

Всего 12.54
Вернулся 12.58

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Вариант 7 класс

Место проведения Москва
город

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Олимпиада школьников Ломоносов
наименование олимпиады

по математике
профиль олимпиады

Михайлова Никиты Александровича
фамилия, имя, отчество участника (в родительном падеже)

Дата

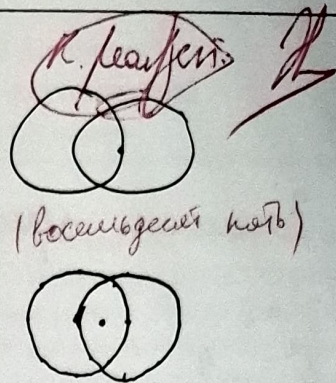
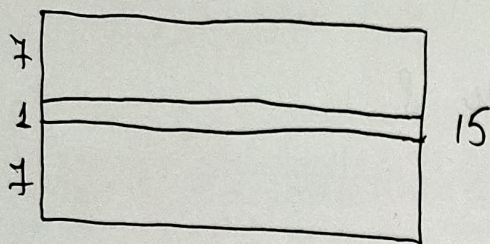
«13» апреля 2025 года

Подпись участника

Мих

Черновик (1)

20



85 (восемьдесят пять)

$$\frac{1}{100} < \frac{20}{300} < \frac{1}{10}$$

$$5+6+4+2$$

$$6+5+4+2$$

$$6+5+4+2$$

$$\begin{cases} 8^1 = 8 \\ 8^2 = \dots 4 \\ 8^3 = \dots 2 \\ 8^4 = \dots 6 \end{cases}$$

mod 4

$$8^n \equiv \dots \pmod{4}$$

$$n \equiv x \pmod{4}$$

$$6+5+3+$$

$$2025 \equiv 1 \pmod{4}$$

$$2025^{2025} \equiv (1)^{2025} \equiv 1 \pmod{4}$$

$$\Rightarrow 8^{2025^{2025}} = 8^{4k+1} \equiv 8^1 \equiv 8 \pmod{10}$$

$$a+b=a$$

$$a=b$$

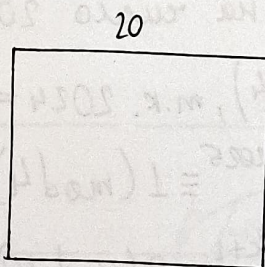
$$abc$$

$$c=a+b$$

$$20n+19 \geq 9001$$

$$20n \geq 888$$

$$n \geq \frac{888}{20} > 44$$



45

$$abg$$

$$g=a+b$$

$$a+b$$

$$b+1=a$$

$$a=5$$

$$b=4$$

$$c=9$$

$$549$$

$$5+4=9$$

$$550$$

$$5+5+0$$

$$20n+1 \geq 100 \cdot 10$$

$$20n > 1000-1$$

$$20n > 999$$

$$n > \frac{999}{20}$$

$$20 \cdot n + 1 \geq 1000$$

$$20n + 1 > 1000$$

$$20n > 999$$

$$n \geq 50$$

$$20n > 900$$

$$n > 45$$

$$\Rightarrow n \geq 50 \quad n \geq 46$$

П П П П П П П П П П

П П П П П П П П П П

Числовик ①

№3

Затемним период степеней 8:

$$\begin{cases} 8^1 = 8 \\ 8^2 = \dots 4 \\ 8^3 = \dots 2 \\ 8^4 = \dots 6 \\ 8^5 = \dots 8 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ последняя цифра числа 8^n зависит от того, с чем сравнимо n по модулю 4.

Если $n \equiv 1 \pmod{4}$, то $8^n \equiv 8 \pmod{10}$

Если $n \equiv 2 \pmod{4}$, то $8^n \equiv 4 \pmod{10}$

Если $n \equiv 3 \pmod{4}$, то $8^n \equiv 2 \pmod{10}$

Если $n \equiv 0 \pmod{4}$, то $8^n \equiv 6 \pmod{10}$

Посмотрим на число 2025^{2025} по модулю 4.

$$2025 \equiv 1 \pmod{4}, \text{ т.к. } 2024 = 2025 - 1 : 4$$

$$\Rightarrow 2025^{2025} \equiv 1^{2025} \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow 2025^{2025} = 4k+1, \text{ где } k \in \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow 8^{2025^{2025}} = 8^{4k+1} \equiv 8 \pmod{10}, \text{ т.к. степень } 4k+1 \equiv 1 \pmod{4}$$

$$\Rightarrow 8^{2025^{2025}} = \dots 8.$$

Ответ: 8.

Чистовик (2).

~2

Заметим, что в счастливом числе сумма цифр должна быть четным числом (иначе мы бы не смогли разбить цифры на две равные по сумме группы).

Также заметим, что в счастливом числе хотя бы 2 цифры (если в нем 1 цифра, то т.к. число натуральное, то цифра не 0 $\Rightarrow$ мы не сможем разбить цифры на две группы с одинаковыми суммами). Заметим,

что если на конце счастливого числа цифра не 9 (последняя цифра), то следующую за ней цифру последняя цифра на 1 больше, чем последняя цифра у счастливого числа, а все остальное такое же. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ если сумма цифр счастливого числа S , то сумма цифр следующего за ним числа $- S+1$. Т.к. у счастливого числа сумма цифр четная, то $S+1 \neq 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ это число не может быть счастливым $\Rightarrow$ наше счастливое число не может быть суперсчастливым.

$\Rightarrow$ Если наше счастливое число - суперсчастливое, то последняя цифра этого числа - 9. Пусть суперсчастливое число - двузначное. Тогда у него вид $\overline{a9}$. Т.к. оно счастливое, то $a=9 \Rightarrow$ это 99. Но следующее за ним число 100 - не счастливое $\Rightarrow$ 99 - не суперсчастливое.

Пусть это трехзначное число. Тогда оно имеет вид $\overline{ab9}$, где $a \neq 0$. Т.к. нам над минимальное такое число, то $9=a+b$. Тогда следующее за ним - $\overline{acs}$, где $c=b+1$, или $d00$, где $d=a+1$ но во 2-м случае $b=9 \Rightarrow a=0$ нр-ие

Числовик (3).

$\Rightarrow$ наше число имеет вид $\overline{ab9}$, а следующее — $\overline{a(c+1)0}$, где $c = b+1$. П.к. мы предположили, что $\overline{ab9}$ — ~~счастливым~~ сунероастливое, то $\overline{a(c+1)0}$ — счастливое

$$\Rightarrow a = c \Rightarrow a = b+1$$

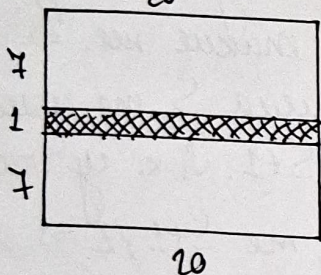
$$\Rightarrow 9 = b+b+1 \Rightarrow b=4, a=5 \Rightarrow \overline{ab9} = 549.$$

Проверка: $549 : 5+4=9$; $550 : 5=5+0$.

Ответ: 549

✓ 1

Пусть первым ходом Аня вырежет полосу с размерами 1×20 , как показано ниже.



Тогда образуется 2 одинаковых прямоугольника 20×7 . Теперь Аня будет играть симметрично относительно ходов Вани в другом прямоугольнике.

Если Ваня делает ход в верхнем прямоугольнике, то Аня отвечает симметрично в нижнем и наоборот. П.к. каждый раз отрезается кусок, не превышающий $\frac{1}{100}$ площади, то игра когда-нибудь закончится.

П.к. Аня не может проиграть, то она выигрывает.

Осталось проверить, что 1-й ход Вани в рамках правил.

Вырезан кусок $1 \times 20_{\text{см}} \Rightarrow S_k = 20 \text{ см}^2$ $S_{\text{ост}} = 20 \text{ см} \cdot 15 \text{ см} = 300 \text{ см}^2$

$$\frac{S_k}{S_{\text{ост}}} = \frac{20}{300} = \frac{1}{15}$$

$$\frac{1}{100} < \frac{1}{15} < \frac{1}{10} \Rightarrow \text{1-й ход Вани легальным}$$

Ответ: Аня

Чистовик (4).

~5

Оценка.

Заметим, что все жуки не могли оказаться на одной грани, т.к. на противоположной к грани, на которую переползают жуки сидит хотя бы 1 жук, и он не может переползти на эту грань, т.к. она не соседняя с его гранью. Всего жуков $1+2+\dots+6=21$ жук. $\Rightarrow$ на одной грани могут оказаться не более 20 жуков. Заметим также, что на грани, на которую переползают большинство жуков, изначально тоже есть жуки. Они также переползают на одну из соседних граней $\Rightarrow$ они не могут оказаться на нашей грани. Кол-во этих жуков в сумме с кол-вом жуков на противоположной грани, даст 7. $\Rightarrow$ на нашей грани с наибольшим кол-вом жуков не более $21-7=14$.

Пример. Выберем грань, на которой сидит изначально 6 жуков. Тогда на соседних гранях сидят 2, 3, 4, 5 жуков в каком-то порядке. Пусть все они переползут в грань, где изначально 6, а эти 6 в любом порядке переползут на соседние грани. Тогда на выбранной нашей грани $- 2+3+4+5=14$ жуков.

Ответ: 14 жуков.

Числовик ⑤.

~ 6

Из условия следует, что Петя решил хотя бы $n+1$ задачу, т.к. Вова решил не меньше n .
 $\Rightarrow$ всего решенных задач всеми 20 учениками A (пусть A) $A \geq 20n+1$.

Посчитаем решенные задачи другим способом:
 т.к. $\exists$ есть задача которую решили не менее 10 учеников (половина класса), то всего решенных задач — не менее 901, т.к. если их ≤ 900 , то могло ^{и меньше} оказаться, что каждой задаче решили ровно 9 учеников, что меньше половины класса.

$$\Rightarrow 20n+1 \geq 901$$

$$20n \geq 900$$

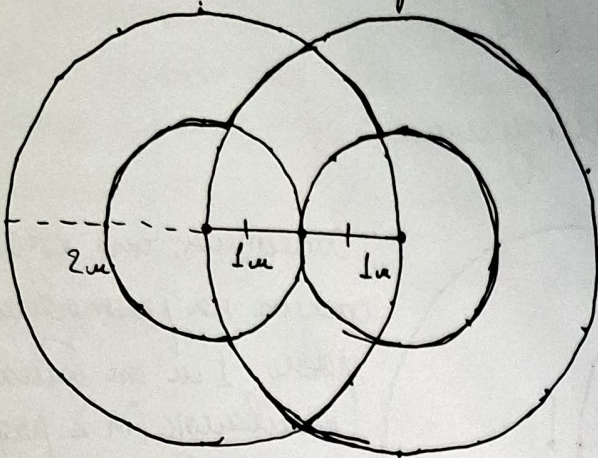
$$n \geq 45$$

$$\Rightarrow \min n = 45$$

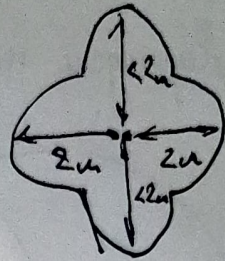
Действительно, если все решили хотя бы 45, а Петя хотя бы 46, то всего хотя бы 901, что достаточно, т.к. задач 100 и по принципу Дирихле найдется задача, которую решили хотя бы 10 человек — половина класса.

Ответ: 45.

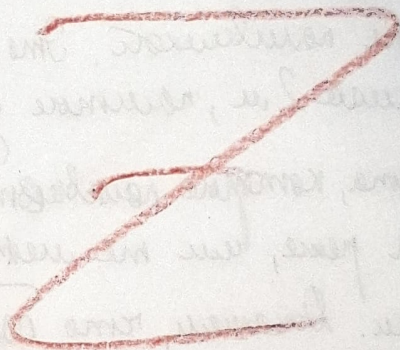
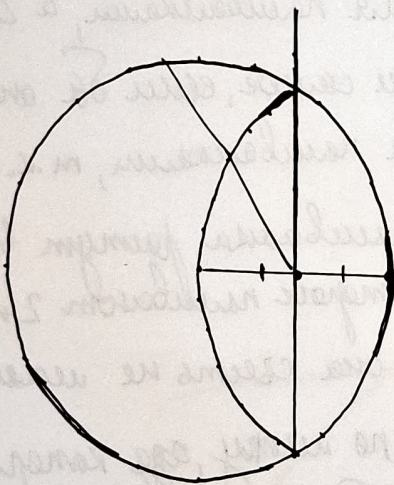
Черновик ②



← 1m → 3m.



Λ . . Λ . . Λ . . Λ . . Λ



4-2x

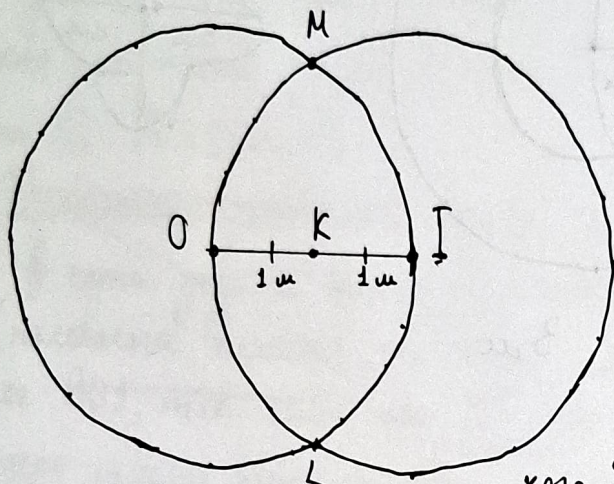
x 2-x

$$4-2x + x = 4x - x$$

Чистовик ⑥.

N 4.

Нарисуем нашу ситуацию.



Заметим, что коза стоит на расстоянии равно 1 м от обеих поилок. (т.к. радиус нашей окружности 2 м).

Заметим, что если коза будет идти точно вправо или точно влево, то она пройдет 3 м, ^{т.е.} а съест

травы 1 м — поилкой двумя поилками, а 2 м — одной поилкой. Это то же самое, если бы она прошла 2 м, поилкой двумя поилками, т.к. те места, которые поилка 1 поилка растут в 2 раза реже, чем те места, которые поилка 2 поилки. Докажем, что больше она съест не может.

Пусть она прошла x метров по месту, где которое поилка 2 поилки. Тогда если она съела больше, чем мы предполагаем, т.е. больше, чем она может съест, где по 2 м, поилкой двумя поилками. Тогда ей осталось пройти $2-x$ метров по поилкой одной поилкой местности, или в 2 раза больше, т.е. $4-2x$ метров по поилкой одной поилкой местности, т.е. всего $4-2x+x=4-x$ метров.

Источник (7).

Заметим, что пройти по палитой одной палитой
кой палитой на палитой палитой, т.к. $X < 2$
(если $X \geq 2$, то т.к. ΔOKK , или ΔOKL , или ΔIKN , или
 ΔIKL - прямоуголь., то в нем катет равен и больше
гипотенузы - н-е).

Можно заметить, что маршрут, удовлетво-
ряющий этим условиям проходит через центр O или I .
Но тогда он совпадает с нашим указанным марш-
рутом. $\Rightarrow$ он - наилучший.

Ответ: точно вправо или точно влево, длины равны
3 м.