pi x) \cos^2(2\pi x) - 3 \cos^2(\pi x) \cos(2\pi x) + 3 \cos(\pi x) \cos^3(4\pi x) +$$

$$+ 3 \cos^4(\pi x) \cos(\pi x) - 3 \cos^3(\pi x) \cos^2(4\pi x) + 3 \cos^2(2\pi x) \cos(4\pi x) = 0$$

$$\cos 2\pi x \cos^2 2\pi x \cos(2\pi x) (\cos^2 \pi x + \cos^2 4\pi x).$$

cos

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = \frac{a^3 - a^2 b + b^2 a - ab^2}{1}$$

$$\cos(\pi x) \cos 4\pi x \cdot 2 \cos 2\pi x (\cos^2 \pi x + \cos^2 4\pi x \cos 2\pi x).$$

$$2 \cos^2 \pi x - 1.$$

$$2(2 \cos^2 \pi x - 1)^2 - 1^2$$

$$\frac{2(8 \cos^4 \pi x - 8 \cos^2 \pi x + 1)}{\cos^2 2\pi x = 4 \cos^4 \pi x - 4 \cos^2 \pi x + 1}$$

$$(2 \cos^2 \pi x - 1)$$

$$2/15 \cdot 4/5 =$$

$$= \frac{36}{15} \cdot \frac{1}{5} - 6 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}$$



Итого в ч.

№ 4.

$$\cos^3(\pi x) + \cos^3(4\pi x) = (\cos(\pi x) - \cos(2\pi x) + \cos(4\pi x))^3 + \cos^3(2\pi x)$$

$$(\cos(\pi x) + \cos(4\pi x))(\cos^2(\pi x) - \cos(\pi x)\cos(4\pi x) + \cos^2(4\pi x)) =$$

$$= (\cos(\pi x) + \cos(4\pi x))((\cos(\pi x) - \cos(2\pi x) + \cos(4\pi x))^2 - \cos(2\pi x) \cdot$$

$$\cdot (\cos 2\pi x - \cos 2\pi x + \cos 4\pi x) + \cos^2(2\pi x))$$

$$1) \cos(\pi x) \neq \cos(4\pi x)$$

$$\cos^2(\pi x) + \cos^2(4\pi x) - \cos(\pi x)\cos(4\pi x) = \cos^2(\pi x) + \cos^2(2\pi x) + \cos^2(4\pi x)$$

$$+ 2(\cos(\pi x)\cos(4\pi x) - 2\cos(\pi x)\cos(2\pi x) - 2\cos(2\pi x)\cos(4\pi x))$$

$$= \cos^2(\pi x) + \cos^2(2\pi x) + \cos^2(4\pi x) - 2\cos(\pi x)\cos(2\pi x) - 2\cos(2\pi x)\cos(4\pi x) +$$

$$- 2\cos(\pi x)\cos(4\pi x) + 3\cos(\pi x)\cos(4\pi x) - 3\cos(\pi x)\cos(2\pi x) - 3\cos(2\pi x)\cos(4\pi x) +$$

$$\cos^2(\pi x) + \cos^2(4\pi x) = \cos^2(\pi x) + \cos^2(4\pi x) + 2\cos(\pi x)\cos(4\pi x) - 2\cos(\pi x)\cos(2\pi x) - 2\cos(2\pi x)\cos(4\pi x)$$

$$4\cos^4 \pi x - 4\cos^2 \pi x + 1 + 8\cos^5 \pi x - 8\cos^3 \pi x + \cos \pi x =$$

$$= 2\cos^3 \pi x - \cos \pi x + 16\cos^6(\pi x) - 16\cos^4(\pi x) +$$

$$+ 2\cos^2(\pi x) - 8\cos^4 \pi x - 8\cos^2 \pi x - 1.$$

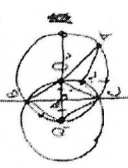
$$16\cos^6(\pi x) - 8\cos^5(\pi x) - 28\cos^4(\pi x) + 10\cos^3(\pi x) -$$

$$- 2\cos^2(\pi x) - 2\cos(\pi x) - 2 = 0.$$

№ 8.

Ответ: 36.

16. $OK \perp AC$; $OK \perp BC$



$K = \frac{AC}{2}$
 так как $OK \perp AC$
 то K - середина AC

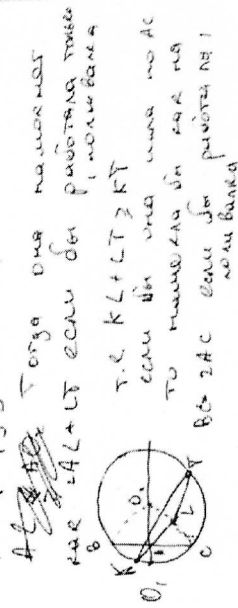
$$OK = \frac{AC}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$AC \perp OK \text{ т.к. } OK \perp AC \Rightarrow AC \perp OK$$

$$AC = 4\sqrt{3}$$

Докажем, что $AC \perp OK$.
 Пусть M - середина AC . Тогда $OM \perp AC$.
 т.е. радиус OM перпендикулярен хорде AC .
 $OM \perp AC$ она проходит через M .
 $OM \perp AC$

Пусть OK - высота $\triangle OKA$.
 Тогда она перпендикулярна AK .
 $OK \perp AK$



$$OK = \frac{AC}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

Подписывать лист-вкладыш запрещается! Писать на полях листа-вкладыша запрещается!

ЛИСТ-ВКЛАДЫШ

Условие.

если $OM \perp AC$ то $OM \perp AC$
 то $OM \perp AC$ в треугольнике OMC .

$$OM \perp AC$$

если $OM \perp AC$ то $OM \perp AC$
 то $OM \perp AC$ в треугольнике OMC
 по $OM \perp AC$

н.д.

$$OM \perp AC$$

Здравствуйте, прошу
 пересмотреть оценку
 в 6 задаче.
 В моем решении
 возможно рассмотрены
 не все случаи,
 однако представлены
 некоторые верные
 рассуждения, которые
 могли бы привести к
 правильному ответу и
 соответственно могут
 дать некоторый балл.

Повысить оценку к 5 баллам (с учетом оценки - 60%),
 новая оценка - 65%.

Решение